

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УФИМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

# ТРУДЫ ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ

Выпуск 9

Материалы V Российской конференции с международным участием  
**«Многофазные системы: теория и приложения»**,  
посвященной 20-летию со дня основания  
Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН  
(Уфа, 2–5 июля 2012)

Часть II

Уфа — 2012

УДК 531/537+519.6+681  
ББК 22.2  
Т 299

*Издание осуществлено  
при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
грант № 12-01-06068-г*

**Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН.** Вып. 9. /  
Материалы V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2–5 июля 2012). Часть II. — Уфа: Нефтегазовое дело, 2012. — 150 с.

ISBN 978-5-98755-125-9

Сборник содержит материалы, представленные в рамках V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2–5 июля 2012). Сборник включает в себя доклады по различным направлениям механики многофазных систем и ее приложениям.

ISBN 978-5-98755-125-9

- © Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук, 2012
- © Издательство «Нефтегазовое дело», 2012

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Организационный комитет конференции выражает искреннюю признательность за помощь и финансовую поддержку

- Президиуму Российской академии наук  
и лично Вице-президенту РАН  
академику Валерию Васильевичу Козлову
- Отделению энергетики, машиностроения, механики  
и процессов управления РАН
- Уфимскому научному центру РАН
- Академии наук Республики Башкортостан  
и лично Президенту АН РБ Рамилю Назифовичу Бахтизину
- Руководству издательства «Нефтегазовое дело»
- Центру микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем Башгосуниверситета и его руководителю  
Искандеру Шаукатовичу Ахатову



## Содержание

<b>Урманчиев С.Ф.</b> V Российская конференция «Многофазные системы: теория и приложения» . . . . .	7
<b>Алексеев А.Ю.</b> Способы и методы кодирования информации о внешней среде для мобильных роботов . . . . .	14
<b>Ахметов А.Т., Валиев А.А.</b> Влияние агрегатного состояния дисперсной фазы на гидродинамические и реологические свойства эмульсий и суспензий . . . . .	18
<b>Батыршин Э.С., Делев В.А.</b> Синхронизация гидродинамических и ориентационной мод при электроконвекции в немагнитическом жидком кристалле . . . . .	22
<b>Богданов Д.Р.</b> Особенности построения информационной системы многозвенного манипулятора с учетом специфики среды . . . . .	27
<b>Галимзянов М.Н.</b> Усиление и гашение волн конечной длительности посредством пузырьковой области в одномерном приближении . . . . .	33
<b>Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н.</b> Исследование распространения и затухания волн в пористой среде, содержащей водонефтяную эмульсию . . . . .	38
<b>Давлетбаев А.Я., Нуриев Р.И.</b> Моделирование гидропрослушивания в скважинах с вертикальными техногенными магистральными трещинами гидроразрыва . . . . .	43
<b>Даринцев О.В.</b> Использование технологий виртуализации в системах управления микророботами и микро-системами . . . . .	47
<b>Даринцев О.В., Мигранов А.Б.</b> Сравнительный анализ интеллектуальных методов планирования . . . . .	53
<b>Денисова Е.В.</b> Анализ конструктивных схем гидромеханических дозаторов топлива . . . . .	58
<b>Денисова Е.В., Насибуллаева Э.Ш., Черникова М.А.</b> Двухкоординатная система автоматического управления подачей топлива в ГТД . . . . .	62
<b>Карачурина Э.В., Лукашук С.Ю.</b> Решение коэффициентной обратной задачи для уравнения аномальной диффузии дробного порядка . . . . .	65

<b>Ковалева Л.А., Степанова З.Ю., Камалтдинов И.М., Замула Ю.С</b>	
Влияние высокочастотных электромагнитных полей на адсорбционные процессы в пористой среде . . . . .	71
<b>Марьин Д.Ф.</b>	
Ускорение молекулярно-динамического моделирования многофазных систем при помощи GPU . . . . .	76
<b>Михайленко К.И., Валеева Ю.Р.</b>	
Моделирование осаждения мелкодисперсной среды под воздействием волн давления . . . . .	80
<b>Моисеев К.В.</b>	
Влияние режимов конвекции на полимеразную цепную реакцию в квадратной полости . . . . .	86
<b>Моисеева Е.Ф., Малышев В.Л.</b>	
Исследование растекания капли воды по поверхности металла методами молекулярной динамики . . . . .	90
<b>Муксимова Р.Р.</b>	
Моделирование процесса копирования формы выступа на электроде–инструменте при электрохимической обработке . . . . .	95
<b>Насибуллаев И.Ш.</b>	
Смена симметрии однородной неустойчивости при изменении температуры в стационарном сдвиговом потоке нематика со слабыми граничными условиями в электромагнитном поле . . . . .	101
<b>Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш.</b>	
Движение поршня в цилиндрической трубе с учетом вязкого трения . . . . .	107
<b>Поречный С.С.</b>	
Применение фильтрации для определения параметров процесса нестационарной электрохимической обработки . . . . .	113
<b>Рахимов А.А.</b>	
Течение эмульсий, в подготовке которых исключалось присутствие механических включений . . . . .	118
<b>Тимиров Ю.И., Гареева Е.Р., Скалдин О.А.</b>	
Топологические превращения в каплях нематихолестерика при развитой электроконвекции . . . . .	123
<b>Утяшев И.М., Ахтямов А.М.</b>	
Идентификация повреждения трубопровода с использованием тензодатчиков . . . . .	130
<b>Хакимов А.Г.</b>	
Отражение короткой изгибающей бегущей волны от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу . . . . .	134
<b>Хизбуллина С.Ф.</b>	
Математическая модель динамики неньютоновской аномально термовязкой жидкости в круглой трубе . . . . .	139
<b>Юлмухаметова Ю.В.</b>	
Выпрямляющийся разлет газа из вихря . . . . .	143

## V Российская конференция «Многофазные системы: теория и приложения»

Урманчиев С.Ф.

Российская конференция с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященная 20-летию со дня основания Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук, проведена в г. Уфе в период со 2 по 5 июля 2012 г.

Конференция была проведена Институтом механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН совместно с Центром микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем БашГУ при поддержке Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, Уфимского научного центра РАН, Академии наук Республики Башкортостан.

Заседания проходили в конференц-зале Уфимского научного центра РАН и на территории Института механики. Все заявленные доклады состоялись. Было сделано 23 лекционных сорокаминутных докладов и 56 секционных докладов с пятиминутной презентацией материала и последующим обсуждением результатов исследований.

После открытия конференции с докладом об истории создания и становления института выступил директор **д.ф.-м.н. Саид Федорович Урманчиев**. В докладе были отмечены основные направления деятельности института и достаточно подробно представлены научные достижения сотрудников. Особо были подчеркнуты исследования, результаты которых представляются приоритетными для института. К ним, в частности, относятся:

- динамическая устойчивость и колебания в задачах взаимодействия конструкций с рабочими средами;
- теория идентификации краевых условий и диагностика технических систем;
- интеллектуальные системы планирования траекторий группы мобильных роботов;
- кумуляция энергии при сверхсильном сжатии парогазовых пузырьков в акустических полях

и влияние эволюции искажений сферической формы пузырька на достижение предельно высоких значений давления и температуры внутри пузырька;

- широкодиапазонные термодинамически согласованные уравнения состояния воды и органических соединений;
- динамика пузырьков кластеров и структурообразование при акустической кавитации;
- автомодельное схождение ударных и детонационных волн по теплопроводному газу;
- симметричный анализ дифференциальных уравнений механики и решения с линейным полем скоростей для уравнений газодинамического типа;
- гидродинамика аномально термовязких сред в неоднородном температурном поле;
- теплофизика процессов разложения газовых гидратов и создание теоретических основ технологии извлечения углеводородного сырья на шельфе;
- течение дисперсных систем в капиллярах и эффект динамического запирания.

В области инновационных исследований созданы:

- программные продукты для обеспечения энергосберегающих технологий транспортировки нефти и газа по магистральным трубопроводам;
- инструментарий микроробототехнических систем для автоматизации микроманипуляторных операций;
- аппаратно-программный измерительный комплекс для реконструкции обстоятельств дорожно-транспортных происшествий.

В заключение докладчик сформулировал ряд новых перспективных направлений, в рамках которых будут проводиться исследования. Одним из них является изучение микромасштабных течений в приложении к задачам биологии, медицины и новых технологий.

С докладом «Пузырьки, океан, климат, глобальный кризис» выступил академик **Роберт Искандерович Нигматулин** (Москва, *Институт океанологии им. П. П. Шишова РАН*). В докладе подчеркнута значимость исследований в области динамики пузырьков для анализа процессов в различных областях естественных наук и их приложениях. Отдельно рассмотрена задача о возможности достижения сверхвысокой степени сжатия пузырька, в том числе и с использованием органических жидкостей. Приведен анализ влияния образования ударной волны, конденсации пара, охлаждения жидкости, начального искажения сферической формы и других факторов на параметры газа при максимальном сжатии. Приведены сравнительные характеристики сжатия для воды и ацетона. Отмечено, что финальная стадия сжатия пузырька в ацетоне сопровождается образованием ударной волны. В качестве главной проблемы при решении задачи о динамике пузырька в докладе было выделено наличие иерархии масштабов процесса схождения. Пузырек автором доклада был охарактеризован как «самая богатая модель в гидромеханике».

Далее в докладе были рассмотрены гидродинамические проблемы, связанные с моделированием изменения климата, в которых также решающую роль играет многомасштабность процессов. Внимание слушателей было привлечено также описанием природных циклов в формировании климата и оценками влияния на него антропогенного воздействия.

Схождение пузырька может сопровождаться потерей устойчивости его первоначальной сферической формы. Наличие поверхности натяжения на границе раздела газ (пар)–жидкость наводит на мысль об аналогии с потерей устойчивости сферической оболочки. Потеря устойчивости цилиндрических оболочек при динамическом обжатии рассмотрена М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским (1949), а устойчивость границы раздела газ–жидкость при ударно-волновом нагружении — Р. Рихтмайером (1960) и Е. Е. Мешковым (1969). На конференции был представлен обстоятельный доклад члена-корреспондента РАН **Марата Аксановича Ильгамова** (Уфа, *ИМех им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН*), в котором были изложены результаты, обобщающие результаты предыдущих исследований. Для постановки обобщенной зада-

чи в статической формулировке вначале была рассмотрена задача о взаимодействии неустойчивостей Эйлера и Рэлея–Тэйлора. Расчетная схема была представлена по аналогии с задачей о продольно-поперечном изгибе балки, но, при этом, находящейся на границе двух жидкостей с различными плотностями. Были построены области устойчивости и предельные значения критических нагрузок, соответствующие критериям Эйлера и Рэлея–Тэйлора. Далее, уже в динамической постановке, была решена обобщенная задача о взаимодействии неустойчивостей Лаврентьева–Ишлинского и Рихтмайера–Мешкова. Также были рассмотрены все предельные случаи поведения системы.

Явление кумуляции при сжатии кавитационных пузырьков в жидкости было рассмотрено в докладе **д.ф.-м.н. Александра Алексеевича Аганина** (Казань, *ИММ КазНЦ РАН*). Изложение материала было построено исходя из анализа многочисленных проявлений кавитации в технике и технологиях, включая медицинские приложения. Особое внимание было уделено развитию представлений о воздействии акустического поля на пузырьковый кластер в дейтерированном ацетоне, включая финальную стадию сверхсильного сжатия отдельного пузырька, приводящую к эмиссии нейтронов. С привлечением экспериментальных данных показано, что в случае потери сферической формы пузырька в процессе сжатия эмиссия нейтронов прекращается. Построена численная модель сжатия пузырька с учетом развития искажений его формы. Рассмотрена эволюция различных заданных форм несферичности как при растяжении пузырьков, так и при их сжатии. Установлено, что для достаточно большого числа полуволн ( $n > 20$ ), характеризующих несферичность пузырька, влияние вязкости жидкости становится определяющим фактором, ограничивающим рост возмущений. Дальнейший численный анализ модели позволил установить эволюцию полей давления и температуры для различных начальных форм искажения пузырька и влияние пузырьков друг на друга в стримере. Расчет по интегральному критерию эффективности сжатия, определяемому производством нейтронов, показал, что сохранение сферичности пузырька приводит к наилучшим результатам по выходу нейтронов.

Гидродинамическая неустойчивость двухфазных сред стала в последнее время важнейшим разделом механики многофазных сред. Этот вид неустойчивости характерен для процессов осаждения, струйного и расслоенного видов течения дисперсных систем и сопровождается физическими эффектами, требующими объяснения на основе де-

тального анализа явления. Математическому моделированию некоторых задач, связанных с возникновением неустойчивости на границе раздела со средой, содержащей дисперсную фазу, был посвящен доклад **д.ф.-м.н. Александра Николаевича Осипцова** (Москва, ИМех МГУ). Модельные представления основывались на уравнениях механики многофазных сред, полученных в результате пространственного осреднения. При этом уравнения для несущей фазы рассматривались в эйлеровой системе переменных, а для дисперсной — в лагранжевых.

На примере двухфазного течения в вертикальном канале приведен учет рассогласования скоростей фаз. Математическая модель была сведена к задаче о собственных значениях для модифицированного уравнения Орра–Зоммерфельда. Построены области устойчивости в пространстве параметров с учетом скольжения фаз. Далее были представлены решения задач о концентрации частиц в пограничном слое и о течении Пуазейля с учетом конечной объемной концентрации частиц. В заключение были рассмотрены вопросы алгебраической неустойчивости и «оптимальных» возмущений в модели запыленного газа с неоднородным распределением частиц.

Вопросы структурообразования в современной гидродинамике занимают значительное место. Для адекватного описания формирования так называемой «тонкой структуры» течений неоднородных и многофазных жидкостей в докладе **профессора Юлиа Дмитриевича Чашечкина** (Москва, ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН) предложен подход, базирующийся на основных постулатах гидродинамики. При этом в теоретических построениях требуется выполнение условий полноты системы уравнений и использование понятия наблюдаемости физических величин. Отмечается, что все виды течений реальных жидкостей имеют сложную структуру и включают крупномасштабные компоненты и семейство мелкомасштабных компонент. Первые соответствуют регулярно возмущенным решениям, а вторые — сингулярно возмущенным решениям. На основе их разложений в ряды и строятся конкретные модели гидродинамических явлений. Сделан важный вывод о вырождении фундаментальной системы уравнений для классического приближения однородной жидкости. Рассмотрены различные виды течений, индуцированных диффузией на препятствии в стратифицированных средах.

Один из наиболее интересных процессов в природе, требующих досконального изучения, — это извержение вулкана. Прогнозирование времени и

параметров извержения приводит к необходимости построения адекватных моделей, учитывающих главные особенности процесса. Наиболее важной из них представляется динамическое поведение тяжелой пузырьковой магмы при взрывных извержениях вулкана. Эта проблема, включая разработку математической модели, была рассмотрена в докладе **профессора Валерия Кирилловича Кедринского** (Новосибирск, ИГ им. М. А. Лаврентьева СО РАН). В основу математической модели был положен экспериментальный факт, свидетельствующий о том, что сжатый магматический расплав, насыщенный газом, при декомпрессии трансформируется в двухфазную систему газ–частицы. В модели были учтены следующие процессы: декомпрессия, пересыщение расплава, спонтанная нуклеация, образование микропузырьков, развитие пузырьковой кавитации. Все детали моделирования сопровождались данными наблюдений и фотографиями. На основе анализа модели были выведены управляющие безразмерные параметры. Были представлены результаты расчетов по распределению параметров процесса извержения в пространстве и их изменение в заданной точке от времени. Численный анализ динамики состояния магмы позволил обнаружить принципиальное влияние диффузии и микро кристаллитов, способных играть роль ядер кавитации, на структуру формирующихся в магме волнового поля и поля массовой скорости. Показано также, что предвзрывное состояние вулканических систем, входящих в классификацию А. Лакро по интенсивности извержений, по структурному признаку идентичны схемам гидродинамических ударных труб Glass–Neuckroth.

В дополнительном сообщении профессор В. К. Кедринский представил экспериментальные результаты последних лет на тему «Кавитационные явления и пузырьковые кластеры», а также теоретические модели для описания обнаруженных явлений.

Теоретические и экспериментальные результаты по исследованию волн в двухфазных средах нашли отражение в развернутом докладе **члена-корреспондента РАН Дамира Анваровича Губайдуллина** (Казань, ИММ КазНЦ РАН), в нем было представлено последовательное развитие концепции механики многофазных сред при описании распространения акустических волн в полидисперсных парогазокапельных средах. Приведено описание аномального эффекта немонотонной зависимости диссипации звука от концентрации капель. Установлено, что определяющее влияние на его возникновение в аэрозолях оказывают фазовые переходы. Предложен акустический метод опреде-

ления параметров смеси. Приведено сопоставление с экспериментальными результатами по декременту затухания на длине волны (Cole, Dobbins, 1971), подтверждающими предложенную теорию. Далее к рассмотрению были предложены акустические волны в пузырьковых средах. При построении модели внимание было уделено следующим фактам: существованию внутренних пульсационных движений; неголономности уравнения состояния; высокой плотности и малой скорости звука; особенностям характера зависимости скорости и декремента затухания звука от частоты. Была принята гипотеза о постоянстве плотности и температуры жидкости. Построены зависимости фазовой скорости и декремента затухания в зависимости от частоты для различного состава компонентов смеси и начальных радиусов пузырьков. Расчеты по распространению звука в двухфракционных полидисперсных пузырьковых жидкостях были сопоставлены с экспериментальными данными (Е. Silberman). Далее были рассмотрены задачи по динамике газовзвесей в акустическом поле и нелинейные колебания аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме, сопровождающиеся явлениями коагуляции и осаждения частиц.

Акустические методы достаточно успешно применяются для диагностики состояния как технических объектов, так и нефтегазоносных пластов. В докладе **профессора Амира Анваровича Губайдуллина** (Тюмень, ТФ ИТПМ им. С. А. Христьяновича СО РАН) предложена математическая модель распространения волн в пористых средах, содержащих водонефтяную эмульсию для установления закономерностей изменения фазовых скоростей и декремента затухания в зависимости от состава флюида, насыщающего пористую среду. В ходе исследований установлено, что скорости распространения волн существенно зависят от водонасыщенности эмульсии. Показано также, что пористая среда, содержащая водонефтяную эмульсию, характеризуется повышенным затуханием волн по сравнению с пористой средой, насыщенной водой или нефтью.

Исследование особенностей фильтрационных процессов в пористых средах представляет значительный интерес для решения проблем, связанных с нефтедобычей, а также в задачах охраны окружающей среды и теории пропитки в химической технологии. Задача о вихреобразовании при двухфазных течениях в пористых средах была рассмотрена в докладе **д.ф.-м.н. Анатолия Ивановича Никифорова** (Казань, ИММ КазНЦ РАН). Математическая постановка задачи фильтрации с учетом капиллярных и гравитационных сил была сформу-

лирована в переменных «скорость–насыщенность». Численное решение строилось с использованием метода контрольного объема. Были рассмотрены задачи о сегрегации воды и нефти, капиллярно-противоточной пропитке, а также развития начального возмущения в насыщенности. Численно продемонстрирована возможность образования вихревых структур в пористой среде при фильтрации.

В механике многофазных сред существенную роль играют фазовые переходы. Наиболее сложным аспектом при моделировании фазовых переходов считается поведение термодинамической системы в зоне метастабильного состояния. Доклад, посвященный термодинамическим аспектам выхода жидкости из метастабильного состояния, был сделан **профессором Владиславом Шайхуллагзамовичем Шагаповым** (Уфа, ИМех им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН). На примере вскипания перегретой жидкости, содержащей газодыши, из условий механического и теплового равновесий парового пузырька получены соотношения для инкремента от радиуса парового пузырька при различных давлениях в жидкости и при различных начальных значениях радиуса пузырька. Выведено выражение для максимально возможного перегрева при заданном значении массы газодыша и условие устойчивости жидкости с паровыми пузырьками. Для вскипания жидкости, содержащей газодыши, при снижении давления получена адиабата процесса и, в итоге, построена схема процесса изменения радиуса пузырьков при распространении волны разрежения. Полученные результаты были использованы при создании теоретической модели образования и разложения газодыши гидратов.

Одной из задач многофазной фильтрации является моделирование процессов, связанных с применением потокоотклоняющих технологий, позволяющих перекрывать высокопроницаемые участки пласта для эффективного вытеснения углеводородного сырья из низкопроницаемых участков. В докладе **к.ф.-м.н. Альфира Тимирзяновича Ахметова** (Уфа, ИМех им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН) предложен принцип, на основе которого в качестве потокоотклоняющего реагента возможно использование водонефтяных эмульсий. Он основан на особенностях протекания эмульсий в капиллярах и узких каналах переменного сечения, получивших название «эффект динамического запираения». Представлены результаты многолетних лабораторных экспериментальных исследований проявления эффекта запираения в капиллярах, узких отверстиях, пористых средах при задании различных условий протекания для эмульсий различного состава,

включая кровь.

Прикладные аспекты нелинейной фильтрации в низкопроницаемых коллекторах были рассмотрены в докладе **д.ф.-м.н. Виталия Анваровича Байкова** (Уфа, ООО «РН-УфаНИПИнефть»). Были представлены различные виды классификации низкопроницаемых коллекторов и развитие представлений о формулировке закона фильтрации. Показано, что во всей области градиентов давления для низкопроницаемых коллекторов широко известный закон Дарси не работает. Установлено, что отличие низкопроницаемых коллекторов от высокопроницаемых состоит в постоянно изменяющемся тангенсе угла наклона на графике зависимости скорости фильтрации от градиента давления в области градиентов давления ниже критических. Предложена математическая модель фильтрации, учитывающая эффекты, связанные с наличием предельного градиента давления и приведены численные результаты по обводнению Приобского месторождения нефти, характеризующегося наличием низкопроницаемых коллекторов.

Вытеснение нефти из пласта водой в процессе разработки нефтяного месторождения неизбежно сопровождается образованием водонефтяной эмульсии. Устойчивость такого рода систем приводит к проблеме их разделения на нефть и воду. В докладе **профессора Лианы Ароновны Ковалевой** (Уфа, Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем БашГУ) для решения поставленной проблемы был представлен метод разрушения водонефтяных эмульсий электромагнитным излучением. В докладе была подробно описана физическая основа предлагаемого метода, схема лабораторного стенда и приведены результаты исследования влияния воздействия высокочастотного электромагнитного поля на микроструктуру водонефтяной эмульсии. Было изучено также воздействие и сверхвысокочастотного электромагнитного излучения. Методами численного моделирования была исследована задача о тепловой конвекции, возникающей в капле жидкости при поглощении излучения. Задача о конвекции была поставлена в связи с установлением механизма разрушения капли.

Математические модели, использующие концепцию механики многофазных сред, нашли широкое применение и при анализе процессов в ядерных энергетических установках. Методы расчета гибридных систем в ядерном топливном цикле были представлены в докладе **д.ф.-м.н. Сергея Ивановича Лежнина** (Новосибирск, ИТФ им. С. С. Кутателадзе СО РАН). Эти системы можно использовать для наработки ядерного топ-

лива из природного урана или тория, а также для создания энергетических систем средней и малой мощности. Актуальность их применения определяется и тем, что одновременно они могут служить станциями по переработке и дожиганию долгоживущих радиоактивных отходов (прежде всего минорных актинидов), что позволит решить проблему стремительного накопления отработанного ядерного топлива в мире. В докладе описан компьютерный код для проведения расчетов физических параметров гибридных энергетических систем и сравнение расчетных и экспериментальных данных. Приведены условия энергетической эффективности установки.

Проблемам атомной энергетики был посвящен и следующий доклад, представленный **д.ф.-м.н. Николаем Алексеевичем Прибатуриным** (Новосибирск, ИТФ им. С. С. Кутателадзе СО РАН), в котором был отражен повышенный интерес к исследованию двухфазных потоков в сборках стержней тепловыделяющих элементов. Результаты экспериментальных исследований структуры двухфазного течения в ячейке между тепловыделяющими элементами показывают, что в потоке жидкости образуются как мелкие пузырьки газа, так и крупные удлиненные газовые образования, полностью перекрывающие поперечное сечение ячейки. Интересно отметить, что проведенные измерения азимутального распределения газосодержания вокруг центрального стержня указывают на слабый обмен газом между ячейками. Показано также, что ввод в канал перемешивающих решеток приводит к перераспределению газа в сечении канала по сравнению с дистанционирующей решеткой. За решетками происходит дробление крупных пузырей газа, при удалении от решеток изменения размеров пузырей не зарегистрировано. С использованием программных продуктов вычислены значения газосодержания в сборках с использованием решеток различного типа. Далее были определены распределения напряжений трения в однофазном потоке и их пульсации в кольцевом канале на различных расстояниях от преграды.

Нет особой необходимости подчеркивать решающее значение развития математических методов для решения актуальных задач гидродинамики и механики многофазных сред. Впечатляющие результаты об исследовании симметричных свойств дифференциальных уравнений переноса дробного порядка были получены в работе, представленной **д.ф.-м.н. Рафаилом Кавыевичем Газизовым** (Уфа, УГАТУ). Доклад был сделан в стиле научно-методической лекции с подробным введением необходимых определений и основных свойств дробных

производных, включая правила замены переменных в уравнениях дробного порядка. Была проведена нелокальная замена переменных и вычислены операторы, соответствующие нелокальным симметриям. Далее симметрии использовались для построения решений уравнений. Было рассмотрено уравнение аномального диффузионного переноса, для которого были найдены инвариантные решения. В заключение был рассмотрен метод инвариантных подпространств применительно к решению эволюционных уравнений.

В докладе **профессора Наиля Хайрулловича Ибрагимова** (*Sweden, Karlskrona, Blekinge Institute of Technology*) были изложены результаты исследований по построению точных решений уравнений математической физики с помощью законов сохранения. В докладе описан последовательный алгоритм нахождения частных решений уравнения теплопроводности в анизотропной среде как при наличии источника, так и без него. Для этого вначале осуществляется построение нетривиальных законов сохранения, затем определяются сохраняющиеся векторы для одного из них. После серии преобразований записывается точное частное решение исходного уравнения. Аналогично можно использовать и другие законы сохранения.

Анализ неавтономных подмоделей ранга один в газовой динамике проведен в докладе **профессора Салавата Валеевича Хабирова** (*Уфа, ИМех им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН*). Рассмотрены различные случаи конических течений: сверхзвуковое закрученное истечение в вакуум; постоянный закрученный поток при течении вне конуса; закрученный источник на оси внутри конуса (смерч); вихревой источник на оси внутри конуса. Для каждого вида течения определялись мировые линии и траектории движения частиц среды. Далее выполнен симметричный анализ и в следующих видах течений таких, как схлопывания вакуумной полости, коллапса, взрыва, стока в воронку и др. Приведенный в докладе способ нахождения точных решений заключается в рассмотрении групповых подмоделей, построенных по надалгебрам подалгебр, по которым и были построены подмодели ранга один.

Задачи механики сплошных сред представляют собой достаточно сложный объект для численного моделирования. Особого внимания при решении задач гидродинамики многофазных сред и многих других задач заслуживает проблема оценки погрешности. В докладе, сделанном **профессором Владимиром Павловичем Житниковым** (*Уфа, УГАТУ*), был описан метод, позволяющий проводить достоверную оценку погрешности численных результатов при решении задач механики. Предложена концепция, в соответствии с ко-

торой были разработаны методы численной фильтрации результатов вычислительного эксперимента для различных моделей процессов (степенной, показательной, колебательной и др.), заключающиеся в последовательном исключении компонент и идентификации оставшихся. Предложенный метод идентификации, в отличие от методов экстраполяции и регуляризации, позволяет получить непротиворечивые оценки погрешностей искомых параметров и уточнить результаты на несколько порядков, что и было продемонстрировано на рассмотренных примерах.

В докладе **д.ф.-м.н. Азамата Мухтаровича Ахтямова** (*Уфа, БашГУ*) была представлена задача об идентификации условий закрепления в механических системах. Определение условий закрепления было сведено к решению обратной задачи, корректной по Тихонову, о колебаниях стержней и опертых по контуру пластин. Доказаны теоремы для случаев, когда решение обратной задачи осуществимо. Проведен анализ применения метода квазирешений операторных уравнений для некорректно поставленных задач.

В программе конференции было предусмотрено проведение круглого стола на тему о влиянии окружающей среды на функционирование микроробототехнических систем. Доклад по данному направлению был сделан **д.т.н. Олегом Владимировичем Даринцевым** (*Уфа, ИМех им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН*). Рассмотренная в докладе тема касалась использования технологий виртуализации в системах управления микророботами и микросистемами. Докладчик подчеркнул, что при разработке микроробототехнических систем был принят подход, основанный на принципе единства рассматриваемого объекта и окружающей среды. В рамках указанного подхода был создан инструментарий, позволяющий микроробототехническим устройствам осуществлять задачи, связанные с их функциональным назначением. В свою очередь, при создании инструментария проводился детальный учет физических процессов взаимодействия конструктивных элементов с окружающей средой, а затем определялась область изменения рабочих параметров. В докладе были представлены алгоритмы управления для рассмотренных систем, в частности, интеллектуальная система планирования траекторий группы мобильных роботов.

По окончании доклада слушатели были приглашены в лабораторию «Робототехника и управление в технических системах», где имели возможность познакомиться с устройствами робототехнических систем, созданных в институте, и с работами

по созданию математического обеспечения управления ими.

В заключительной части конференции выступил **профессор Искандер Шаукатович Ахатов** (*USA, Fargo, NDSU*) с докладом о формировании лабораторий в Центре микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем в Башкирском государственном университете в соответствии с целями и задачами гранта, полученного в рамках правительственной программы привлечения в Россию ведущих ученых. Основное внимание было уделено научным задачам, на решение которых нацелены сотрудники Центра.

В докладе дан обстоятельный анализ различных видов дисперсных систем, встречающихся в природе и технологиях. Показано, что возникновение современной приборной базы и развитие нанотехнологий привели к становлению новых научных дисциплин таких, как микрофлюидика и нанофлюидика, изучающих движение весьма малых количеств вещества и использующие новые приемы для математического моделирования рассматриваемых процессов.

Одним из объектов исследования в Центре являются микро- и нанопузырьки, играющие определяющую роль при течении жидкости в капиллярах и каналах пористых сред, что представляет значительный интерес для понимания механизмов управления фильтрационными процессами в нефтяном пласте и в тканях живых организмов. Другой объект — это эмульсии, свойства которых определяются наличием сложного внутреннего строения частиц дисперсной фазы.

Докладчик отметил, что эксперименталь-

ные исследования под руководством профессора Клауса-Дитера Оля (*Claus-Dieter Ohl, Nanyang Technological University, Singapore*) проводятся на самых современных приборах, которые в течение последнего года были приобретены на средства «мегагранта», такие, как атомно-силовой микроскоп, электронно-оптический детектор частиц, конфокальный микроскоп, фемтосекундный лазер, высокоскоростная кинокамера и другие. Вычислительная лаборатория, возглавляемая **профессором Наилем Асгатовичем Гумеровым** (*USA, University of Maryland*), также оснащена современными высокопроизводительными вычислительными комплексами. Для численной реализации сложных вычислительных алгоритмов, которые разрабатываются в Центре и проведения ресурсоемких расчетов к использованию готов вычислительный кластер, оборудованный двумя вычислительными узлами по два CPU Intel Xeon 5660, четыре передовых вычислительных графических карты Nvidia Tesla C2075 и 48 ГБ RAM.

Докладчик отметил, что Центр тесно связан с рядом кафедр физического и математического факультетов БашГУ, а также с Институтом механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН. А в текущем году приступил к выполнению исследований по заказу ООО «Газпромнефть НТЦ».

Презентации секционных докладов проходили по следующим разделам: «Многофазные потоки», «Газовые гидраты», «Вычислительная механика», «Волны», «Робототехника и системы управления», «Микро- и наномеханика», «Прочность».

# Способы и методы кодирования информации о внешней среде для мобильных роботов<sup>1</sup>

Алексеев А.Ю.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В статье рассматривается методика организации канала беспроводной передачи данных по оптическому каналу, с использованием системы технического зрения и маркеров расширенной виртуальной реальности. Описываются способы и методы кодирования информации с помощью двумерного кода: динамический и цветной варианты кода. Представлен экспериментальный робототехнический комплекс, на базе которого проводятся тестирование и отладка методов кодирования–декодирования информации в двумерных кодах.

## 1. Введение

Мобильные роботы в силу своей специфики предназначены для функционирования в недетерминированной внешней среде. При построении централизованной системы управления коллективом мобильных роботов выбор алгоритмов, целей зависит от способов обмена данными между роботами и центральным компьютером.

Беспроводные каналы связи (*Bluetooth*, *ZigBee*) способны передавать данные на скорости до 2 Мбит/с, и этого вполне достаточно для двусторонней передачи данных между роботом и центральной системой управления. Однако, когда требуется управление группой мобильных роботов, осуществить одновременный прием и обработку радиосигналов в режиме реального времени будет невозможно. Придется либо уменьшить количество роботов в коллективе, либо искать другие способы беспроводной связи, способные увеличить скорость передачи данных. Также основным недостатком данных способов организации канала обратной связи при управлении коллективом мобильных роботов является невозможность отследить ориентацию и местоположение робота в пространстве.

## 2. Маркеры расширенной виртуальной реальности

Достаточно часто для определения координат и ориентации роботов, мониторинга окружающего пространства используются системы технического зрения (СТЗ), что дает, с одной стороны, обеспече-

ние «визуального» контакта оператора с объектом управления, а, с другой стороны, появляется также возможность организовать дублирующий канал обмена данными. Использование в качестве системы кодирования маркеров расширенной виртуальной реальности существенно снижает требования к пропускной способности канала, т.к. в этом случае основная вычислительная нагрузка ложится на верхний уровень системы управления.

Маркер расширенной виртуальной реальности представляет собой двумерный код, наподобие известных *QR*-кодов, *DataMatrix* и других. Основное достоинство двумерных кодов — это легкое распознавание сканирующим оборудованием (в том числе даже *web*-камерой), что дает возможность использования такого подхода в различных сферах деятельности: от бытового применения (с низкой разрешающей способностью) до контроля технологических операций [1].

Наиболее предпочтительным для прототипа разрабатываемой системы оптической передачи данных является использование технологии *DataMatrix* [2] для кодирования оперативной информации робота, так как она является наиболее компактной по геометрическим размерам, что очень важно при ограничениях на размеры мобильных роботов. Минимальный размер такого кода 10 на 10 точек, в то время как у наиболее популярной технологии *QR*-кодов при таком же уровне коррекции ошибок — 21 на 21.

## 3. Алгоритм Риды–Соломона

На устойчивость каналов обмена данными к внешним помехам в значительной мере влияют

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 1 Отделения ЭММПУ РАН «Научные основы робототехники и мехатроники»

структура сети и помехозащищенность кода при передаче данных. Поэтому, предлагается использовать оптический канал связи с использованием двумерных кодов, основанных на методике кодирования Рида–Соломона с коррекцией ошибок возможных при передаче данных.

Код Рида–Соломона [3] — эффективный и удобный в реализации  $(k, N)$ -блочный код, позволяющий обнаруживать и исправлять ошибки в кодируемых байтах. Входным словом для него является блок из  $k$  байт, выходным — кодовое слово из  $N$  байт, состоящее из  $k$  исходных и  $N - k$  проверочных байт. Алгоритм гарантирует, что при декодировании в кодовом слове будут обнаружены и исправлены  $t = (N - k)/2$  байт, независимо от их расположения внутри кодового слова. Параметр  $t$  носит название корректирующей способности кода.

Существует две разновидности кодирования: систематический и несистематический коды. В несистематическом коде закодированное сообщение не содержит в явном виде исходного сообщения: закодированное сообщение  $C(x)$  получается как произведение исходного сообщения  $p(x)$  на порождающий многочлен  $g(x)$ :

$$C(x) = p(x) \cdot g(x).$$

Порождающий многочлен Рида–Соломона строится следующим образом:

$$g(x) = \prod_{(i=1 \dots D-1)} (x+a^i) = (x+a^1)(x+a^2) \dots (x+a^{D-1}),$$

где  $a$  — примитивный элемент поля Галуа;  $D$  — «расстояние Хэмминга»,  $D = N - K + 1$ .

Систематический код строится немного иначе. Сначала полином сдвигается на  $K$  коэффициентов влево, а потом вычисляется его остаток от деления на порождающий полином и прибавляется к  $p'(x)$ :

$$p'(x) = p(x) \cdot x^{(N-K)},$$

$$C(x) = p'(x) + p'(x) \bmod g(x).$$

Таким образом, в систематическом коде  $K$ –старших коэффициентов полученного кода  $C(x)$  содержат исходное сообщение, а остальные — избыточное, что облегчает обработку данных во время декодирования.

Закодированное сообщение  $C(x)$  обладает очень важным свойством: оно без остатка делится на порождающий многочлен  $g(x)$ . В случае появления остатка от деления можно считать, что закодированное сообщение было искажено.

Процесс кодирования сводится к операциям сложения и умножения по модулю 256, что существенно снижает требования к бортовым вычислительным системам мобильного робота [4].

Каждый код имеет измерительные линейки, которые выглядят как сплошная линия по одному краю символа, и равномерно расположенные квадратные точки одинакового размера по другому краю. Эти линейки используются для определения ориентации и плотности кода и поэтому позволяют считывать код при любом положении робота в пространстве.

#### 4. Технология матричного фотосканирования

В настоящее время существует множество программ распознавания двумерных кодов как промышленного, так и бытового назначений. Большинство программ предназначено для распознавания одиночных статичных кодов, в том числе и программы, использующие камеры мобильных телефонов. При решении задачи управления коллективом роботов требуется другое алгоритмическое решение, так как необходимо одновременное распознавание двумерных кодов со всех роботов, находящихся в рабочей зоне, в режиме реального времени. Для этого необходимо реализовать разбиение изображения получаемого с камеры СТЗ на сектора с последующим распознаванием двумерных кодов в каждом секторе в соответствии с выбранной стратегией обхода. Подобный подход к решению поставленной задачи не в полной мере подходит для коллектива мобильных роботов, так как при передвижении коллектива роботов достаточно сложной и неоднозначной становится задача динамического разбиения изображения на сектора произвольного размера, чтобы гарантированно обеспечить выделение всех видимых двумерных кодов с последующим их считыванием и декодированием. Интересным решением в этой связи представляется реализация технологии матричного фотосканирования (*Area Image*). Матричный фотосканер представляет собой быстродействующий фотоаппарат, производящий большое количество снимков в секунду и обладающий способностью распознавания нескольких кодов одновременно. Все операции производятся со сканированным изображением, что позволяет распознавать как линейные штрих коды, так и двумерные. К преимуществам данной технологии также относится отсутствие жестких требований к точному наведению оптической системы и ориентации кода относительно сканера, что немаловажно при реализации системы управления коллективом мобильных роботов.

#### 5. Динамический двумерный код

Для обеспечения покрытия всей рабочей зоны действия коллектива мобильных роботов потребу-

ется скоростная камера с высокой разрешающей способностью. Если на каждом роботе коллектива будет установлен квадратный дисплей для отображения двумерного кода со стороной  $l$  миллиметров и разрешением  $x$  точек, тогда минимальный размер точки двумерного кода  $d$  будет равен отношению  $l$  на  $x$ . Следовательно, чем больше величина  $d$ , тем меньше требования к разрешающей способности камеры, но при этом объем кодируемой информации тоже уменьшается. При достаточно больших объемах передаваемой информации решение проблемы гарантированного распознавания видится в использовании динамического двумерного кода: передаются не один, а несколько двумерных кодов, последовательно кадр за кадром (рис. 1). При таком подходе, соответственно, увеличивается время передачи информации, но при этом уменьшается размер кадра, растет геометрический размер отдельного элемента двумерного кода, что приводит к снижению аппаратно-временных затрат и увеличению скорости распознавания. Использование динамического двумерного кода требует разработки специальной организации передачи данных, где каждый кадр пакета данных должен содержать часть информации о предыдущем кадре для сохранения целостности пакета при передаче.

## 6. Цветной двумерный код

При построении маркерных модулей на борту мобильных мини-роботов компактность кода является одним из значимых параметров, поэтому использование технологии *DataMatrix* наиболее предпочтительно. С целью увеличения объема передаваемой информации предлагается сделать код двухслойным. В качестве первого слоя будет выступать сам код *DataMatrix*, а второй слой будет представлять собой цветной код, наложенный на черные точки основного кода (рис. 2).

При этом первый слой кода (черные метки) предлагается сгруппировать в сектора размером 4 на 4 точки, чтобы гарантированно получить хотя бы одну черную точку для кодирования ее во втором слое. Таким образом, мы можем закодировать основную информацию при помощи *DataMatrix*, не выделяя дополнительного пространства для служебной (контрольной) информации, которая помещается на второй слой.

## 7. Экспериментальный комплекс

Для тестирования и отладки различных способов кодирования двумерных кодов, а также организации коллективного взаимодействия роботов между собой был разработан специальный робототехнический комплекс. Конструкция мобильных

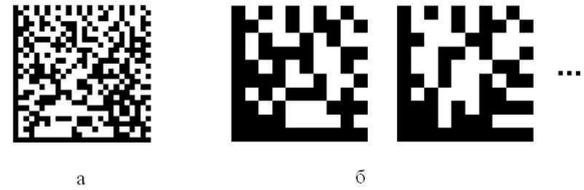


Рис. 1. Пример статического и динамического кодов: а) *DM*-код (классика); б) *DM*-код (поделен на кадры)

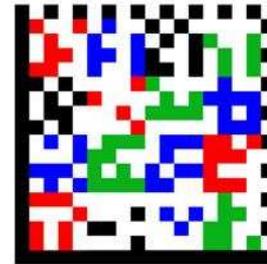


Рис. 2. Цветной двумерный код на основе *DataMatrix*

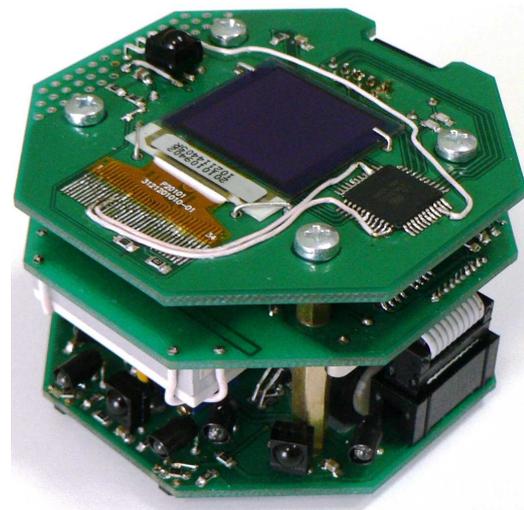


Рис. 3. Мобильная платформа

роботов экспериментального комплекса была спроектирована по модульному принципу (рис. 3), что позволяет расширить круг задач, которые можно решать на данном комплексе. Каждый модуль фиксируется четырьмя металлическими стойками, которые обеспечивают жесткость конструкции и надежно фиксируют модули друг над другом. Электрическое соединение между модулями реализуется шлейфами с электрическими разъемами, а универсальный протокол обмена между модулями позволяет подключать их в различной последовательности.

Такой подход позволяет изменять характеристики робота в широких диапазонах, что делает их удобными и практичными для использования в научно-исследовательских целях.

Для индикации цветных двумерных кодов используются полноцветные *OLED*-дисплеи (*Organic Light Emitting Device*) – индикаторы на основе органических светоизлучающих кристаллов. *OLED*-дисплеи, по сравнению с ЖК-дисплеями, обладают низким уровнем энергопотребления, высокой яркостью и контрастностью изображения, не требуют дополнительной подсветки и имеют широкий угол обзора (до 160–180 градусов как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости) без заметных искажений цветопередачи. Все это облегчает обнаружение цветного маркера системой технического зрения даже в зашумленной окружающей обстановке.

## 8. Заключение

Предлагаемые способ организации канала обратной связи и архитектура системы управления позволяют увеличить скорость генерации управляющих воздействий, ускорить прием и обработку информации за счет одновременной передачи данных о состоянии коллектива по оптическому каналу; принимать решения в режиме реального времени и своевременно реагировать на изменения ситуации.

## Список литературы

- [1] Даринцев О.В., Алексеев А.Ю. Использование технологий виртуализации при построении полунатурного робототехнического комплекса // Мавлютовские чтения: Росс. науч.-техн. конф.: сб. трудов в 5 т. Том 5. Уфа: УГАТУ, 2011. С. 81–85.
- [2] AIM International Technical Specification – International Symbology Specification – Data Matrix / Note: Approved 1997-05-08.
- [3] Крис Касперски. Могущество кодов Рида–Соломона или информация, воскресшая из пепла. URL: [http://www.insidepro.com/kk/027/027r.shtml#\\_ftn3](http://www.insidepro.com/kk/027/027r.shtml#_ftn3).
- [4] Алексеев А.Ю. Особенности кодирования информации модуля оптической передачи данных мобильного робота // Мавлютовские чтения: сб. тр. в 5 т. Том 3. Уфа: УГАТУ, 2011. С. 150–151.

# Влияние агрегатного состояния дисперсной фазы на гидродинамические и реологические свойства эмульсий и суспензий<sup>1</sup>

Ахметов А.Т.<sup>\*,\*\*</sup>, Валиев А.А.<sup>\*,\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,

<sup>\*\*</sup>Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», БашГУ, Уфа

Изучены особенности течения эмульсий и суспензий с тождественным составом, полученных путем замораживания дисперсной фазы, через цилиндрический микроканал и их реологические свойства. Проведен термический анализ дисперсий на дифференциальном сканирующем калориметре.

## 1. Введение

На традиционный вопрос, каково различие в реологических свойствах дисперсий с дисперсной средой из жидких капелек и из твердых шариков с одинаковой структурой, нам представляется возможным ответить, если капли, в нашем случае водные, заморозить. При условии, что несущая фаза при переходе через 0° С никаких скачкообразных изменений не претерпевает.

Массовая концентрация дисперсии при фазовых переходах остается неизменной. Однако структурный состав и реологические свойства в большей степени определяются объемными соотношениями, которые при фазовых переходах претерпевают небольшие изменения.

Проведенный анализ температур фазовых переходов на дифференциальном сканирующем калориметре показал, что полученные пики близки к температурам плавления составляющих компонент. Сравнительное изучение реологических свойств с помощью ротационного вискозиметра Thermo scientific Haake Mars III с использованием системы двойной конус показало небольшое различие в свойствах дисперсии при фазовом переходе. Эффект динамического записания эмульсий состоит в том, что течение эмульсии, несмотря на постоянно действующий перепад давления на участке микро-

канала, со временем практически прекращается. В случае суспензий этот эффект оказывается не таким значительным.

## 2. Экспериментальная аппаратура и методика измерений

Эмульсия (В/М) с составом дистиллированная вода — 40% и углеводородная фаза: декан — 51% с эмульгатором Span 80 — 9%, использовалась в гидродинамических экспериментах. При замораживании она превращалась в суспензию, гидродинамические свойства которой изменялись при отрицательных температурах. Было приготовлено примерно 50 мл эмульсии в стеклянном сосуде, радиус которого чуть больше радиуса мешающих лопастей мешалки, время заливки воды по каплям в раствор углеводородной фазы — 5 минут при 600 об/мин, время перемешивания эмульсии — 15 мин при 1100 об/мин. Приготовленная эмульсия статически стабильна, водная фаза начинает оседать в первые 2 часа, но коалесценция не проявляется. По истечении двух суток выделение водной фазы в виде заметных коалесцировавших капелек начинает проявляться. Для получения микрофотографии эмульсии была использована ячейка из предметного и покровного стекол с зазором 60 мкм. Для получения микрофотографии использовался моторизованный инвертированный металлографический микроскоп Axio Observer Z1m фирмы Carl Zeiss. На микрофотографиях эмульсии наблюдается наличие микрокапель с диаметрами в диапазоне 1–10 мкм (рис. 1).

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040), а также Программы фундаментальных исследований ОЭМПУ «Механика неоднородных жидкостей в полях внешних сил», гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-834.2012.1.

Реологические измерения проводились с системой двойной конус на ротационном реометре Thermo Scientific HAAKE MARS III с элементом охлаждения на основе эффекта Пельтье в диапазоне температур  $-8 \div +25^\circ \text{C}$ . В качестве гидравлической системы для гидродинамических исследований дисперсий использовался стеклянный капилляр внутренним диаметром 100 мкм, внешним диаметром 1,5 мм и длиной 2 см и подводящие дисперсию и воду полиэтиленовые трубки. Давление обеспечивалось газом из ресивера воздушного компрессора, перепад фиксировался по манометру. На выходе из микроканала дисперсия вытесняла воду в отводящей трубке, которая поступала в стакан с водой, покрытый слоем масла на границе раздела с воздухом для исключения испарения воды. Изменение массы на высокочувствительных весах фиксировалось на компьютере и соответствовало объему протекшей через капилляр дисперсии. Для того чтобы установить температуру замерзания микрокапель воды в эмульсии и теплофизическое поведение компонент дисперсии, мы воспользовались высокочувствительным термическим анализатором дифференциальным сканирующим калориметром (ДСК) Diamond DSC фирмы PerkinElmer. При измерениях использовались два тигля с крышками, в один из тиглей была помещена исследуемая дисперсия в количестве 17 мг — 40% эмульсия и 11,4 мг — углеводородная фаза, другой тигель — пустой — использовался как эталонный. Измерения проводились при скоростях понижения и повышения температуры  $10^\circ \text{C}/\text{мин}$ . Приведем температуры фазовых переходов первого рода компонент эмульсии: декан —  $-27,9^\circ \text{C}$ , Span 80 —  $-16,1^\circ \text{C}$ , дистиллированная Вода —  $0^\circ \text{C}$ . При понижении температуры углеводородная фаза, как видно на термограмме (рис. 2), дает пики сдвинутые по отношению к температуре застывания Span 80 на  $12^\circ \text{C}$  к температуре застывания декана на  $15^\circ \text{C}$ . При охлаждении эмульсии температуры застывания воды и декана сдвинуты приблизительно на  $12^\circ \text{C}$ , застывание Span 80 на  $7^\circ \text{C}$ .

Уменьшение степени переохлаждения Span 80 связано с неоднородностью концентраций Span 80 в объеме и у поверхности капель и влиянием замерзания воды. Термограмма, снятая при повышении температуры для углеводородной фазы, дает пики при температурах близких к температурам плавления ее компонент. В случае эмульсии более раннее плавление декана связано с уменьшением его количества в объеме. Пик плавления льда пришелся на  $3^\circ \text{C}$ , такой сдвиг по всей видимости связан с большой теплотой фазового перехода льда при достаточно быстром темпе нагревания. По всей види-

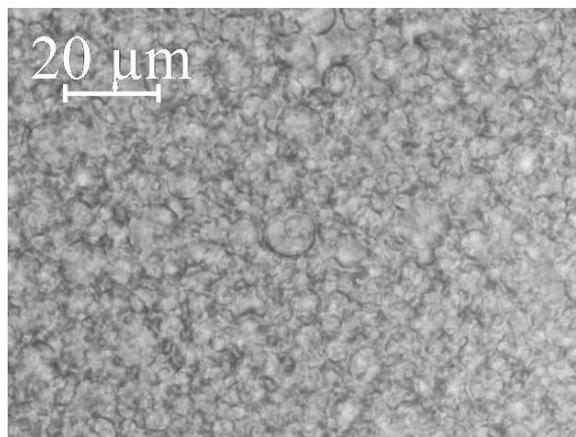


Рис. 1. Микрофотография эмульсии ВМ

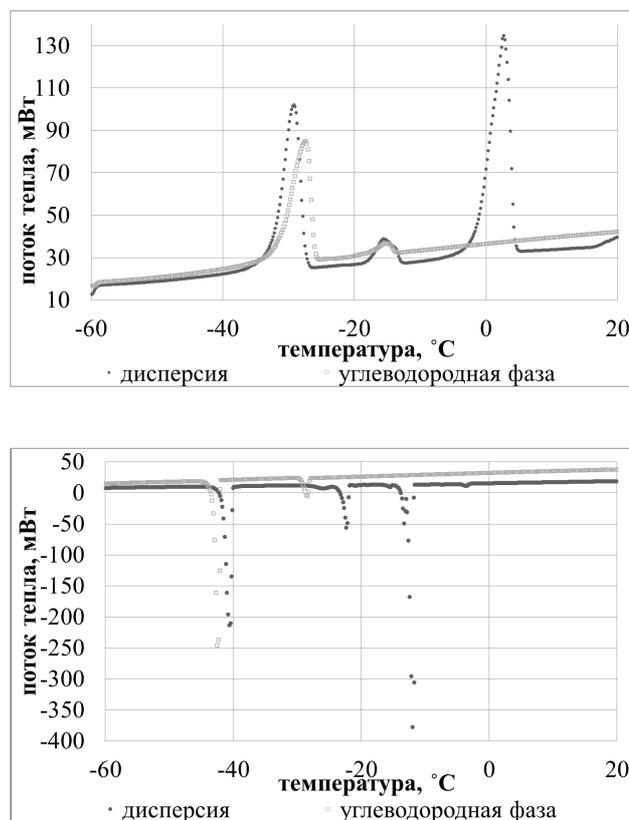


Рис. 2. Термограмма ДСК при понижении температуры (вверху) и повышении температуры (внизу)

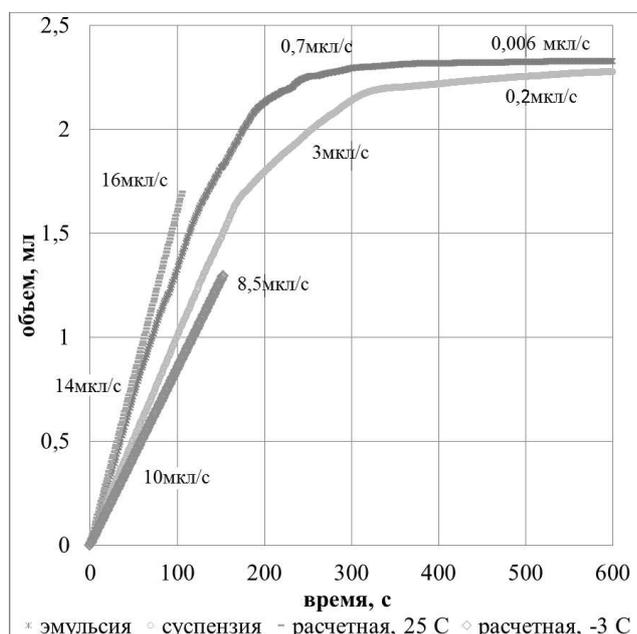


Рис. 3. Зависимость объема эмульсии и суспензии, протекающих через цилиндрический микроканал ( $d = 100$  мкм,  $l = 2$  см) от времени, при постоянном перепаде давления 200 кПа

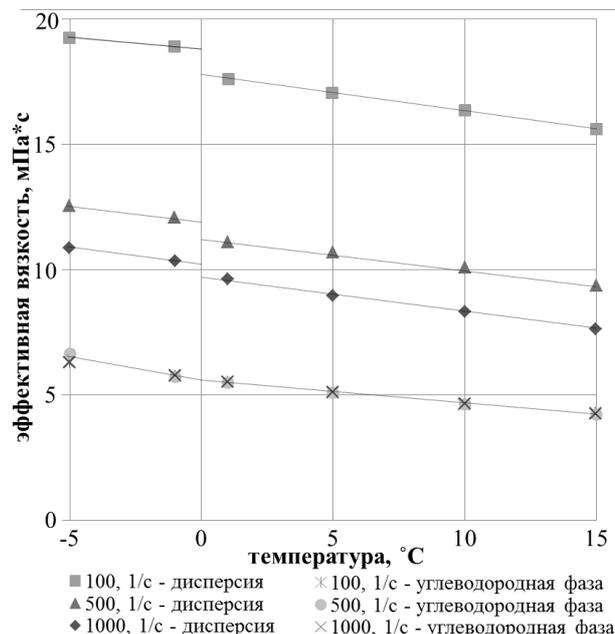


Рис. 4. Зависимость эффективной вязкости от температуры при скорости деформации сдвига  $100 \text{ с}^{-1}$  для дисперсии и углеводородной фазы)

мости, при квазиравновесных, медленных темпах нагревания и охлаждения дисперсии температура плавления и замерзания дисперсной фазы близка к  $0^\circ \text{C}$ .

### 3. Полученные результаты и их обсуждение

При течении через цилиндрический микроканал эмульсии и суспензии с тождественным составом, проявляются некоторые отличия. Величина расхода эмульсии в 1,5 раза выше расхода суспензии (рис. 3), это обусловлено тем, что с понижением температуры вязкость дисперсии увеличивается (рис. 4). Рассчитанные по модели Освальда де Ваала расходы на основе данных реологических измерений для коэффициентов консистентности и показателя степени [1] различаются еще больше, как показано на рисунке.

В качестве основного отличия следует отметить различие в состоянии «запирания», после 400-ой секунды течение эмульсии практически прекращается, в случае суспензии расход на 1,5 порядка больше и он вполне ощутим. Это связано с тем, что в отличие от легко деформируемых капель эмульсии, сферические льдинки суспензии сохраняют свою форму, поэтому происходит фильтра-

ция несущей фазы через упаковку твердых частиц. Подобный эффект по закиранию суспензии обсуждался в работах [2, 3] и объяснялся образованием арочных структур в капиллярных каналах. В случае эмульсии динамическое закирание интерпретируется проявлением трения между каплями воды, их деформацией и, в связи с этим, образованием структур [4] более плотных, по сравнению с суспензией. Результаты реологических измерений как эмульсии, так и суспензии на ротационном вискозиметре с большой достоверностью, аппроксимируются степенной функцией  $\tau = k \cdot \dot{\gamma}^n$ . Реологическое поведение изученных дисперсий соответствует модели жидкости Освальда де Ваала. По сравнению с вязкостью несущей фазы (рис. 4) аппроксимация зависимости эффективной вязкости дисперсии от температуры к  $0^\circ \text{C}$  претерпевает небольшой скачок, по всей видимости, связанный с закреплением молекул ПАВ на оболочках льдинок.

### 4. Заключение

Сравнительный анализ особенностей течения эмульсии и тождественной ей суспензии через микроканал показал, что степень закирания эмульсии на 1,5 порядка выше, это обусловлено более плотной упаковкой микрокапель воды за счет их деформации при значительных градиентах давления.

Установлено:

- данные реологических измерений эмульсии и тождественной ей суспензии с большой степенью достоверности аппроксимируются моделью жидкости Оствальда де Ваале;
- аппроксимационные зависимости эффективной вязкости эмульсии и суспензии от температуры к  $0^{\circ}\text{C}$  претерпевает небольшой скачок, который связан с изменением условий обтекания несущей фазой жидкой и твердой поверхностей.

Авторы выражают благодарность сотрудникам Института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН Ю.А. Лебедеву и М.В. Хазимуллину за методическую помощь при проведении микросъемок дисперсий с использованием оборудования РЦКП Агидель (УНЦ РАН).

### Список литературы

- [1] А.Т. Ахметов, М.В. Мавлетов, А.А. Валиев. Динамическое запирание и реология дисперсий при фазовом переходе // Труды ИМех УНЦ РАН, 2011, Уфа. Вып. 8. С. 74–88.
- [2] Sharp V. Kendra, Adrian J. Ronald. Shear-induced arching of particle-laden flows in microtubes // CD-ROM Proceedings of 2001 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 11–16, 2001, New York.
- [3] Yamaguchi Eiichiro, Adrian J. Ronald Theoretical and Experimental Study of Microchannel Blockage Phenomena // XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM04). Abstracts and CD-ROM Proceedings. Published by IPPT PAN. Warsaw, Poland, August 15–21, 2004. 445 P.
- [4] Alfir Akhmetov, Marat Mavletov, Artur Rakhimov, Sergey Sametov, Iskander S. Akhatov. Water-hydrocarbon emulsion flow in microchannels // Proceedings of ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2011 November 11–17, 2011, Denver, Colorado, USA, P. 1–8.

# Синхронизация гидродинамических и ориентационной мод при электроконвекции в нематическом жидком кристалле<sup>1</sup>

Батыршин Э.С., Делев В.А.

Институт физики молекул и кристаллов УНЦ РАН, Уфа

Экспериментально исследована пространственно-временная динамика осциллирующей электроконвективной структуры в нематическом жидком кристалле при совместном воздействии переменного и постоянного напряжений. Обнаружено, что увеличение постоянной составляющей напряжения приводит к синхронизации гидродинамических мод с ориентационной твист модой директора. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что синхронизация связана с действием флексоэлектрического механизма.

## 1. Введение

Электроконвекция в нематических жидких кристаллах (НЖК) является уникальной модельной средой для изучения универсальных аспектов образования и эволюции пространственно-временного порядка в неравновесных системах различной природы [1, 2]. НЖК представляют собой анизотропную жидкость, характеризующуюся ориентационным упорядочением молекул удлинённой формы. Преимущественное направление ориентации молекул НЖК описывается полем директора  $\mathbf{n}$  [3]. Электроконвективная неустойчивость возникает при приложении к слою НЖК, заключённому между проводящими подложками, напряжения, превышающего некоторое критическое значение. При этом в пороге образуется периодическая система полос, представляющих собой пространственно-периодическую модуляцию поля директора и скорости течения НЖК (электроконвективные роллы). Непрерывная активность в исследованиях электроконвективных структур обусловлена необходимостью изучения возможных механизмов самоорганизации в сложных анизотропных системах. Относительная простота изменения контрольных параметров (амплитуда и частота приложенного напряжения), малые времена релаксации и высокий оптический контраст возникающих структур вследствие оптической анизотропии НЖК дают весомые преимущества при экспериментальных исследованиях электроконвекции по сравнению с другими системами.

Стандартная модель электроконвекции [3, 4] базируется на представлениях Карра [5] и Хельфриха [6] об электроконвективном механизме в анизотропных жидкостях. В рамках этой модели были рассчитаны пороговые характеристики неустойчивостей, имеющие хорошее совпадение с экспериментальными результатами. Сценарий неустойчивости определяется знаками анизотропии диэлектрической проницаемости  $\epsilon_a$  и проводимости  $\sigma_a$  и исходным распределением поля директора [7, 8]. Обнаружение режима так называемой «нестандартной» электроконвекции в НЖК с  $\sigma_a < 0$  [8–10], при котором конвективный механизм Карра–Хельфриха не работает, инициировало дальнейшее развитие теоретических моделей. Нестандартная электроконвекция получила свое объяснение в рамках модели, учитывающей вклад флексополяризации [11, 12], и дающей хорошее количественное согласие с экспериментальными пороговыми характеристиками. Существенное влияние флексополяризации на электроконвекцию было продемонстрировано ранее также и для НЖК с  $\sigma_a > 0$  [13, 14].

В отличие от порога образования электроконвективных роллов, который к настоящему времени достаточно детально исследован экспериментально и теоретически, поведение системы в закритической области гораздо менее изучено. Характерной особенностью электроконвекции в НЖК выше порога образования конвективных роллов является большое многообразие вторичных неустойчивостей и сценариев эволюции неравновесных структур, обусловленное различными нелинейными взаимодействиями гидродинамических и ориентацион-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке АН РБ (грант № 3.3.5.2-2011).

ных мод. Одним из наиболее важных механизмов, определяющих развитие вторичных неустойчивостей в закритической области, является возбуждение однородной (в плоскости слоя) твист моды директора [15, 16]. Кроме того, взаимодействие твист моды с конвективными модами роллов в переменном электрическом поле может приводить к развитию локальных осцилляций между двумя вырожденными состояниями наклонных роллов (так называемых «зиг» и «заг» роллов) [16]. Динамика таких осцилляций представляет собой типичные картины пространственно-временного хаоса [17].

При воздействии постоянного электрического поля развитие электроконвекции в закритической области может приводить к формированию двумерной структуры, представляющей собой суперпозицию зиг и заг роллов [18, 19]. Потеря устойчивости такой структуры также ведет к развитию зиг–заг осцилляций. Их отличительной особенностью является фазовая синхронизация, проявляющаяся в генерации фазовых волн: бегущих, спиральных и концентрических [20, 21]. Ранее были описаны некоторые свойства зиг–заг осцилляций в постоянном электрическом поле [22–24], однако механизм их возникновения остается практически не изученным.

В данной работе изучался режим развитых зиг–заг осцилляций при электроконвекции в планарном слое НЖК. Для исследования роли твист моды и выявления механизма пространственно-временной синхронизации зиг–заг осцилляций использовалось комбинированное воздействие переменного и постоянного напряжений на слой НЖК.

## 2. Методика эксперимента

Ячейка представляла собой плоский конденсатор с прозрачными стеклянными обкладками, на внутреннюю поверхность которых был нанесен проводящий слой  $\text{SnO}_2$ . Механическое натирание подложек обеспечивало планарную ориентацию директора ( $\mathbf{n}_0 \parallel \hat{\mathbf{x}}$ ), которая контролировалась методом вращения кристалла. Ячейка, заполненная МББА (ТСІ Europe), помещалась в термокамеру Instec и располагалась на столике поляризационного оптического микроскопа Zeiss Axio Imager. Толщина слоя НЖК, определенная интерферометрическим методом, составляла  $d = (25 \pm 0.3)$  мкм. Исследования проводились при температуре  $T = (28 \pm 0.05)$  °С. Интенсивность прошедшего через ячейку света регистрировалась ССD-камерой PCO VX44 в плоскости слоя ( $x - y$ ) размером  $0.9 \text{ мм} \times 0.9 \text{ мм}$  с пространственным разрешением  $512 \times 512$  точек, частотой выборки 25 Гц и 256 уровням серого цвета. Полученные изображения обрабатывались на ком-

пьютере. Применялась схема наблюдений, чувствительная к твист деформации директора: поляризатор перпендикулярен начальной ориентации  $\mathbf{n}_0$ , анализатор параллелен  $\mathbf{n}_0$ , между ячейкой НЖК и анализатором установлена фазовая пластинка  $\lambda/4$  под углом  $45^\circ$  к  $\mathbf{n}_0$  [25]. К ячейке прикладывалось переменное напряжение прямоугольной формы со смещенным положением среднего значения

$$U = U_{ac} \text{sign}[\sin(\omega t)] + U_{dc}.$$

В качестве источника напряжения использовался цифро-аналоговый преобразователь L-card-1250, сопряженный с усилителем Tabor-9200. Частота переменного напряжения  $\omega/2\pi = 20$  Гц соответствовала режиму проводимости. Для каждой комбинации  $U_{ac}$ ,  $U_{dc}$  регистрировались последовательности изображений  $I_0(x, y, t)$  длиной 1024 кадра. Каждое изображение последовательности нормировалось на фоновое, полученное при нулевом приложенном напряжении:

$$I(x, y, t) = I_0(x, y, t)/I_{BG}(x, y).$$

Полученные таким образом последовательности изображений подвергались пространственной демодуляции для оценки амплитуд активных мод: гидродинамических зиг, заг мод  $A_{zig}(x, y, t)$ ,  $A_{zag}(x, y, t)$  и ориентационной твист моды директора  $A_{tw}(x, y, t)$ . Техника демодуляции детально описана в работах [26, 27]. После демодуляции для каждой моды была восстановлена фаза осцилляций  $\phi_{zig}(x, y, t)$ ,  $\phi_{zag}(x, y, t)$ ,  $\phi_{tw}(x, y, t)$ . Для этого был использован метод, основанный на применении вейвлет-преобразования [27, 28].

## 3. Результаты и обсуждение

При воздействии переменного напряжения с амплитудой  $U_{ac} = 6 \text{ В}$  ( $U_{dc} = 0$ ) в слое МББА наблюдается электроконвективная неустойчивость в виде хорошо известных «нормальных» роллов (ориентированы перпендикулярно начальной ориентации директора  $\mathbf{n}_0$ ). С увеличением приложенного переменного напряжения наблюдается следующая последовательность переходов: зиг–заг неустойчивость, сопровождающаяся образованием наклонных роллов  $\rightarrow$  переход к «анормальным» роллам  $\rightarrow$  «варикозная» неустойчивость. Данный сценарий переходов был предсказан в рамках расширенного нелинейного анализа стандартной модели электрогидродинамики НЖК, учитывающего активацию однородной твист моды [15, 16].

Дальнейшее увеличение напряжения приводит к возникновению в системе двумерной зиг–заг структуры и при  $U_{ac} = 8.5 \text{ В}$  наблюдаются разви-

тые зиг-заг осцилляции (рис. 1(а), слева). На изображениях рис. 1(а) хорошо видны наклонные полосы, соответствующие зиг и заг роллам. Кроме того, различимы крупномасштабные светлые и темные области, соответствующие разным знакам однородной твист моды директора.

В исследованиях поведения системы при комбинированном воздействии переменного и постоянного напряжений изменения  $U_{ac}$  и  $U_{dc}$  производились таким образом, чтобы среднеквадратичное напряжение  $U_{rms} = \sqrt{U_{ac}^2 + U_{dc}^2}$  оставалось неизменным. При  $U_{rms} = 8.5$  В, что соответствует режиму развитых зиг-заг осцилляций при воздействии переменного напряжения, увеличение постоянной составляющей  $U_{dc}$  выше некоторого порогового значения приводит к существенному изменению картины осцилляций (рис. 1(а), справа). Размеры областей, занятых роллами одного типа (зиг или заг) значительно увеличиваются, что явно отражается в изменении характерных пространственных масштабов демодулированных амплитуд мод (рис. 1(б-г)). Было установлено, что с ростом пространственной упорядоченности в системе наступает частотная синхронизация осцилляций. Результаты изучения пространственно-временных корреляций при увеличении  $U_{dc}$  детально представлены в работе [29], где показано, что при превышении некоторого порога  $U_{dc}^{sync} \approx 3.2$  В длины корреляций в системе увеличиваются на порядок.

Более того, сравнение изображений структуры на рис. 1(а) показывает, что при  $U_{dc} = 0$  в области однородного твиста одного знака могут существовать роллы как зиг, так и заг типа, что говорит о слабой корреляции локальной динамики конвективных мод роллов и однородной твист моды директора. При  $U_{dc} = 4$  В в областях с твист модой одного знака существуют роллы только одного типа, что говорит о синхронном поведении конвективных мод роллов и однородной твист моды. Осцилляции упорядочиваются в плоскости структуры и происходит генерация фазовых волн, аналогично ситуации, наблюдавшейся при воздействии только постоянного напряжения [20]. Для количественного описания синхронизации активных мод был вычислен стандартный параметр синхронизации [30]:

$$r_{zig,zag} e^{i\psi_{zig,zag}} = \left\langle e^{i[\phi_{zig}(x,y,t) - \phi_{zag}(x,y,t)]} \right\rangle_{x,y,t},$$

где  $\langle \dots \rangle_{x,y,t}$  означает усреднение по пространству и времени. Аналогичным образом был определен параметр синхронизации для других пар мод. Параметр  $r = 1$ , когда моды осциллируют с постоянным сдвигом фаз, который определяется параметром  $\psi$ . В обратном случае, когда разность фаз между модами меняется равномерно от 0 до  $2\pi$ ,

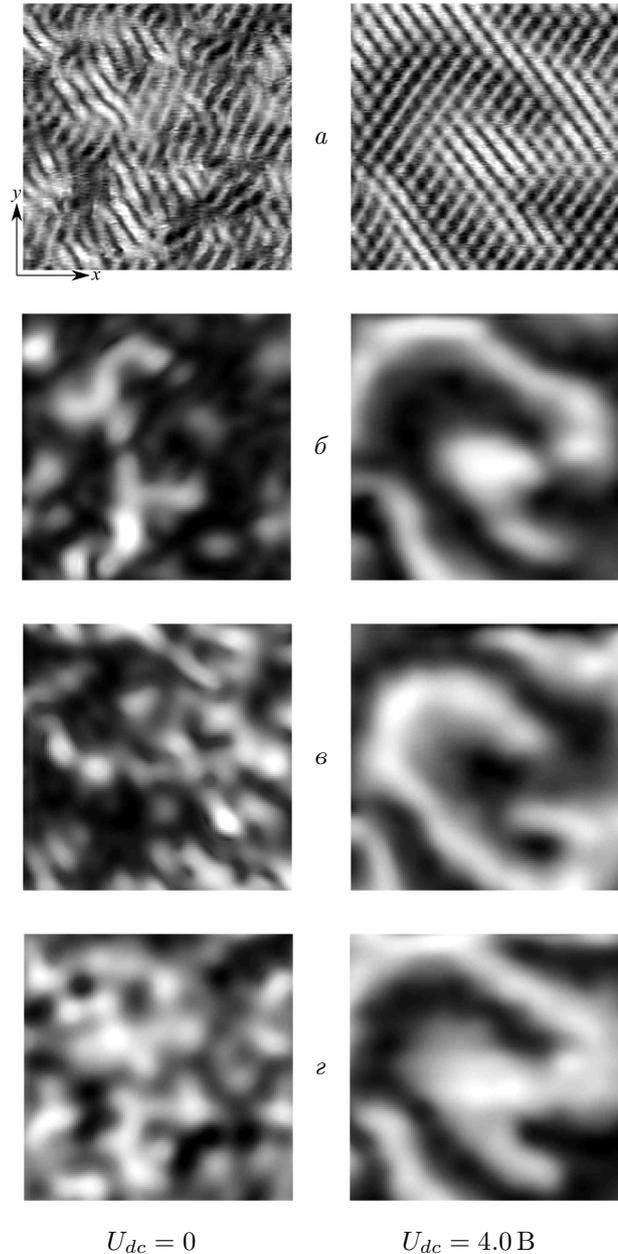


Рис. 1. Характерные картины электроконвекции (а) и соответствующие им демодулированные амплитуды зиг (б), заг (в) и твист (г) мод при различных значениях  $U_{dc}$ . Размер показанных структур  $0.45 \text{ мм} \times 0.45 \text{ мм}$ ,  $U_{rms} = 8.5$  В. Более светлые области соответствуют большей амплитуде

$r = 0$ . На рис. 2 показана зависимость параметров синхронизации и сдвига фаз мод при изменении постоянной составляющей напряжения  $U_{dc}$ . При действии только переменного напряжения ( $U_{dc} = 0$ ) гидродинамические зиг, заг моды осциллируют в противофазе ( $\psi_{zig,zag} \approx \pi$ ), а фаза твист моды занимает некоторое промежуточное положение. Ди-

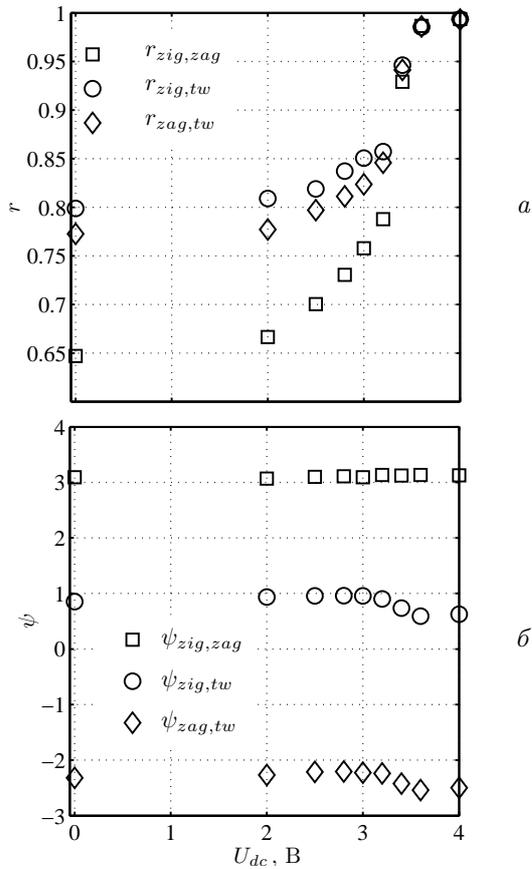


Рис. 2. Параметр синхронизации мод (а) и сдвиг фаз между ними (б) при различных значениях постоянной составляющей напряжения  $U_{dc}$

намика мод не синхронизирована полностью, т.к.  $r < 1$ . При этом величина синхронизации зиг и заг мод между собой меньше величины их синхронизации с твист модой, что подтверждает теоретические представления о том, что связь между зиг и заг модами опосредована через твист моду [16]. Увеличение постоянной составляющей  $U_{dc} > U_{dc}^{sync} \approx 3.2$  В приводит к росту коэффициента синхронизации до значения  $r = 1$ , т.е. локальная динамика мод становится полностью синхронизированной с постоянным сдвигом фаз. Осцилляции гидродинамических мод также противофазны, а фаза твист моды немного изменяется при том же пороговом значении  $U_{dc}$ .

#### 4. Заключение

Таким образом, при увеличении постоянной составляющей в приложенном к слою НЖК переменном напряжении, обнаружен эффект фазовой синхронизации локальной динамики гидродинамических мод и однородной твист моды директора в ос-

циллирующей электроконвективной структуре. Тот факт, что синхронизация в системе возникает только при наличии постоянной составляющей в приложенном переменном напряжении, позволяет предположить, что ее механизм обусловлен флексополяризацией.

С теоретической точки зрения усредненный за период переменного поля флексоэлектрический момент сил, действующий на директор, равен нулю при  $U_{dc} = 0$ , поскольку флексоэлектрический отклик в НЖК линеен по полю [3]. Наличие же постоянной компоненты  $U_{dc} \neq 0$  в приложенном к слою НЖК напряжении должно приводить к дополнительной статической твист деформации поля директора [11,12]. Предварительный симметричный анализ уравнений динамики НЖК показывает, что флексоэффект, развивающийся на фоне зиг-заг осцилляций электроконвективных роллов, в свою очередь, обеспечивает синхронизацию между твист модой определенного знака и одним из типов зиг-заг роллов.

В пользу флексоэлектрического механизма синхронизации свидетельствует также тот факт, что при воздействии только постоянного напряжения  $U_{dc} \approx U_{dc}^{sync}$  ( $U_{ac} = 0$ ) в изучаемой системе наблюдаются продольные домены, ориентированные преимущественно вдоль исходной ориентации директора. Установлено, что при изменении толщины слоя НЖК (в интервале от 15 мкм до 70 мкм) пороговое напряжение образования доменов не изменяется, а период растет линейно с толщиной. Перечисленные свойства указывают на то, что обнаруженные продольные домены являются флексоэлектрическими [12,31]. Для дальнейшего изучения механизма синхронизации и роли флексоэффекта необходимо провести нелинейный анализ уравнений электрогидродинамики НЖК с учетом флексополяризации. Другим важным аспектом исследований является выяснение роли синхронизации конвективных мод с однородной твист модой в процессе генерации фазовых волн.

#### Список литературы

- [1] M. Cross and H. Greenside, Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems, Cambridge University Press, 2009.
- [2] Pattern Formation in Liquid Crystals, edited by А. Buka and L. Kramer, Springer, New York, 1996.
- [3] П. де Жен. Физика жидких кристаллов «МИР», Москва, 1977. (P. G. de Gennes, The Physics of Liquid Crystals, Clarendon Press, Oxford, 1974.)
- [4] E. Bodenschatz, W. Zimmermann, and L. Kramer, J. Phys. (France) 49, 1875 (1988).

- [5] E.F. Carr, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 7, 253 (1969).
- [6] W. Helfrich, *J. Chem. Phys.* 51, 4092 (1969).
- [7] Á. Buka, N. Éber, W. Pesch, and L. Kramer, in *Self Assembly, Pattern Formation and Growth Phenomena in Nano-Systems*, edited by A. A. Golovin and A. A. Nepomnyashchy (Springer, Dordrecht, 2006) p. 55.
- [8] Á. Buka, N. Éber, W. Pesch, and L. Kramer, *Phys. Rep.* 448, 115 (2007).
- [9] E. Kochowska, S. Németh, G. Pelzl, and Á. Buka, *Phys. Rev. E* 70, 011711 (2004).
- [10] D. Wiant, J. T. Gleeson, N. Éber, K. Fodor-Csorba, A. Jákli, and T. Tóth-Katona, *Phys. Rev. E* 72, 041712 (2005).
- [11] A. Krekhov, W. Pesch, N. Éber, T. Tóth-Katona, and Á. Buka, *Phys. Rev. E* 77, 021705 (2008).
- [12] A. Krekhov, W. Pesch, and Á. Buka, *Phys. Rev. E* 83, 051706 (2011).
- [13] T. Tóth-Katona, N. Éber, Á. Buka, and A. Krekhov, *Phys. Rev. E* 78, 036306 (2008).
- [14] M. May, W. Schöpf, I. Rehberg, A. Krekhov, and Á. Buka, *Phys. Rev. E* 78, 046215 (2008).
- [15] E. Plaut, W. Decker, A. G. Rossberg, L. Kramer, W. Pesch, A. Belaidi, and R. Ribotta, *Phys. Rev. Lett.* 79, 2367 (1997).
- [16] E. Plaut and W. Pesch, *Phys. Rev. E* 59, 1747 (1999).
- [17] M. Dennin, *Phys. Rev. E* 62, 6780 (2000).
- [18] S. Hirata and T. Tako, *Jap. J. Appl. Phys.* 20, L459 (1981).
- [19] А. Н. Чувывров, В. Г. Чигринов, *ЖЭТФ* 87, 177 (1984).
- [20] V. A. Delev, O. A. Scaldin, and A. N. Chuvyrov, *Liq. Cryst.* 12, 441 (1992).
- [21] В. А. Делев, О. А. Скалдин, А. Н. Чувывров, *Кристаллография* 37, 1575 (1992).
- [22] Э. С. Батыршин, В. А. Делев, А. Н. Чувывров, *Кристаллография* 44, 548 (1999).
- [23] V. A. Delev, E. S. Batyrshin, O. A. Scaldin, and A. N. Chuvyrov, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 329, 499 (1999).
- [24] В. А. Делев, О. А. Скалдин, Э. С. Батыршин, Е. Г. Аксельрод, *ЖТФ* 81, 11 (2011).
- [25] H. Amm, R. Stannarius, and A. G. Rossberg, *Physica D* 126, 171 (1999).
- [26] Dennin M., Cannell D.S. and Ahlers G., *Phys. Rev. E* 57, 638 (1998).
- [27] Батыршин Э. С., Дисс. к.ф.-м.н., Уфа (2012).
- [28] J.-P. Lachaux, E. Rodriguez, J. Martinerie and F. J. Varela, *Human Brain Mapping* 8, 194 (1999).
- [29] Э. С. Батыршин, А. П. Крехов, О. А. Скалдин and В. А. Делев, *ЖЭТФ* 141, 1200 (2012).
- [30] А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс Синхронизация. Фундаментальной нелинейное явление, «Техносфера», Москва, 2003.
- [31] Ю. П. Бобылев, С. А. Пикин, *ЖЭТФ* 72, 369 (1977).

# Особенности построения информационной системы многозвенного манипулятора с учетом специфики среды<sup>1</sup>

Богданов Д.Р.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В статье рассматриваются особенности построения звена манипулятора на базе кинематически связанных дисков со сферической поверхностью, требования к его системе управления. Описана реализация информационно-измерительной системы манипулятора. Представлены предварительные результаты, полученные в ходе экспериментов.

## 1. Введение

Манипуляторы являются важной и, часто, самой сложной частью промышленных робототехнических систем. Именно возможности манипулятора определяют, в основном, функциональность промышленных роботов: региональную и локальную области рабочей зоны [1], способность работать с различными предметами и веществами, грузоподъемность, точность доставки объекта и т.д. Манипуляторы традиционных промышленных роботов имеют, как правило, минимальное количество степеней свободы (до 6) и используются, в основном, в условиях организованной среды. Они имеют жесткие кинематические связи и обеспечивают необходимую точность позиционирования в рабочей области. Как правило, манипулятор делят на два кинематических участка: кисть с захватом и саму руку. Кинематика руки определяет размеры и форму ее рабочего пространства. Возможные структурные кинематические схемы руки промышленных манипуляторов на сегодняшний день классифицированы и описаны в литературе [1].

Когда среда не организована или частично не организована, возникает вопрос адаптации к среде, что требует, зачастую, избыточных и «необычных» степеней подвижности манипулятора (например, движение по узкому каналу с изменяющимся направлением). Такая задача, например, может возникнуть при покраске внутренних поверхностей кузовов автомобилей или контроле внутренних полостей объекта с заранее неизвестной конфигура-

цией. В таких случаях традиционные манипуляторы не годятся в силу жесткой структуры и недостаточного количества степеней свободы. Неопределенность среды функционирования, таким образом, является одним из источников многообразия и непрерывного процесса создания новых манипуляторов. Кроме того, манипуляторы часто являются рабочим органом мобильных роботов (наземных, подводных, космических), выполняющих разнообразные задачи, некоторые из которых могут быть заранее не определены. Одними из представителей таких манипуляторов являются манипуляторы типа «хобот». Известны различные реализации такого типа манипуляторов [1–3].

## 2. Постановка задачи

В данной статье рассматривается звено многозвенного манипулятора (МЗМ) [4–6], имеющего 2 степени свободы, и построенного на базе дисков со сферической поверхностью. Движение и положение дисков друг относительно друга обеспечивается перемещением и натяжением 4 тросов, пропущенных сквозь отверстия в дисках. Тросы приводятся в движение 4-мя электрическими приводами. Количество дисков может быть различным и определяет размеры и форму рабочего пространства звена и требования к параметрам приводов.

Кинематическая схема манипулятора в одной плоскости представлена на рис. 1.

Как видно из кинематической схемы положение конечной точки (или точки схвата) звена определяется расположением дисков друг относительно друга, которое, в свою очередь, определяется со-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-00567-а).

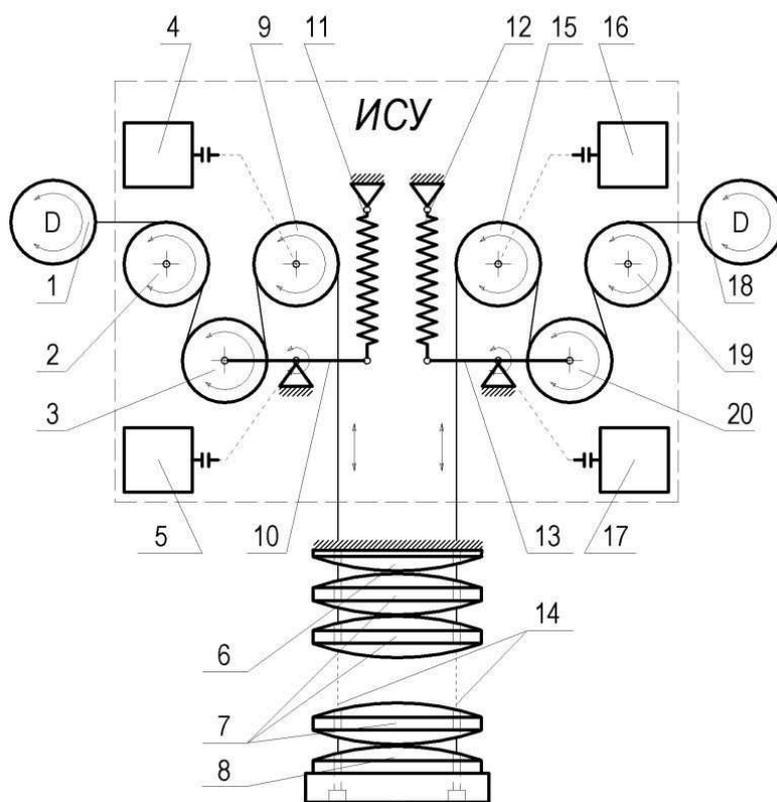


Рис. 1. Кинематическая схема МЗМ в одной плоскости: 1, 18 — двигатели постоянного тока для перемещения тросов; 2, 9, 15, 19 — направляющие ролики; 3, 20 — натяжные ролики; 10, 13 — коромысло; 11, 12 — пружины растяжения; 6 — первый опорный элемент звена МЗМ; 7 — промежуточные диски; 8 — последний элемент звена МЗМ; 5, 17 — энкодеры абсолютного типа; 4, 16 — энкодеры инкрементного типа; 14 — тросы

вокупностью длин каждого из тросов. Длина парно противоположных тросов должна изменяться с разным знаком при движении в любой квадрант области перемещения, за исключением случая движения звена строго по оси какого-либо из тросов. В этом случае изменение длин поперечно расположенных тросов сонаправлено. Также необходимо, чтобы система приводов манипулятора обеспечивала одинаковое натяжение всех тросов, причем так, чтобы сила реакции опоры в точках контакта звеньев гарантировала отсутствие проскальзывания (достаточную величину силы трения). Данное требование обеспечивается синхронностью перемещения тросов. Вышеизложенное позволяет отнести такое звено к кинематически связанному типу звеньев. А это, в свою очередь, определяет количество степеней свободы звена. Несмотря на то, что количество дисков  $N$  определяют  $2 \times N$  степеней свободы, кинематическая связанность дисков ограничивает степень свободы звена числом 2. Еще одной особенностью являются упругие свойства зве-

на, обусловленные натяжением тросов и деформацией дисков в точке контакта [1]. Отсюда возникают повышенные требования к системе управления манипулятором с такими звеньями и к информационной ее части, в частности, по сравнению с манипулятором с кинематически развязанными жесткими звеньями.

Рассмотрим обобщенную структурную схему манипулятора (рис. 2).

На вход информационно-измерительной системы манипулятора поступает информация двух типов:

- данные о состоянии манипулятора и силовых приводов, необходимые для решения задач управления и обеспечения синхронности перемещения тросов;

- данные об окружающей среде и рабочей зоне, необходимые для уточнения текущего положения манипулятора в пространстве и выполнения заданных операций (задачи планирования).

В данной работе рассматривается вопрос полу-

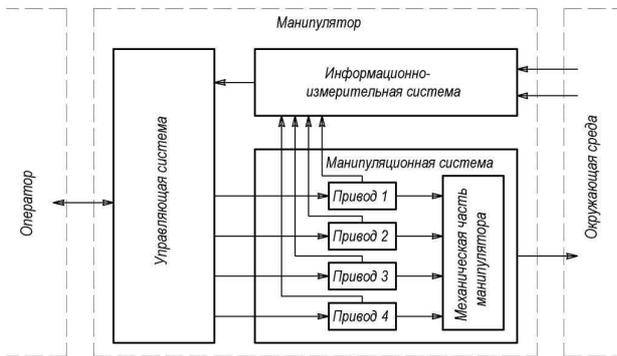


Рис. 2. Обобщенная структура манипулятора

чения информации первого типа, ее обработки, на основе которой решаются базовые задачи управления одним звеном, состоящим из известного количества дисков.

### 3. Решение задачи

Для решения поставленной задачи был спроектирован и изготовлен информационно-силовой узел (ИСУ) манипулятора, который входит в состав лабораторного макета и выполняет следующие функции:

- контроль перемещения и натяжения тросов;
- компенсация неравномерностей перемещения тросов, вызванных разбросом характеристик приводов и элементов манипулятора, упругими свойствами тросов, погрешностями измерительной и управляющей систем;
- адаптация манипулятора к возмущениям со стороны внешней среды за счет использования более полной и комплексной обработки информации с датчиков натяжения тросов.

Работа ИСУ видна из кинематической схемы (рис. 1). Работа каждого из каналов идентична, поэтому достаточно рассмотреть работу узла на примере одного канала. Ролики 2 и 9 играют роль направляющих для троса. Оси роликов установлены на подшипники качения. На ось ролика 9 установлен оптический энкодер 4 инкрементного типа (ЭИ) (16384 импульсов/оборот), позволяющий измерить поворот оси ролика и соответственно перемещение  $L$  троса с дискретностью 4,41 мкм:

$$L = R \cdot a = R \cdot N \cdot W,$$

где  $R$  — радиус ролика, мм;  $a$  — угол поворота ролика, рад;  $N$  — количество импульсов с энкодера;  $W$  — цена деления одного импульса, рад/имп (характеристика энкодера).

Натяжной ролик 3 через ось и подшипник установлен на консоль коромысла 10, второй конец ко-

торого через пружину растяжения 11 фиксируется к корпусу ИСУ. При натяжении троса ось коромысла, установленного на подшипник качения, поворачивается и поворачивает сочлененную с ним ось энкодера абсолютного типа 5, при этом на его выходе формируется цифровой код пропорциональный натяжению троса с дискретностью  $d = 2 \cdot \pi / 16384$ . Таким образом, реализуется функция измерения натяжения троса.

Диапазон поворота коромысла ограничивается с помощью концевых выключателей, построенных на базе датчиков Холла и магнитов из редкоземельных материалов (на рис. 1 не показаны). Датчики Холла установлены на корпусе ИСУ. Магнит крепится на торце коромысла со стороны оси натяжного ролика.

Количественный расчет характеристик пружин (длина, жесткость) датчиков в данной статье не рассматривается, приведем лишь соображения, в соответствии с которыми выбираются пружины. Пружины подбираются таким образом, чтобы коромысло находилось в нижнем крайнем рабочем положении, когда тросы звена МЗМ максимально отпущены, но при этом верхнее звено манипулятора сомкнуто с опорным звеном 6 МЗМ. Нижние концевые выключатели на всех приводах при этом должны находиться в выключенном состоянии, сигнализируя таким образом о том, что тросы манипулятора находятся в достаточном натяжении. Баланс натяжений тросов друг относительно друга регулируется по показаниям с энкодеров на оси коромысел.

Если какой-то из тросов будет ослаблен, вес манипулятора распределится на оставшихся тросах, и коромысла на этих осях повернутся, натягивая соответствующие пружины. Коромысло ослабленного троса в этом случае будет находиться в крайнем нижнем положении, и концевой выключатель сработает, сигнализируя о выходе натяжения троса за рабочий диапазон.

Если верхний диск звена манипулятора разомкнут с опорным элементом звена, тогда, при равномерной нагрузке дисков на тросы, все нижние концевые выключатели включатся, сигнализируя о граничном состоянии МЗМ системе управления. Если натяжение тросов будет неравномерным, тогда часть этих датчиков может быть включена, часть выключена (это зависит от жесткости пружины). Таким образом, рабочим состоянием манипулятора является выключенное состояние всех нижних концевых выключателей. Эта информация в купе с данными о натяжении тросов используется для базирования манипулятора. Далее, по мере натягивания тросов возможно срабатывание верхних кон-

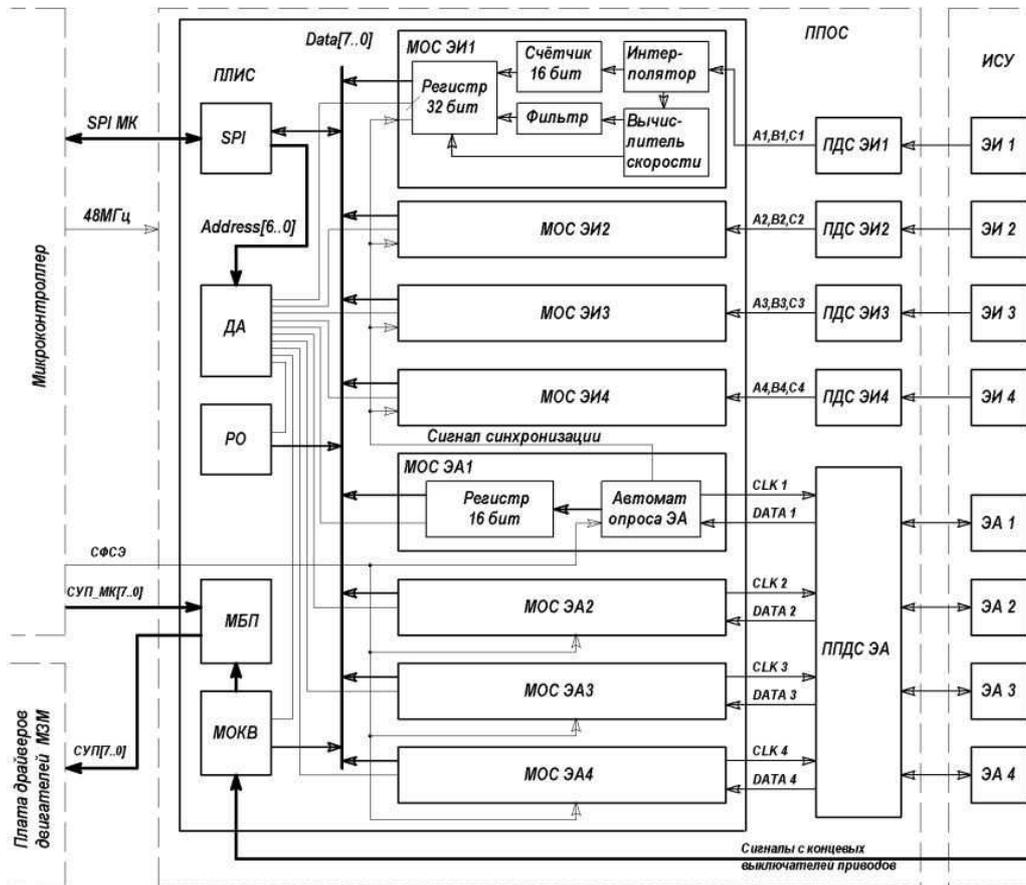


Рис. 3. Схема предварительной обработки

цевых датчиков, по сигналам с которых привод перемещения соответствующего троса выключается, предотвращая таким образом чрезмерное натяжение троса и повреждение механических частей системы. Приводы также отключаются и при срабатывании нижних концевых датчиков, чтобы исключить излишнее разматывание тросов и предотвратить их выпадение из пазов направляющих роликов.

На выбор пружин также влияет количество дисков, так как это определяет общую массу звена, и жесткость пружин должна быть достаточной, чтобы обеспечить работу звена в крайних верхних положениях рабочей точки, где нагрузка на пружины максимальная, чтобы не вызвать ограничивающее срабатывание верхних концевых выключателей по натяжению троса.

Сигналы с энкодеров и концевых выключателей ИСУ поступают на схему предварительной обработки сигналов с энкодеров (ППОС) (рис. 3).

Рассмотрим работу данного модуля. Дифференциальные сигналы с энкодеров инкрементного

типа через приемники дифференциальных сигналов (ПДСЭИ1–ПДСЭИ4) поступают на входы модулей обработки сигналов с энкодера инкрементного типа (МОС ЭИ), входящих в состав схемы, реализованной на базе программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС).

В МОС ЭИ производятся следующие операции:

- выделение из фронтов квадратурных (сдвинутых друг относительно друга на 90 град) сигналов А и В счетных импульсов и формирование сигнала направления счета. Далее эти сигналы поступают на 16-ти разрядный счетчик;
- обработка нулевого (реперного) сигнала С, которая заключается в инкременте или декременте содержимого счетчика, в зависимости от направления движения оси энкодера, на значение  $N_{оборот}$  (количество импульсов на один оборот энкодера);
- вычисление скоростей перемещения тросов;
- перезапись содержимого счетчика в буферный регистр по синхронизирующему импульсу, поступающему с модуля обработки сигналов энкодеров абсолютного типа (МОС ЭА).

Так как вычисление скоростей перемещения тросов, необходимое для осуществления расчетных движений манипулятора, отнимает достаточно много вычислительных ресурсов у микроконтроллера, данная функция была реализована аппаратно в структуре ПЛИС. Аппаратная реализация позволила решить эту задачу в параллельном виде для всех 4-х координат, освобождая вычислительные ресурсы микропроцессора. Также аппаратно была реализована фильтрация (усреднение) данных о скорости за несколько периодов опроса, чтобы обеспечить более гладкое управление двигателем на малых скоростях.

Схема приема данных с энкодеров абсолютного типа (ЭА) работает следующим образом. Дифференциальные сигналы с энкодеров абсолютного типа через приемники-передатчики дифференциальных сигналов (ППДСЭА1–ППДСЭА4) поступают на входы модулей обработки сигналов с энкодера абсолютного типа (МОС ЭА), также реализованных в структуре ПЛИС. При поступлении периодического сигнала фиксации состояния энкодеров (СФСЭ) с микроконтроллера, автомат опроса ЭА формирует последовательность  $N + 1$  импульсов ( $N$  – разрядность энкодера). Содержание внутреннего содержимого счетчика энкодера фиксируется в выходном регистре энкодера первым спадающим фронтом последовательности импульсов. На каждый последующий импульс энкодер выдает содержимое выходного регистра в последовательном коде, начиная со старшего разряда, которые через ППДС ЭА поступают на регистр сдвига, формируя параллельный код значения ЭА.

Для того чтобы значения с энкодеров инкрементного типа и абсолютного типа снимались одновременно, в автомате МОС ЭА по сигналу, который фиксирует значение ЭА, формируется синхронизирующий сигнал для фиксации значений ЭИ. Таким образом, происходит одновременное считывание данных с энкодеров ИСУ и параллельная первичная обработка сигналов в ППОС по синхроимпульсу, поступающему с микроконтроллера. Это позволяет обеспечить требуемую синхронность в системе управления двигателями. После расчета необходимых значений скорости вращения двигателей производится одномоментная загрузка новых значений ШИМ в микроконтроллер, пропорциональных скорости приводов Р.

Управляющим сигналом для приводов служит ШИМ сигнал, поступающий с силовых драйверов. Сигнал формируется ПИД-регулятором, реализованным на базе микроконтроллера. Для определения параметров ПИД-регулятора необходимо знать точные характеристики привода как объек-

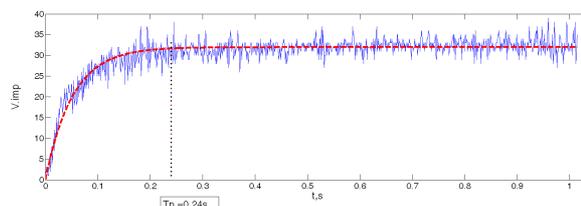


Рис. 4. Переходная характеристика привода (без датчика натяжения)

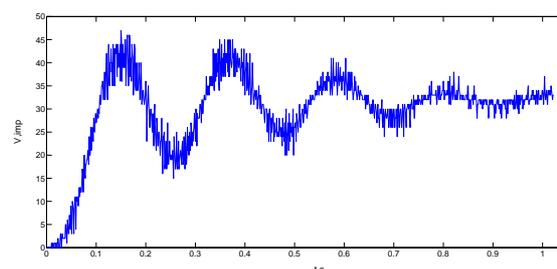


Рис. 5. Переходная характеристика привода (с датчиком натяжения)

та управления. Аналитический расчет параметров привода является достаточно сложной задачей и возможен лишь при наличии точной модели, поэтому разумной альтернативой является снятие характеристик объекта экспериментально. Для этого на трос выбранной оси подвешивался груз, имитирующий максимальную нагрузку во время работы манипулятора. Затем на двигатель подавалось управляющее воздействие с максимальным рабочим значением (в данном случае сигнал с максимальным значением ШИМ) и снимались данные с энкодера о скорости перемещения троса. Временной интервал эксперимента выбирался из условия, чтобы скорость достигала максимально возможного значения при данном входном воздействии на привод. Результаты экспериментов для одного привода представлены на рис. 4 и 5. На рис. 4 показан случай, когда из кинематической схемы ИСУ исключен датчик натяжения. Полученная переходная характеристика является типичной для двигателя постоянного тока. На рис. 5 отображен случай с датчиком натяжения в составе ИСУ.

Видно, что переходный процесс характеризуется высокой колебательностью со слабой степенью затухания. Очевидно необходим выбор пружины с большим коэффициентом жесткости.

Чувствительность построенной информационной системы достаточно высока: на полученных графиках ярко выражены шумы, вызванные неравномерностью укладки тросов, биением осей валов

двигателя, шестерен редуктора и других воздействий на исполнительную манипуляционную систему, общий вклад которых в ошибку отработки входного воздействия составляет несколько процентов.

#### 4. Заключение

На основе разработанной архитектуры информационной системы и полученных в ходе экспериментов предварительных данных можно сделать вывод о том, что запланированные далее работы по уточнению модели приводов, кинематических моделей манипулятора и синтезу системы управления вполне осуществимы. Характер переходных процессов, изменение в широком диапазоне параметров ПИД-регулятора приводов требуют разработки специализированной методики синтеза интеллектуального контура параметрической коррекции в системе управления. Для снижения вычислительной нагрузки на микропроцессор управления приводами проводятся работы по переносу большей части алгоритмов предварительной обработки данных в структуру ПЛИС.

#### Список литературы

- [1] Теоретические основы робототехники. В 2 кн./ А.И. Корендясов, Б.Л.Саламандра, Л.И. Тывес;

Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Кн. 1. М.: Наука, 2006.

- [2] <http://roboslavie.su/2010/10/zmeepodobnyye-roboty-robot-spine>.
- [3] <http://www.ibcsol.ru/xobot-slona-dlya-zadach-pickaplace.html>.
- [4] Даринцев О.В., Богданов Д.Р. Система сбора и обработки информации для многозвенного манипулятора // Мат-лы 4-й Всерос. мультikonф. по проблемам управления. Т.2. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. 2011. С. 204–206.
- [5] Даринцев О.В., Богданов Д.Р. Интеллектуальная подсистема обратной связи многозвенного манипулятора // Искусственный интеллект. Интеллектуальные системы (ИИ-2011): материалы Междунар. науч.-техн. конфер. Донецк: ИПШ «Наука і Освіта». 2011. С. 218–222.
- [6] Даринцев О.В., Богданов Д.Р. Разработка информационной подсистемы многозвенного манипулятора на базе ПЛИС // «Динамика научных исследований– 2011», материалы VII междунар. научно-практ. конф., т. 20 «Технические науки. Физика». Пржемысль, Nauka i studia. 2011. С. 50–56.

# Усиление и гашение волн конечной длительности посредством пузырьковой области в одномерном приближении<sup>1</sup>

Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Изучаются некоторые особенности динамики волн давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны конечных размеров в одномерном приближении. Задача рассматривается с учетом нелинейных эффектов. Представлены результаты воздействия волновых импульсов на пузырьковую область с неравномерным распределением пузырьков, а также воздействия на твердую стенку, покрытую пузырьковой завесой.

## 1. Введение

К настоящему времени имеется ряд работ, посвященных исследованиям одномерных волн в пузырьковых жидкостях, которые описаны в [1, 2]. В данной работе рассмотрена эволюция одномерных волн давления в жидкости с пузырьками газа, а именно случай, плоского удара по жидкости, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров с неравномерным распределением пузырьков по длине завесы. Также численно смоделировано ударно-волновое воздействие на твердую стенку, покрытую пузырьковой завесой.

## 2. Постановка задачи

Пусть в жидкости находится зона, заполненная смесью жидкости с пузырьками газа, ограниченная в общем случае цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси  $x$ . Рассмотрим волновые возмущения, которые могут инициироваться воздействием на систему граничным давлением (например,  $p = p^0(t)$  при  $x = 0$ ) (рис. 1). На рис. 1 введены следующие обозначения:  $x_z$  — координата, обозначающая положение пузырьковой завесы;  $l_x$  — протяженность завесы;  $L$  — длина канала. Также показано схематическое расположение датчика  $D$ .

Для описания движения в пузырьковой жидкости примем следующие основные допущения: в каждом элементарном объеме все пузырьки сфе-

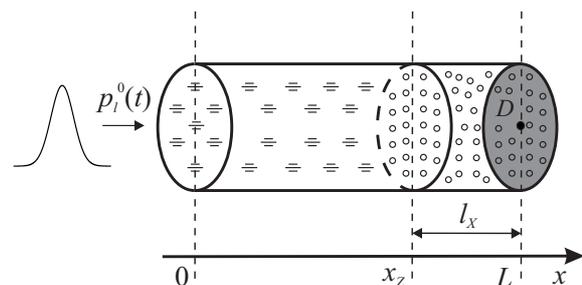


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области с расположением датчиков

рические и одного радиуса, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсации пузырьков, отсутствует дробление и слипание пузырьков. Кроме того, будем рассматривать случай, когда отсутствует массообмен между фазами, а температуру жидкости (в отличие от температуры газа в пузырьках) можно считать постоянной. Для рассматриваемой смеси запишем систему макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков, импульса и давления в пузырьках в односкоростном приближении [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad (i = l, g), \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \\ w &= \frac{da}{dt} \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ \alpha_l + \alpha_g &= 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \\ \rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l, \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фонда фундаментальных исследований ОЭМПИУ РАН (ОЕ-13), Программы фонда фундаментальных исследований Президиума РАН (П-23) и РФФИ (гранты №№ 11-01-97004-р\_поволжье\_a и 11-01-00171-а)

где  $a$  — радиус пузырьков;  $\gamma$  — показатель адиабаты для газа;  $p_i$  — давления фаз;  $\rho_i^0$  — истинные плотности фаз;  $\alpha_i$  — объемные содержания фаз;  $q$  — интенсивность теплообмена;  $n$  — число пузырьков в единице объема;  $w$  — радиальная скорость движения стенки пузырька;  $u$  — скорость движения по координате  $x$ . Нижними индексами  $i = l, g$  отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [3], будем полагать

$$w = w_R + w_A, \quad (2)$$

где  $w_R$  описывается уравнением Рэлея–Ламба

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0}, \quad (3)$$

$\nu_l$  — вязкость жидкости.

Добавка  $w_A$  определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса  $a$  в несущей жидкости в акустическом приближении

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}. \quad (4)$$

Здесь  $C_l$  — скорость звука в «чистой» (без пузырьков) жидкости. Жидкость примем акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным:

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g, \quad (5)$$

где  $R$  — газовая постоянная;  $T_g$  — температура. Здесь и в дальнейшем индексами «0» внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток  $q$  задается приближенным конечным соотношением [1]:

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3, \quad (6)$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100 \\ 10, & \text{Pe} < 100 \end{cases},$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_{pg} \rho_g^0},$$

где  $T_0 = \text{const}$  — температура жидкости;  $\lambda_g$  и  $c_{pg}$  — теплопроводность и теплоемкость газа при постоянном давлении;  $\text{Nu}$  — число Нуссельта.

Принятая система уравнений позволяет адекватно описывать динамику волн с достаточно «крутыми» участками, когда сжатие пузырьков определяется не только эффектами радиальной инерции несущей жидкости, но и акустической разгрузкой на пузырьках, и, следовательно, сжимаемостью

жидкости. Кроме того, из этой математической модели в частном случае при  $\alpha_g = 0$  следует волновое уравнение для акустически сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой зоной это обстоятельство, в свою очередь, позволяет использовать сквозные методы расчета.

### 3. Метод численного исследования

Для численного анализа задачи об эволюции волн в жидкости при наличии в ней пузырьковой зоны удобнее пользоваться системой уравнений, приведенной выше, записанной в лагранжевых переменных. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах пузырьковая зона неподвижна. Из приведенных выше уравнений, после некоторых преобразований, можно получить следующую систему в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_l}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u, \\ \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{C_l^2 \rho_l^0}{1 - \alpha_g} \left[ \frac{3\alpha_g}{a} w + \left( \frac{(1 - \alpha_g)^2}{(1 - \alpha_{g0})} + \alpha_g \right) \frac{\partial u}{\partial s} \right], \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{n}{n_0} \frac{\partial u}{\partial s} \alpha_g, \\ \frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_A + w_R, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}, \\ \frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left[ \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4\nu_l \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $s$  — лагранжева переменная, в качестве которой берется начальное значение эйлеровой координаты ( $s = x_0$ ).

Система (7) решается численно по явной схеме. Причем не требуется вводить искусственную вязкость, поскольку приведенные уравнения из-за учета межфазного теплообмена и акустической разгрузки являются системой с естественной диссипацией [4].

Приведем принцип построения разностной схемы, которая принята для решения данной задачи. Для аппроксимации дифференциальных уравнений используем равномерную шахматную сетку

$$(s_i, t_k), (s_{i+1/2}, t_k),$$

$$s_{i+1} = s_i + h, \quad s_{i+1/2} = s_i + 0,5h,$$

$$s_0 = 0, \quad s_N = M, \quad t_{k+1} = t_k + \tau, \quad t_k = k\tau,$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где  $h$  и  $\tau$  — соответственно шаги по координате и по времени. К узлам сетки  $(s_i, t_k)$  будем относить

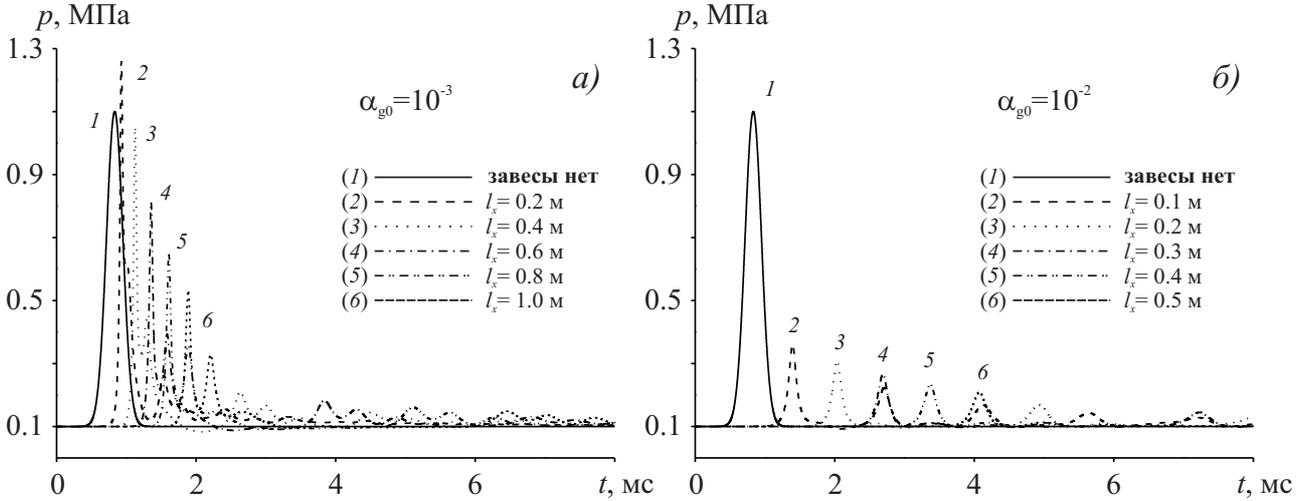


Рис. 2. Показания датчика на твердой стенке по времени при различной протяженности пузырьковой зоны для  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$  (а) и  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  (б)

сеточные функции скорости  $u_i^k$  и эйлеровой переменной  $x_i^k$ , к «полуцелым» точкам  $(s_{i+1/2}, t_k)$  — сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [4].

#### 4. Начальные и граничные условия

##### 4.1. Начальные условия

Начальные условия ( $t = 0$ ) при  $x > 0$ , соответствующие состоянию покоя системы в расчетной области с измерением  $L = h \cdot N$ , запишутся в виде:

$$p = p_0, \quad u = 0, \quad \rho = \rho_0.$$

Для случая области с пузырьковой зоной конечных размеров имеем

$$\alpha_g = \begin{cases} \alpha_{g0}, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases},$$

где  $Q = (x_z < x < x_z + l_x)$ .

##### 4.2. Граничные условия

Граничные условия записываются следующим образом: на границе  $x = L$  — условие непротекания жидкости принимает вид  $u = 0$ . На торцевой границе  $x = 0$  используется условие на поршне давления  $p_l(t) = p_l^0(t)$ .

Отметим, что задание давления на границе  $x = 0$  соответствует разрыву мембраны между камерой высокого давления, заполненной газом, и рабочей камерой, заполненной исследуемой системой.

#### 5. Результаты численных расчетов

В рамках рассмотренной модели исследовалось влияние протяженности пузырьковой области и начального радиуса пузырьков, а также начального объемного содержания пузырьков на степень воздействия импульсного сигнала на твердую стенку. Импульсный сигнал задавался граничным давлением по следующему закону:

$$p_l^0(t) = p_0 + \Delta p_0 \cdot \exp \left[ - \left( \frac{t - t_*/2}{t_*/2} \right)^2 \right],$$

где  $p_0 = 0.1$  МПа — первоначальное давление в расчетной области;  $\Delta p_0 = 0.5$  МПа и  $t_* = 10^{-3}$  с — амплитуда и характерная временная протяженность импульса, соответственно. В рассмотренных задачах импульс «падает» на пузырьковую область, полностью сформировавшись в области «чистой» жидкости ( $C_l \cdot t_* < L$ ).

На рис. 2 представлены расчеты, которые иллюстрируют влияние начального объемного газосодержания в пузырьковой зоне при различных ее протяженностях на степень воздействия импульсного сигнала на твердую стенку, где начальный радиус пузырьков был принят равным  $10^{-3}$  м. Из показаний датчика видно (рис. 2(б)), что для объемного газосодержания  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  присутствие небольшого (относительно пространственной протяженности импульсного сигнала  $C_l \cdot t_* > l_x$ ) участка пузырьковой области непосредственно перед стенкой на пути распространения сигнала в несколько раз уменьшает воздействие на нее. Причем, чем больше протяженность пузырьковой области, тем меньше воздействие на твердую стенку. Для объемного газосодержания  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$

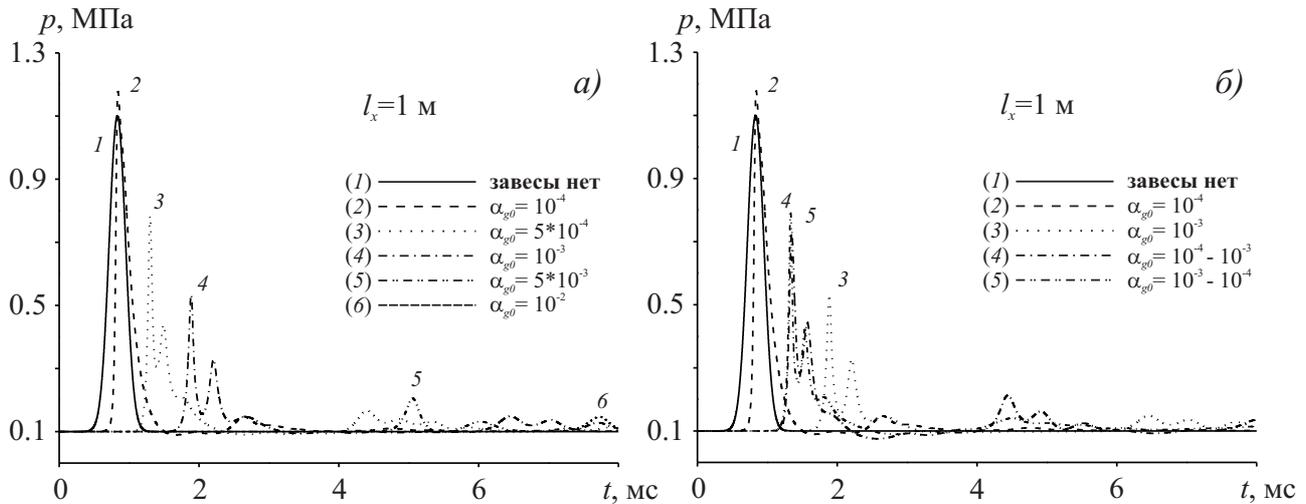


Рис. 3. Показания датчика на твердой стенке по времени при протяженности пузырьковой зоны  $l_x = 1$  м для различных начальных объемных газосодержаний

аналогичная картина уменьшения воздействия на твердую стенку (рис. 2(а)) видна на линиях 3–6, а для линии 2 заметно небольшое увеличение воздействия, примерно в 1 атмосферу. Данное увеличение амплитуды воздействия связано с меньшей разницей в скоростях ударных волн в пузырьковой области и «чистой» жидкости. Для начального объемного газосодержания  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  скорость распространения возмущений  $\sim 110$  м/с, тогда как для  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$  —  $\sim 440$  м/с. Следовательно, для случая (а) импульсное возмущение дальше проходит в пузырьковую область, сохраняя свою первоначальную амплитуду. Заметим, что по своим способностям уменьшения воздействия импульсного возмущения пузырьковая область протяженностью  $l_x = 0.2$  м с начальным объемным газосодержанием  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  (линия 2 на рис. 2(б)) имеет такие же характеристики, как пузырьковая область протяженностью  $l_x = 1.0$  м с начальным объемным газосодержанием  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$  (линия 6 на рис. 2(а)).

На рис. 3 представлены результаты численных расчетов, которые иллюстрируют влияние начального объемного газосодержания в пузырьковой зоне при фиксированной ее протяженности на динамику воздействия импульсного сигнала на твердую стенку. В проведенных расчетах для объемных газосодержаний от  $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-4}$  до  $10^{-2}$  наблюдается уменьшение амплитуды воздействия на твердую стенку по сравнению со случаем отсутствия завесы (рис. 3(а)). Видно, что для случая объемных газосодержаний  $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$  и  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  (линии 5 и 6 на рис. 3(а)) импульс давления «падает» на твердую стенку с амплитудой  $\sim 1$  атм, что делает пузырьковые области с данными характеристиками эффективным инструментом для гашения возму-

щений. Для начального объемного газосодержания  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  мы наблюдаем совершенно иную картину, чем в предыдущих случаях, а, именно, усиление амплитуды падающего сигнала (линия 2 на рис. 3(а)). В данном случае величина скорости распространения возмущений в пузырьковой области сильно зависит не только от сжимаемости пузырьков, но и от сжимаемости самой жидкости. По рисунку видно, что происходит изменение формы переднего фронта волны, что приводит к проявлению радиальной инерции жидкости при сжатии завесы и небольшому увеличению амплитуды сигнала ( $\sim 1$  атм). Также представлены результаты по численному моделированию исходной задачи при неоднородном распределении по длине завесы начального объемного газосодержания (рис. 3(б)). Для рассмотренного диапазона объемных газосодержаний с  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  до  $10^{-3}$  видим, что направление изменения газосодержания по длине завесы не вносит существенной разницы. Это связано с тем, что при переходе от меньшего объемного газосодержания к большему (от  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  к  $10^{-3}$ ) эффект увеличения амплитуды (при  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ ) плавно переходит в эффект гашения (при  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ), и наоборот для противоположного случая.

На рис. 4 представлены результаты численных расчетов, которые иллюстрируют влияние начального радиуса пузырьков в пузырьковой зоне при фиксированной ее протяженности на динамику воздействия импульсного сигнала на твердую стенку. Из показаний датчика на рис. 4(а) можно сделать вывод, что для более крупных пузырьков (линии 1 и 2) амплитуда прошедшего сигнала меньше, чем для более мелких (линии 3–5), но воздействие на стенку начинается раньше. Это может быть свя-

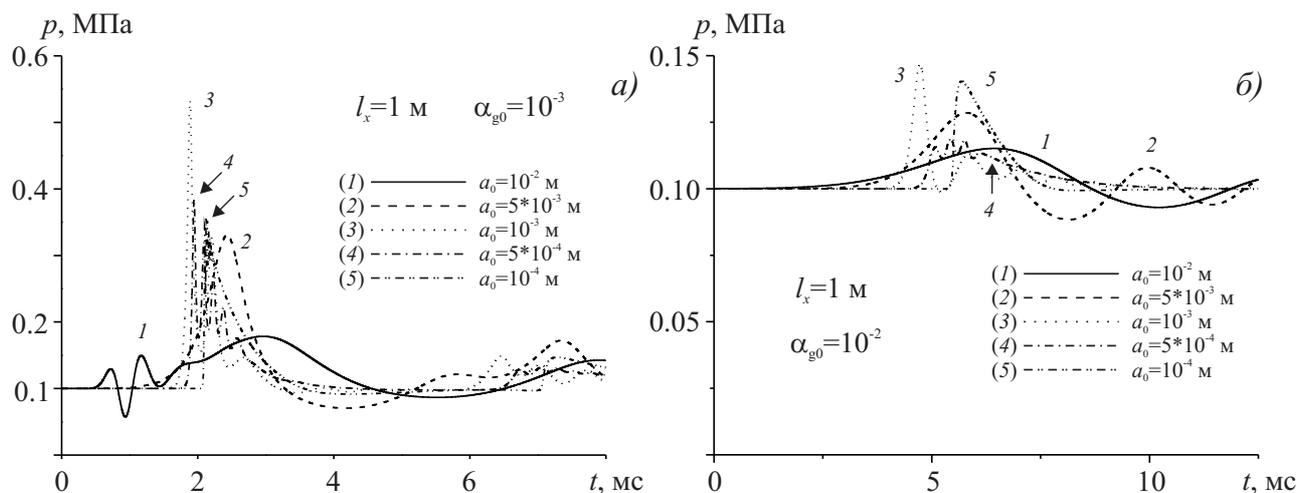


Рис. 4. Показания датчика на твердой стенке по времени при протяженности пузырьковой зоны  $l_x = 1$  м для различных начальных радиусов пузырьков

зано с тем, что в случае крупных пузырьков завеса раньше начинает реагировать на падающий импульс, и за счет инерциального движения пузырьков, часть импульса «доходит» до стенки, при этом теряя большую часть своей амплитуды. Из рис. 4(б) видим, что для объемного газосодержания  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  величина начального радиуса пузырьков несущественно меняет волновую картину, и средняя амплитуда прошедшего волнового сигнала не превышает 5% от первоначальной, но при этом увеличивается время воздействия на стенку.

## 6. Заключение

По результатам численных расчетов установлено, что пузырьковая завеса в пристеночной области может как гасить, так и усиливать амплитуду падающего сигнала. При правильном подборе параметров пузырьковой области (газосодержания, радиуса пузырьков, протяженности) можно практически исключить ударно-волновое воздействие на стенку. Также установлено, что в рассматриваемом диапазоне данных необходимая для гашения волнового сигнала протяженность пузырьковой области определяется начальным объемом газосодержания, например, пузырьковая область протяженностью  $l_x = 0.2$  м с начальным объемным газосодержанием  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  имеет такие же характеристики по гашению сигнала, как пузырьковая область протяженностью  $l_x = 1.0$  м с начальным объемным газосодержанием  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ .

Было установлено, что в рассматриваемом диапазоне объемных газосодержаний от  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  до  $10^{-3}$  направление изменения газосодержания по длине завесы не вносит существенных различий в

динамику волнового сигнала в завесе. Данный результат связан с тем, что при переходе от меньшего объемного газосодержания к большему (от  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  к  $10^{-3}$ ) эффект увеличения амплитуды (при  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ ) плавно переходит в эффект гашения (при  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ), и наоборот для противоположного случая.

## Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с., Ч. 2. 360 с.
- [2] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва. Эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
- [3] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1088.
- [4] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.

## Исследование распространения и затухания волн в пористой среде, содержащей водонефтяную эмульсию<sup>1</sup>

Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Тюмень

В работе исследуется процесс распространения и затухания акустических волн в пористой среде, насыщенной водонефтяной эмульсией. Водонефтяная эмульсия моделируется жидкостью с эффективной вязкостью. Показано, что пористая среда, содержащая водонефтяную эмульсию, характеризуется повышенным затуханием волн по сравнению с водо- или нефтенасыщенной пористой средой.

Актуальность данной задачи обусловлена тем, что при добыче нефти при вытеснении нефти водой в порах нефтяного пласта возможно образование водонефтяной эмульсии. Для повышения нефтеотдачи может применяться метод виброволнового воздействия на пласт и призабойную зону скважин. Для совершенствования технологий виброволнового воздействия необходимо знание закономерностей распространения и затухания волн в пористой среде, насыщенной водонефтяной эмульсией.

Для численного исследования распространения и затухания волн в пористой среде, насыщенной водонефтяной эмульсией, выбрана двухскоростная модель насыщенной пористой среды, в рамках которой эмульсия моделируется как однородная ньютоновская жидкость с эффективной вязкостью.

В работе приняты обычные при исследованиях пористых сред допущения и использованы обозначения монографий [1, 2].

Уравнения сохранения масс и импульсов фаз имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla^l (\rho_f v_f^l) &= 0, & \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla^l (\rho_s v_s^l) &= 0, \\ \rho_f \frac{d v_f^k}{d t} &= -\alpha_f \nabla^k p_f - F^k, \\ \rho_s \frac{d v_s^k}{d t} &= -\alpha_s \nabla^k p_f + \alpha_s \nabla^l \sigma_{s*}^{lk} + F^k, \end{aligned}$$

где  $\rho_i$ ,  $v_i$ ,  $\alpha_i$  — приведенная плотность, скорость, объемное содержание  $i$ -ой фазы,  $i = f, s$ ;  $\sigma_{s*}$ ,  $p_f$  — приведенное напряжение в скелете и давление во флюиде соответственно.

Выражение для межфазной силы имеет вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} F &= F_m + F_\mu + F_B, \\ F_m &= \frac{1}{2} \eta_m \alpha_s \alpha_f \rho_{f0}^\circ \left( \frac{d v_f}{d t} - \frac{d v_s}{d t} \right), \\ F_\mu &= \eta_\mu \alpha_s \alpha_f \mu_f a_*^{-2} (v_f - v_s), \\ F_B &= \eta_B \alpha_s \alpha_f a_*^{-1} \sqrt{2 \rho_{f0}^\circ \mu_f \omega} (1 + i) (v_f - v_s), \end{aligned}$$

где  $\rho_i^\circ$  — истинная плотность;  $a_*$  — характерный размер зерен скелета;  $\mu_f$  — вязкость флюида;  $\eta_m$ ,  $\eta_\mu$  и  $\eta_B$  — безразмерные коэффициенты взаимодействия фаз, зависящие от структуры среды.

Скелет пористой среды предполагается упругим с модулями упругости  $\lambda_{s*}$ ,  $\mu_{s*}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{s*}^{kl} &= \alpha_s (\lambda_{s*} \delta^{kl} \epsilon_s^{mm} + 2 \mu_{s*} \epsilon_s^{kl} + \nu_{s*} \delta^{kl} p_f), \\ \frac{d \epsilon_s^{kl}}{d t} &= \frac{1}{2} (\nabla^k v_s^l + \nabla^l v_s^k), \\ \nu_{s*} &= \frac{\lambda_{s*} + 2/3 \mu_{s*}}{\lambda_s + 2/3 \mu_s}, \end{aligned}$$

где  $\epsilon_s$  — деформации твердой фазы.

Для каждой из фаз примем линейное уравнение состояния в акустическом приближении:

$$\begin{aligned} p_j - p_{j0} &= K_j (\rho_j^\circ - \rho_{j0}^\circ) / \rho_{j0}, & \rho_j &= \alpha_j \rho_j^\circ, \\ j &= f, s, & \alpha_f + \alpha_s &= 1, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН на 2012 г. № 25 «Фундаментальные проблемы механики и смежных наук в изучении многомасштабных процессов в природе и технике»

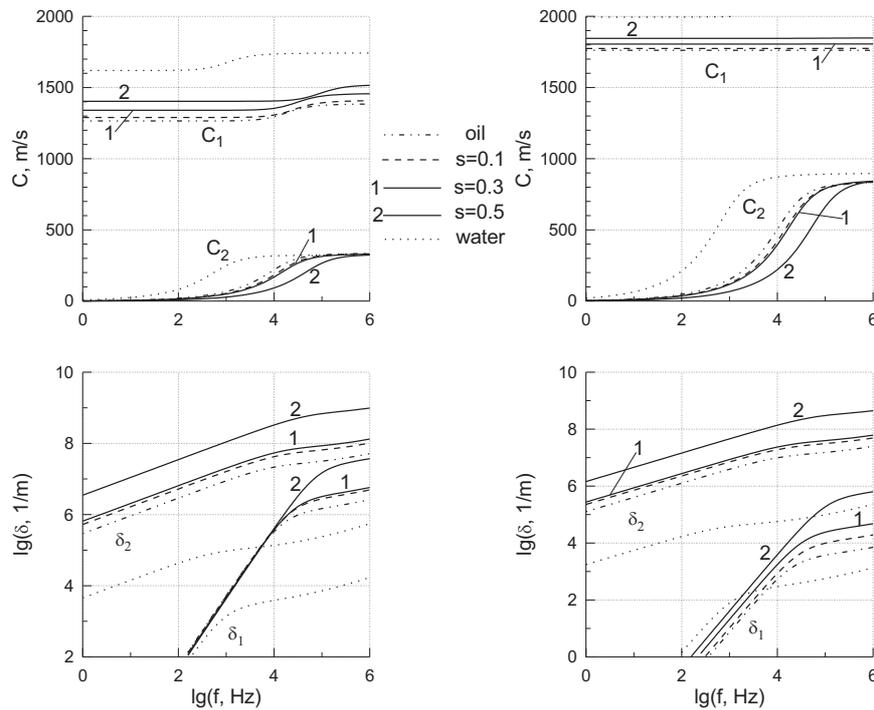


Рис. 1. Фазовые скорости и линейный декремент затухания быстрой и медленной волн в пористой среде, насыщенной водой, нефтью или водонефтяной эмульсией с различным водосодержанием

где нижний индекс «0» означает невозмущенное значение величины;  $K_j$  — объемные модули упругости для материала  $j$ -ой фазы.

Для замыкания системы уравнений используем соотношения между истинными давлениями в фазах и эффективным давлением в скелете

$$p_{s*} = \alpha_s(p_s - p_f), \quad p_{s*} = -\frac{1}{3}\sigma_{s*}^{mm}.$$

Предложенная система уравнений при заданных входящих в нее параметрах  $\lambda_{s*}, \mu_{s*}, \eta_m, \eta_\mu, \eta_V$  является замкнутой и позволяет исследовать волновые процессы во флюидонасыщенных пористых средах.

Для расчетов были использованы параметры нефтей и водонефтяных эмульсий, взятые из экспериментальных данных работы [3]. Нефть или эмульсия моделировались ньютоновской однородной жидкостью с эффективной вязкостью. Параметры нефтей и эмульсий, использованные в расчетах, приведены в табл. 1.

Получены и проанализированы дисперсионные зависимости. Также проанализировано влияние упругих свойств скелета пористой среды, водонасыщенности, температуры на скорость и затухание быстрой (деформационной) и медленной (фильтрационной) волн.

На рис. 1 показаны фазовая скорость и линейный декремент затухания быстрой и медленной волн в пористой среде, насыщенной водой, нефтью или водонефтяной эмульсией с различным водосодержанием. На рисунках слева в расчетах взято  $\lambda_{s*} = \mu_{s*} = 0.2$  ГПа, справа  $\lambda_{s*} = \mu_{s*} = 2$  ГПа. Остальные параметры пористой среды следующие: материал скелета — кварц;  $\rho_s^0 = 2760$  кг/м<sup>3</sup>,

Таблица 1. Параметры нефтей и эмульсий

Вид нефти	$s$	$\rho_f^0$ , кг/м <sup>3</sup>	$\mu_f$ , мПа·с	$K_f$ , ГПа
Тобойское мест., скв.11, $T = 20^\circ\text{C}$	0	837.3	15.96	1.2
	0.1	853.57	24	1.26
	0.3	886.11	28.5	1.39
	0.5	918.65	90	1.56
Тобойское мест., скв.11, $T = 30^\circ\text{C}$	0	837.3	10.148	1.2
	0.1	853.57	14.686	1.26
Тагринское мест., скв.1350, $T = 20^\circ\text{C}$	0	819.1	3.18	1.18
	0.1	837.1	4.29	1.24

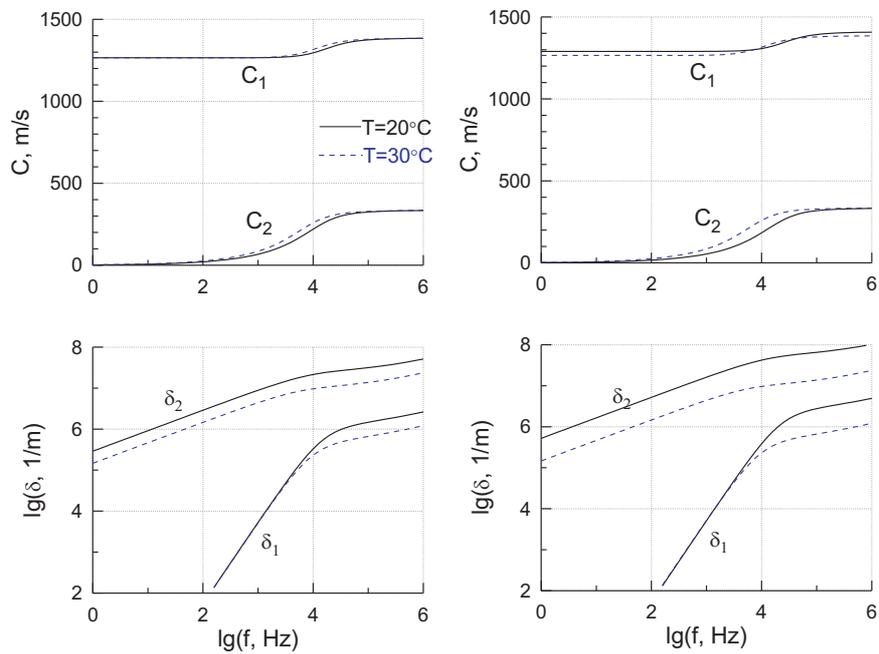


Рис. 2. Фазовые скорости и линейный декремент затухания быстрой и медленной волн в пористой среде, насыщенной нефтью Тобойского месторождения (слева) или водонефтяной эмульсией (справа,  $s = 0.1$ ), при различных значениях температуры ( $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $30^\circ\text{C}$ )

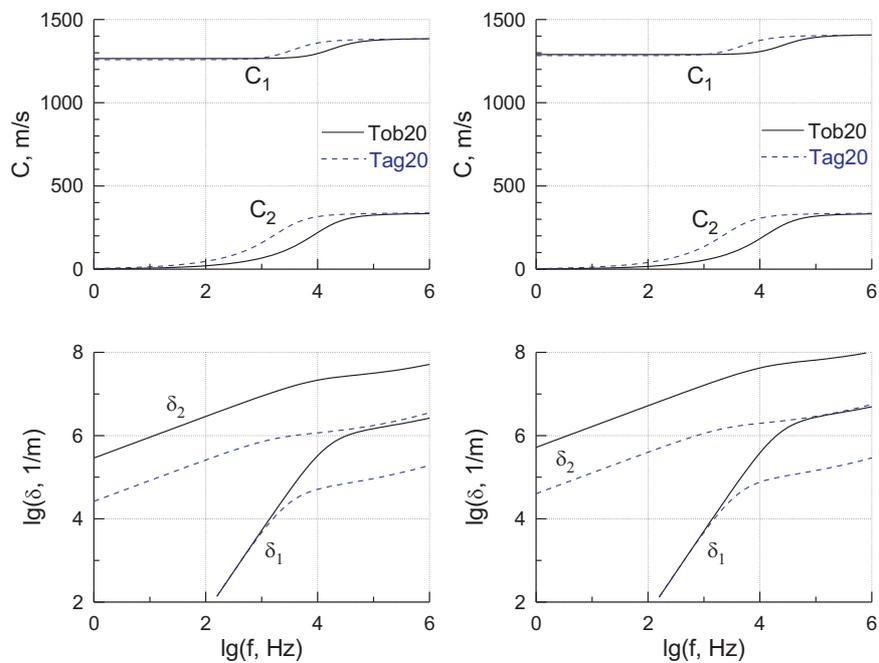


Рис. 3. Фазовые скорости и линейный декремент затухания быстрой и медленной волн в пористой среде, насыщенной нефтями Тобойского (Tob20) и Тагринского (Tag20) месторождений (слева) и эмульсиями из этих же нефтей (справа,  $s = 0.1$ )

$K_s = 36.6$  ГПа;  $\alpha_f = 0.4$ ,  $a_* = 0.1$  мм;  $\eta_m = 1$ ,  $\eta_\mu = 100$ ,  $\eta_B = 1.5$ . Нефть Тобойского месторождения, скважина 11,  $T = 20^\circ\text{C}$ . При увеличении значений упругих модулей скелета  $\lambda_{s*}$ ,  $\mu_{s*}$  возрастают скорости быстрой и медленной волн, а затухание быстрой волны в области высоких частот уменьшается. При увеличении водонасыщенности  $s$  скорость распространения быстрой волны монотонно уменьшается, для медленной волны скорость при насыщении пористой среды эмульсией ниже, чем при насыщении водой или нефтью. На затухание обеих волн влияние водонасыщенности немонотонное, т.е. при насыщении пористой среды эмульсией затухание происходит интенсивнее, чем в насыщенной водой или нефтью пористой среде.

На рис. 2, 3 проиллюстрировано влияние температуры и вида нефти на скорости и затухание волн в пористой среде, насыщенной нефтью или водонефтяной эмульсией. В расчетах использовались значения упругих модулей скелета  $\lambda_{s*} = \mu_{s*} = 0.2$  ГПа, остальные параметры пористой среды те же, что и на рис. 1. На рис. 2 в расчетах использовались параметры нефти и эмульсии Тобойского месторождения при  $s = 0.1$ , а на рис. 3 — нефти и эмульсий Тобойского и Тагринского месторождений при  $T = 20^\circ\text{C}$ . Повышение температуры нефти незначительно изменяет скорость звука, но существенно уменьшает затухание: для быстрой волны — в области высоких частот, а для медленной — во всем рассмотренном частотном диапазоне (рис. 2). В случае насыщения пористой среды более вязкой нефтью или эмульсией (нефть Тобойского месторождения) наблюдается более значительное затухание волн по сравнению с менее вязкой нефтью (Тагринского месторождения) (рис. 3).

Исследовано распространение треугольного импульса в пористой среде, насыщенной водой, нефтью или водонефтяной эмульсией. Расчеты проводились двумя методами: Фурье и Лакса-Вендроффа. Результаты расчетов показали хорошее совпадение. На рис. 4 показано распространение импульса в пористой среде, насыщенной водой, нефтью или водонефтяной эмульсией (нефть Тобойского месторождения,  $T = 20^\circ\text{C}$ ), рассчитанное методом Фурье. Начальный импульс треугольной формы (безразмерная амплитуда равна 1, длительность 1 мс) задается во флюиде (воде, нефти или водонефтяной эмульсии) и проходит в пористую среду, насыщенную тем же флюидом, и имеющую параметры  $\lambda_{s*} = \mu_{s*} = 2$  ГПа, остальные параметры пористой среды те же, что и на рис. 1. Видно, что скорость распространения деформационной волны растет с увеличением водонасыщенности эмульсии.

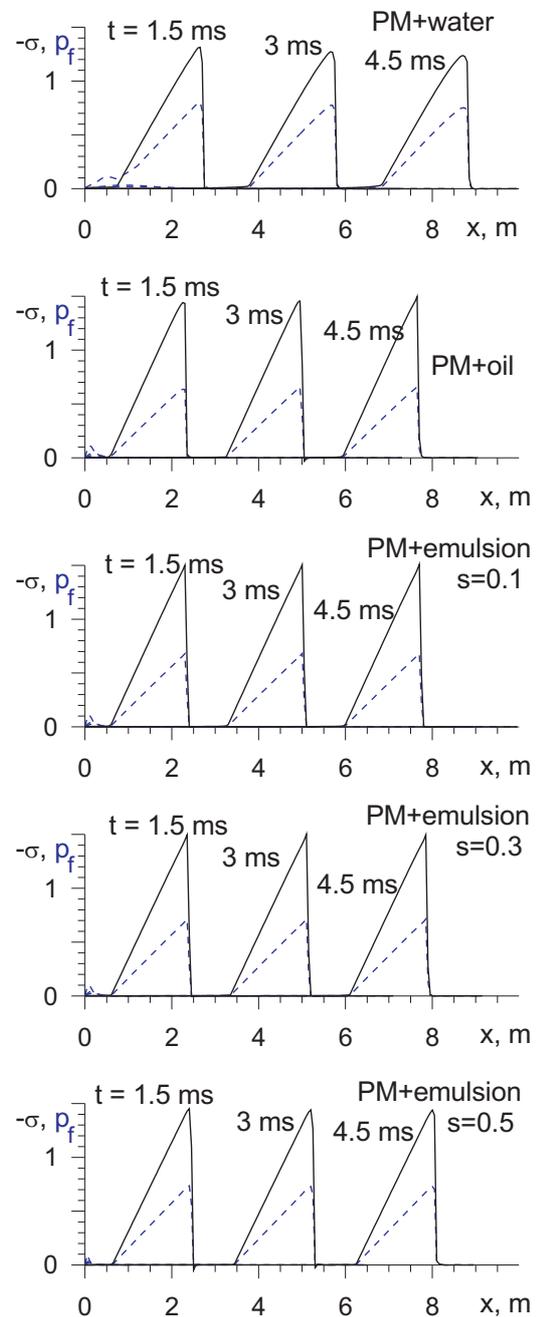


Рис. 4. Распространение импульса в пористой среде, насыщенной водой, нефтью или водонефтяной эмульсией

## Заключение

Получены и проанализированы дисперсионные зависимости. Проанализировано влияние упругих свойств скелета пористой среды, водонасыщенности, температуры на скорость и затухание деформационной и фильтрационной волн.

Исследовано распространение треугольного импульса в пористой среде, насыщенной водой, нефтью или водонефтяной эмульсией.

Установлено, что при увеличении водонасыщенности  $s$  скорость распространения быстрой волны монотонно растет, скорость медленной волны при насыщении пористой среды эмульсией ниже, чем при насыщении водой или нефтью. Показано, что пористая среда, содержащая водонефтяную

эмульсию, характеризуется повышенным затуханием волн по сравнению с пористой средой, насыщенной водой или нефтью.

## Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
- [2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [3] Отчет о научно-исследовательской работе «Исследование влияния анаклариды «раген-а» на нефтеотдачу». Договор б/н, ООО «Реагент», Тюмень–2006 г.

# Моделирование гидропрослушивания в скважинах с вертикальными техногенными магистральными трещинами гидроразрыва

Давлетбаев А.Я., Нуриев Р.И.

Башкирский государственный университет, Уфа

Рассматривается задача о распространении поля давления в системе с двумя скважинами с единичными магистральными техногенными трещинами гидроразрыва в низкопроницаемой пористой среде. Выполнено численное моделирование задачи, анализ чувствительности на параметры системы, смоделировано гидродинамическое исследование методом гидропрослушивания. Численная модель использовалась для решения обратной задачи и оценки параметров системы по измеренным промысловым данным.

## 1. Введение

В настоящее время при разработке низкопроницаемых коллекторов масштабно применяется гидроразрыв пласта (ГРП). ГРП выполняется как в добывающих, так и в нагнетательных скважинах. При существующих объемах закачки пропанта полудлина трещин ГРП в добывающих скважинах достигает 150–200 м. При выполнении ГРП в зонах бурения новых скважин (в зонах, в которых нет существенного изменения полей давления и температуры) трещины преимущественно развиваются вдоль линий регионального стресса, если такая анизотропия существует [1].

Точные аналитические решения задач о моделировании гидропрослушивания для скважин с параллельными техногенными трещинами представлены в работе [2]. В работе [3] математическая модель скважин с трещиной и без трещины использовалась для обработки результатов исследований методом гидропрослушивания и для оценки параметров системы. Случай исследования в неоднородном пласте с проводящим разломом или трещиной рассмотрен в работе [4]. В данной работе рассматриваются наиболее вероятные геометрии скважин с трещинами для гидропрослушивания из работы [5], обоснована и выбрана модель для интерпретации, оценены параметры трещины и пласта. Согласно промысловым данным трещина образовалась вследствие превышения давления закачки над давлением разрушения породы. При постановке задачи предполагается, что давление закачки в скважине превышает давление смыкания трещины, т.е. ее геометрия (высота, длина, раскрытие) постоянна.

## 2. Математическая модель

Рассматривается один из элементов симметричной расстановки с двумя скважинами, которые пересекаются единичными вертикальными техногенными трещинами гидроразрыва. При этом скважины находятся в рядной системе разработки и одинаково ориентированы вдоль линии региональных стрессов. Проницаемости трещин, которые заполнены песком, существенно превышают проницаемость пласта. Техногенные трещины симметричные, параллельны оси  $Ox$ , имеют длины  $x_{f1}$  и  $x_{f2}$ , одинаковые раскрытия  $w_f$ , проницаемость  $k_f$ , имеют прямоугольную форму. Границы пластов удалены от техногенных трещин на расстояние  $L$ . Концы техногенных трещин удалены на расстояние  $d$ .

Полагается, что пласт изотропный, т.е.  $k_{mx} = k_{my}$ . Продуктивный пласт имеет постоянную толщину  $h$ , которая совпадает с высотой трещин. Кровля и подошва пласта непроницаемы. Здесь  $x$  и  $y$  — декартовы координаты;  $p$  — давление жидкости, распределение которого в пласте описывается уравнением Лапласа. В виду симметрии задачи относительно оси  $Ox$  (вдоль трещин) рассматривалась половина расчетной области. Течение в трещинах предполагается одномерным. Жидкость маложимаемая, ее вязкость постоянна. Распределение давления в трещинах, которое меняется по их длине и постоянно в каждом вертикальном сечении, описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2} + \frac{\mu}{k_f} \frac{q}{w_f h} = \frac{\phi_f \mu c_{ft}}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t}, \quad (1)$$

$$L \leq x \leq L + 2x_{f1}, \quad L + 2x_{f1} + d \leq x \leq r \\ \leq L + 2x_{f1} + d + 2x_{f2}, \quad 0 \leq y \leq w_f,$$

в пласте (матрице):

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_m}{\partial y^2} = \frac{\phi_m \mu c_{mt}}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t}. \quad (2)$$

Приток осуществляется через боковые поверхности трещины. Течение на границах «трещина–пласт» в возмущающей скважине описывается выражением:

$$q = - \int_L^{L+2x_{f1}} \frac{k_m}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial y} \Big|_{y=w_f/2} dx, \quad (3)$$

в наблюдательной скважине:

$$q = - \int_{L+2x_{f1}+d}^{L+2x_{f1}+d+2x_{f2}} \frac{k_m}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial y} \Big|_{y=w_f/2} dx. \quad (4)$$

Краевые условия в начальный момент времени в системе «трещина–пласт» и на рассматриваемых границах пласта предполагают постоянное начальное давление:

$$p_m|_{t=0} = p_f|_{t=0} = p_i, \quad (5) \\ p_m|_{y=L} = p_m|_{x=0} = p_m|_{x=2L+2x_{f1}+2x_{f2}+d} = p_i.$$

На границах «трещина–пласт» равенство давлений и фильтрационных потоков:

$$\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial y} \Big|_{y=w_f/2} = \frac{k_m}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial y} \Big|_{y=w_f/2}, \quad (6) \\ P_f \Big|_{y=w_f/2} = P_m \Big|_{y=w_f/2}.$$

Условие симметрии относительно оси (вдоль трещин):

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\partial P_m}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0. \quad (7)$$

Граничные условия в скважинах определяются режимом работы, т.е. с помощью задания давления или расхода закачиваемой жидкости:

$$P_f \Big|_{x=L+x_{f1}, y=0} = p_w, \quad (8)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} \Big|_{x=L+x_{f1}, y=0} = \frac{-Q_w \mu}{2k_f w_f h}. \quad (9)$$

Здесь  $p_f$ ,  $p_m$  — давления в трещине и в матрице;  $\mu$  — вязкость пластовой жидкости;  $w_f$  — раскрытие трещины;  $k_f$  — проницаемость трещины;  $L$  — расстояние до границ пласта;  $k_m$  — проницаемость пласта;  $h$  — высота продуктивного пласта;  $\phi_m$  и  $\phi_f$  — пористость пласта и трещины;  $c_{mt}$  и  $c_{ft}$  — общая сжимаемость в пласте и в трещине;  $x_{f1}$  и  $x_{f2}$  — длины

техногенных трещин в скважинах;  $d$  — расстояние (перемычка) между концами трещин;  $p_i$  — начальное пластовое давление;  $q$  — интенсивность стока/притока вдоль границ «трещина–пласт»;  $p_w$  — давление в скважине;  $Q_w$  — расход закачиваемой жидкости в возмущающую скважину.

### 3. Влияние перемычки между трещинами на отклик давления

Система уравнений (1)–(4) с краевыми условиями (5)–(9) решалась методом конечных разностей по итерационной схеме Ньютона на неравномерной прямоугольной разностной сетке [6]. Точность аппроксимации предварительно проверялась на точном решении для случая скважины с единичной вертикальной трещиной конечной проводимости [7]. Расчеты задачи проводились при следующих параметрах среды:  $k_m = 1 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$ ;  $\mu = 0.3 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ ;  $L = 500 \text{ м}$ ;  $h = 21.23 \text{ м}$ ;  $\phi_m = 0.16668$ ;  $\phi_f = 0.414$ ;  $c_{mt} = 3.6687 \cdot 10^{-9} \text{ 1/Па}$ ;  $c_{ft} = 9.4845 \cdot 10^{-9} \text{ 1/Па}$ ;  $d = 1, 5, 10, 30, 100, 200, 500 \text{ м}$ ;  $x_{f1} = 900 - d \text{ м}$ ;  $x_{f2} = 100 \text{ м}$ ;  $k_f w_f = 10 \text{ м}^2 \cdot \text{м}$ ;  $p_i = 27 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

Для изучения влияния перемычки пористой среды между концами техногенных трещин выполнено моделирование исследования методом импульсного теста. В возмущающей скважине задавались различные режимы работы за счет изменения граничного условия. На режимах закачки задавалось постоянное давление в стволе скважины — краевое условие (8) и на этапах остановки использовалось краевое условие (9) при нулевом дебите. В наблюдательной скважине воспроизводились отклики давления на эти возмущения. На рис. 1 приведены общий вид кривой изменения в возмущающей скважине (рис. 1(a)) и смоделированные отклики давления в наблюдательной скважине для различных значений расстояния между концами трещин:  $d = 3, 10, 30 \text{ м}$  (рис. 1(b)) и  $d = 100, 200, 500 \text{ м}$  (рис. 1(c)). Из рисунка видно, что при  $d > 30 \text{ м}$  отклик давления в наблюдательной скважине малозаметный. В реальных промышленных условиях при наличии зашумления измеренных данных и невысокой точности измерительного оборудования распознавания этого отклика было бы затруднительно. При  $d \leq 30 \text{ м}$  (рис. 1(b)) реакция на возмущения выделяется однозначно. Чем меньше расстояние между концами трещины, тем больше амплитуда отклика давления в наблюдательной скважине.

На рис. 2 приведены профили давления вдоль оси  $Ox$  с трещинами при  $d = 800 \text{ м}$  (рис. 2(a)),  $d = 30 \text{ м}$  (рис. 2(b)) в моменты времени  $t$  равны 1 и 30 сут. В случае с  $d = 800 \text{ м}$  (рис. 2(a)) давление

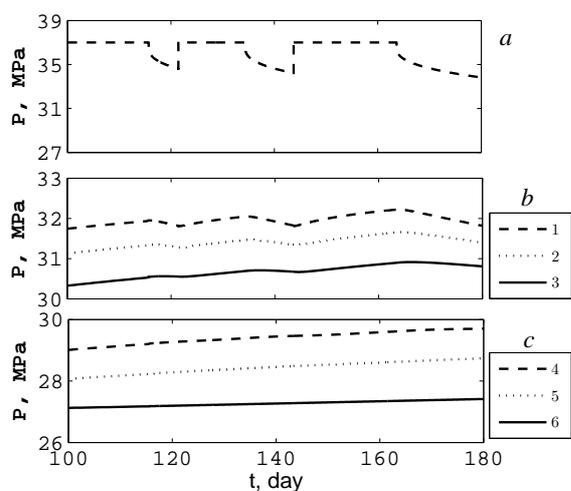


Рис. 1. Импульс давления в возмущающей скважине (а) и отклик в наблюдательной скважине (b, c): 1 —  $d = 3$  м; 2 —  $d = 10$  м; 3 —  $d = 30$  м (b); 4 —  $d = 100$  м; 5 —  $d = 200$  м; 6 —  $d = 500$  м (c)

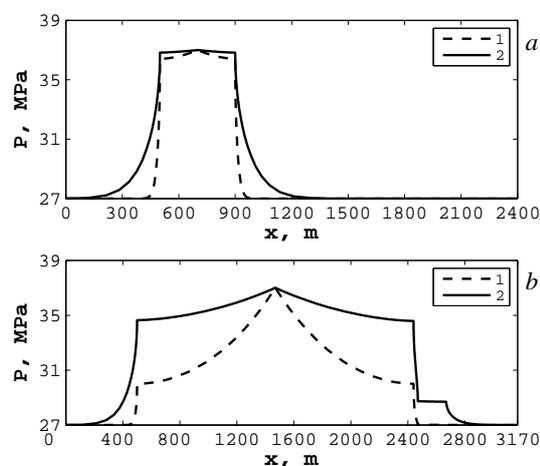


Рис. 2. Распределение давления вдоль трещины при  $d = 800$  м (а),  $d = 30$  м (b) в моменты времени 1 —  $t = 1$  сут; 2 —  $t = 30$  сут

распределилось только вдоль трещины в возмущающей скважине, давление в наблюдательной скважине практически равно начальному пластовому давлению. Из сопоставления профилей с  $d = 30$  м (рис. 2(b)) видно что, чем больше расстояние между трещинами, тем значительнее потери давления между возмущающей и наблюдательной скважинами.

Наличие даже незначительной перемычки пористой среды с низкими фильтрационными свойствами приводит к значительным потерям импульса давления между возмущающей и наблюдательной скважинами. При этом согласно результатам исследований, представленным в работе [5], отклик в наблюдательной скважине на изменение давления в возмущающей скважине практически мгновенный, а разница в абсолютных значения давлений в скважинах значительно меньше, чем в представленных расчетах (рис. 2–4). Таким образом, для обработки результатов промыслового исследования стоит рассмотреть случай с двумя техногенными трещинами без пористой перемычки  $d = 0$ .

#### 4. Случай трещин без перемычки

Случай с единичной техногенной трещиной, которая пересекает возмущающую и наблюдательную скважины, рассмотрен далее. Трещина имеет длину  $2x_{f1} + 2x_{f2}$  и перемычка пористой среды между концами трещин отсутствует  $d = 0$ . В данной системе время отклика на возмущение и пе-

репад давления между возмущающей и наблюдательной скважинами в значительной степени будет определяться проводимостью трещины:

$$F_{CD} = \frac{k_f w_f}{k_m(x_{f1} + x_{f2})}$$

На рис. 3 показана чувствительность кривых изменения давления в возмущающей и наблюдательной скважинах на проводимость техногенной трещины, расчеты проведены при  $F_{CD} = 25$  (рис. 3(a)),  $F_{CD} = 100$  (рис. 3(b)). Из рисунка видно что, чем больше проводимость трещины, тем больше совпадение изменения давления на режимах работы возмущающей скважины и ближе абсолютные значения давлений в скважинах.

#### 5. Интерпретация промыслового исследования

Математическая модель использовалась для интерпретации результатов гидропрослушивания в возмущающей и наблюдательной скважинах. Задавались история по приемистости возмущающей скважины, и воспроизводилась теоретическая кривая изменения давления в наблюдательной скважине. На рис. 4 представлены результаты наилучшего совмещения для теоретической и измеренной кривых для возмущающей скважины (рис. 4(a)) и наблюдательной скважины (рис. 4(b)). Наилучшее совмещение было получено при проводимости трещины  $F_{CD} = 58.5$ , фазовой проницаемости матрицы по воде  $k_m = 0.293 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$  и пластовом давлении  $p_i = 33.13 \text{ МПа}$ .

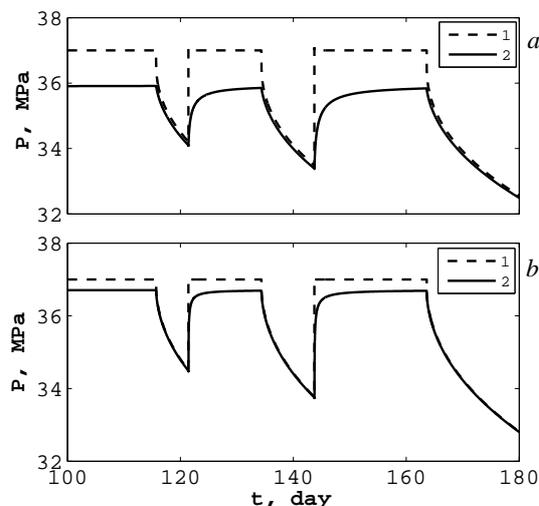


Рис. 3. Изменение давления в возмущающей (1) и наблюдательной скважинах (2) при  $F_{CD} = 25$  (a),  $F_{CD} = 100$  (b)

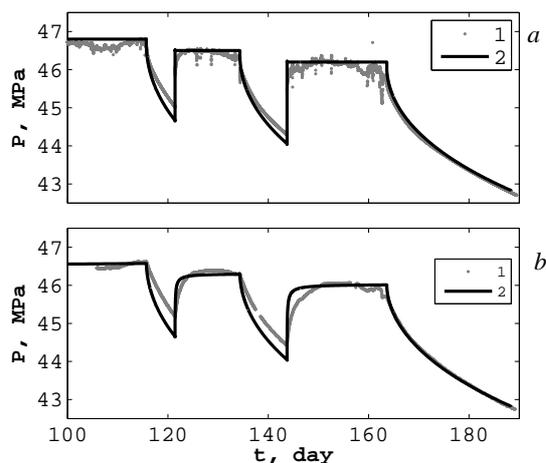


Рис. 4. Изменение давления в возмущающей (a) и наблюдательной скважинах (b): 1 — промысловые данные; 2 — теоретические расчеты

## 6. Заключение

Получено приближенное численное решение задачи о фильтрации жидкости в системе скважин с техногенными трещинами, смоделированы исследования методом гидропрослушивания. Путем моделирования установлено, что техногенные трещины возмущающей и наблюдательной скважин не имеют пористой перемычки. Выполнено совмещение теоретических данных с промысловыми данными

ми, получены оценки безразмерной проводимости техногенной трещины  $F_{CD}=58.5$  и фазовой проницаемости матрицы по воде  $k_m = 0.293 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$ .

## Список литературы

- [1] Байков В.А., Жданов Р.М., Муллагалиев Т.И., Усманов Т.С. Выбор оптимальной системы разработки для месторождений с низкопроницаемыми коллекторами // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2011. № 1. С. 84–98. URL: [http://www.ogbus.ru/authors/Baikov/Baikov\\_2.pdf](http://www.ogbus.ru/authors/Baikov/Baikov_2.pdf).
- [2] Mousli N.A., Raghavan R., Cinci-Ley H., Samaniego V.F. The influence of vertical fractures intercepting active and observation wells on influence tests // SPE 9346. 1982.
- [3] Cooper K.J., Collins R.E. Applications of transient pressure interference tests to fractured and nonfractured injection wells // SPE 19795. 1989.
- [4] Abbaszadeh M., Asakawa K., Cinco-Ley H., Arihara N. Interference testing in reservoirs with conductive faults or fractures // SPE 38941. 1997.
- [5] Davletbaev A., Baikov V., Ozkan E., Garipov T., Usmanov T., Asmandiyarov R., Slabetskiy A., Nazargalin E. Multi-Layer Steady-State Injection Test with Higher Bottomhole Pressure than the Formation Fracturing Pressure // SPE 136199. 2010.
- [6] Aziz K., Settari A. Petroleum reservoir simulation // York: Elsevier Applied Science Publishers. 1979.
- [7] Cinco-Ley H., Samaniego V.F., Dominguez A.N. Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture // SPE 6014. 1978.

# Использование технологий виртуализации в системах управления микророботами и микросистемами<sup>1</sup>

Даринцев О.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

При синтезе систем управления микророботами серьезнейшей проблемой является слабая информационная поддержка: миниатюрные размеры роботов, ограниченность вычислительных и энергетических ресурсов не позволяют в полной мере реализовать все необходимые каналы сбора (обработки) информации. Некоторые параметры внешней среды и микрообъектов (микросистем), имеющие существенное влияние на эксплуатационные характеристики и функционирование микросистем, принципиально не могут быть измерены: шероховатость, профиль пятна контакта, величина заряда, распределенного по поверхности объекта и т.д. Выходом из создавшейся ситуации может стать использование виртуальных информационных систем, построенных на базе интеллектуальных алгоритмов, которые позволяют определить необходимые параметры по косвенным признакам на основе экспертных данных и накопленной статистики взаимодействия. При этом система управления микророботами усложняется незначительно, информация, поступающая с реальных и виртуальных измерительных систем, не разделяется, т.е. происходит частичное «погружение» управляющих контуров в виртуальную среду.

## 1. Введение

Синтез систем управления мобильных манипуляционных микророботов требует разработки специализированных методик, учитывающих особые условия эксплуатации, влияние масштабного фактора и уникальные характеристики микроприводов.

Проведенный анализ конструкций микророботов и микроманипуляционных устройств показал, что наиболее перспективным при создании приводов является использование обратного пьезоэлектрического эффекта. В отличие от других типов приводов, пьезоприводы обладают высокой точностью, до  $1 \text{ \AA}$ , и практически линейной механической характеристикой, высоким КПД и т.д., к недостаткам же можно отнести их хрупкость и наличие гистерезиса. На базе обратного пьезоэлектрического эффекта строятся как приводы прямолинейного перемещения, так и приводы вращения, что объясняет факт их широкого применения в микроманипуляционных устройствах.

Особенностью конструкции пьезоэлектрического мобильного микроманипуляционного робота «МикРоб III» и последующих разработок, является

ее модульность: подвижная платформа и манипуляционная система выполнены в виде автономных модулей с применением унифицированных пьезоприводов.

Подвижная платформа приводится в движение при помощи трех пьезоприводов, расположенных в вершинах равностороннего треугольника, что позволяет существенно упростить алгоритмы управления и упростить реализацию поворотов платформы. Более компактная конструкция обеспечивает достижение более высоких скоростей разворота платформы в связи с тем, что существует прямая зависимость между величиной поворота платформы и расстояниями от центра масс конструкции до точек расположения приводов.

Микророботы семейства МикРоб способны выполнять перемещения рабочего инструмента с точностью до 10 нм, передвигаться со скоростью до 12 мм в секунду по рабочей поверхности, которая, в свою очередь, характеризуется шероховатостью  $Rz \approx 3,2$ . На базе этого типа микророботов будет показана перспективность использования интеллектуальных алгоритмов и методик виртуализации.

## 2. Виртуализация информационной подсистемы мобильной платформы

Конструктивный облик существующих микророботов во многом определяется типом применяе-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 1 фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (проект «Научные основы робототехники и мехатроники») и РФФИ (грант № 11-08-97016-р\_поволжье\_a).

мых приводов. Привод определяет не только внешний вид и конструкцию микроробота, способы выполнения действий и перемещений на микроуровне, но и материалы, которые могут быть применены для изготовления его основных компонентов. Поэтому, в первую очередь, при конструировании необходимо провести выбор исполнительных механизмов (приводов). Довольно часто этот выбор сводится к выбору физического эффекта, выходом которого является механическая энергия.

Основное требование к исполнительным механизмам, применяемым в микроробототехнике, — это отсутствие каких-либо механических передач или преобразователей видов движения. Перемещения, которые должны реализовываться этими приводами, более чем на порядок ниже величины зазора (люфта), которая может быть достигнута при прецизионном изготовлении механических передач. Поэтому в качестве приводов чаще всего используются так называемые преобразователи рода энергии (ПРЭ). Наиболее распространенными ПРЭ являются обращенные электромеханические преобразователи, потребность в которых объясняется тем, что протекание практически любого технологического процесса связано с необходимостью совершать механическую работу.

Микророботы отличаются простотой конструкции и процесса реализации движений, в случае пьезоэлектрического мобильного микроробота это «единичный» шаг. Тем не менее, управление объектом данного класса в силу ряда причин, часть из которых была приведена и смоделирована выше, является сложной и неоднозначной задачей. Особо жесткими являются требования к системе управления по обеспечению требуемой точности выполнения перемещения и манипуляций, а в некоторых случаях и к скорости выполнения данных действий. Иногда в качестве требования выступает корректная реализация одного из способов выполнения перемещения.

В силу малой величины шага и особенности процессов реализации движения у объекта управления появляются свойства, нетипичные для макросистем робототехники. Это явление связано с проявлением особенностей функционирования объектов в микромире.

Построение адекватной обратной модели (ОМ) мобильного микроробота как объекта управления с приемлемой величиной времени расчетов управляющих воздействий предоставляет возможность применить ОМ непосредственно в качестве регулятора управляющей части системы. В этом случае система управления при генерации управляющих сигналов будет учитывать наиболее значимые

особенности объекта и в системе будут присутствовать только ошибки, связанные с ориентацией приводов платформы микроробота (постоянная составляющая, но на практике практически не поддающаяся измерению) и качеством поверхности движения (случайная составляющая, т.к. необходимо учитывать величину отдельных «пииков», а не их среднюю величину).

Грубая модель выполнения перемещения микроробота  $\mathbf{Z}(t)$  может быть представлена в виде:

$$p\mathbf{Z}(t) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(t),$$

где  $\mathbf{V}$  — частота подаваемого в модель сигнала управления  $\mathbf{U}(t)$ ;  $\mathbf{K}$  — линейный коэффициент зависимости напряжения — перемещение;  $\mathbf{I}$  — единичная матрица;  $\mathbf{H} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}$  — матричный оператор, где, в свою очередь,

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ b_{x1} & b_{x2} & b_{x3} & b_{y1} & 0 & b_{y3} \end{vmatrix} — матрица$$

коэффициентов для расчета элементарных движений по  $x$ ,  $y$  координатам и углу поворота;  $\mathbf{R}$  — матрица перехода из локальной системы координат в глобальную.

Предлагаемая модель перемещения микроробота достаточно проста, так как она строится на основе геометрической и кинематической моделей мобильных пьезоэлектрических микророботов класса МикРоб. Но, в то же самое время, эта модель предъявляет жесткие требования к соосности приводов, практически абсолютному равенству площадей сегментов, точности изготовления платформы и другим параметрам, приводящим к изменению коэффициента передачи и, следовательно, отклонениям от желаемого характера движения. Предлагаемая модель микроробота будет адекватной, если качество рабочей поверхности стабильно и не меняется в процессе эксплуатации, микроприводы обладают идентичными характеристиками, конструктивные элементы, определяющие жесткость подвижной платформы, изготовлены с большой точностью.

Проведенные эксперименты показали, что шаг, выполняемый пьезоприводом, не является величиной постоянной, а зависит от технологического разброса характеристик и от внешних возмущающих воздействий, вызванных шероховатостью поверхности, сравнимой с величиной отдельного шага и действием адгезионных сил.

В связи с этим обстоятельством, предлагается коэффициент передачи представить в виде суммы постоянной величины и параметрического возмущения, а движение микроробота по траектории

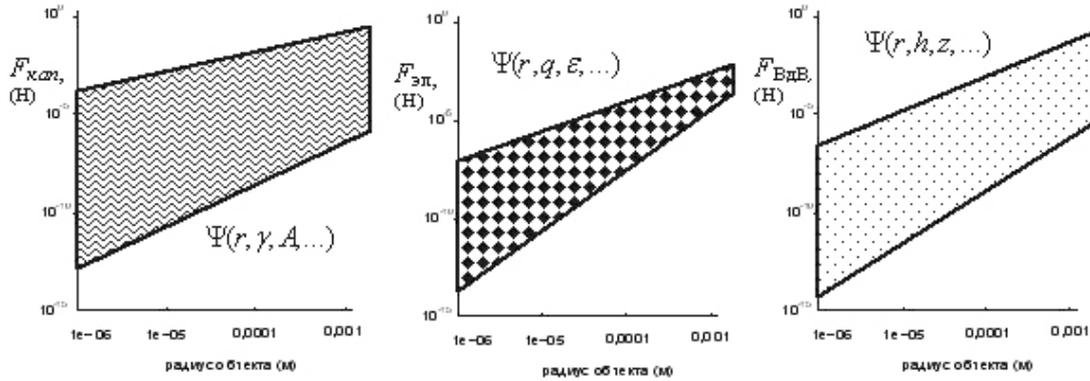


Рис. 1. Области достоверности для адгезионных сил

можно представить в виде нестационарного уравнения:

$$p\mathbf{Z}(t) = V \cdot I \cdot H \cdot [K^* + \Delta K(t)] \bar{\rho}(t). \quad (1)$$

Особенностью данного описания, в отличие от традиционного, является то, что оператор, связывающий  $\mathbf{Z}(t)$  и  $\bar{\rho}(t)$ , является нестационарным коэффициентом передачи, не содержащим дифференциальных компонент, т.е. является голономным оператором. При этом постоянную составляющую  $K^*$  можно рассматривать как номинальный коэффициент передачи объекта, а нестационарную составляющую  $\Delta K(t)$  — как некоторое эквивалентное параметрическое возмущение, действующее на объект и вызванное нелинейными свойствами поверхности, изменением ее характеристик во время движения и технологическим разбросом характеристик пьезоприводов.

При этом для параметрического возмущения  $\Delta K(t)$  может быть получено только приближенное значение, т.к. действующие величины адгезионных сил, как возмущений со стороны окружающей среды, носят вероятностный характер (рис. 1).

Т.е. для режима эксплуатации  $\mathbf{R}$  действующие на микроробот сигнальные возмущения  $\mathbf{F}_{out}$  будет справедливо представить в виде следующего выражения:

$$\mathbf{F}_{out} = \sum_i^{n(\mathbf{R})} (\alpha_i \cdot \mathbf{F}_i^R) + \Delta^R,$$

где  $\alpha_i$  — коэффициент масштабирования адгезионной силы  $\mathbf{F}_i^R$ , отражающий особенности ее проявления на режиме эксплуатации  $\mathbf{R}$ ;  $\Delta^R$  — возмущения, проявляющиеся на режиме  $\mathbf{R}$ , но не имеющие аналитического выражения и носящие вероятностный характер.

В процессе эксплуатации микроробота его параметры меняются вследствие износа, старения компонентов, действия окружающей среды и т.д., но эти изменения можно учесть при управлении,

используя статистику, накопленную во время опытной эксплуатации, и снизить их влияние путем тщательной конструкторской проработки конструкции. Т.е. в формуле (1) можно постоянную составляющую  $K^*$  представить в виде переменной с небольшой величиной дрейфа во времени, или корректировать ее во время эксплуатации в соответствии с экспериментальными данными.

Более сложным представляется аналитическое описание  $\Delta K(t)$ , т.к. кроме визуальной обратной связи (координаты, ориентация микроробота и скорость перемещения) другой информации о взаимодействии микроробота с окружающей средой нет. При этом действие возмущений зависит от режима функционирования микроробота: перемещение (крейсерский, оперативный и точный режимы), выполнение технологических операций (манипуляции, сборка, тестирование и т.д.), а также от типа микроприводов, особенностей конструкции, типов контактирующих материалов и др. Поэтому для управления микророботами необходимо использовать простейшие модели кинематики и динамики, т.к. на высокоточные перемещения большее влияние оказывают особенности взаимодействия объектов на микроуровне, а не конструкция узлов микроробота и тип микропривода. Чем выше точность реализуемого перемещения, тем существеннее влияние возмущений, а т.к. величина адгезионных сил может иметь достаточно большой разброс (рис. 1), то необходима разработка алгоритма предсказания величин адгезионных сил. Для достижения необходимой точности (для корректной работы оборудования достаточно 85–90%) предсказания необходимо использовать модельные данные, данные экспериментов и текущие данные обратной связи, на основе которых можно сформировать сначала качественную картину происходящего на микроуровне, а затем уточнить коэффициенты  $\alpha_i$  для наиболее значимых адгезионных проявлений.

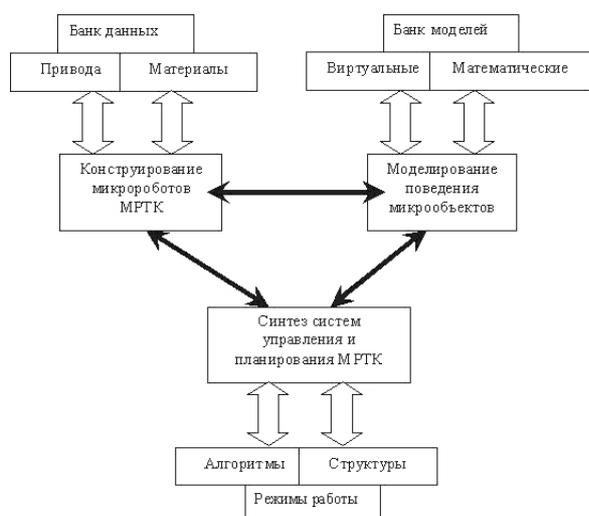


Рис. 2. Информационная модель функционирования систем управления МРТК

Так как при реализации перемещения микро-робота возможны три различных типа движения, то необходимо построение трех различных вариантов объединения кинематической, динамической и модели возмущающих воздействий в эталонную модель и обратную модель для реализации регулятора в системе управления. А наиболее простым вариантом реализации набора моделей будет их реализация в виде виртуальной надстройки системы управления, а дополнительным входным сигналом для регулятора будет генерируемый этой надстройкой вектор начальных угловых установок приводов микро-робота [1–2].

Подводя итог вышесказанному, и основываясь на концепции управления микроробототехническими комплексами, предлагается строить систему управления с использованием следующей информационной модели (рис. 2). Предлагаемая информационная структура представлена в форме триады, что определяется самой картиной взаимодействия между элементами структуры. Как это было показано выше для управления микросистемами и микророботами необходимо знание об эффектах, проявляющихся в микромире, которые, в свою очередь, в значительной степени зависят как от материалов, из которых изготовлены компоненты, так и от предполагаемого режима работы. Во время эксплуатации МЭМС и микророботов свойства элементов, характер взаимодействий могут меняться, иногда весьма значительно, поэтому необходимо накопление статистической информации в виде специализированных банков данных, моделей и режимов.

### 3. Манипуляционные системы микророботов, виртуальные подсистемы контроля и управления

Когда объекты, с которыми производятся манипуляции, имеют размеры менее 1 мм, гравитационные и инерционные силы, пропорциональные объему объекта, оказывают меньшее влияние на технологические процессы по сравнению с силами адгезии (электростатические, Ван-дер-Ваальса и поверхностного натяжения), возникающими при контакте микрообъектов с рабочими поверхностями инструментов, манипуляторов и технологической оснастки, и пропорциональные площади.

При микросборке основными причинами адгезии (прилипание, сцепление, притяжение) являются электростатические силы, силы Ван-дер-Ваальса и поверхностного натяжения (капиллярные силы). Электростатические силы проявляются под действием электрических зарядов, которые наводятся от сил трения или передаются контактной электрификацией. Силы Ван-дер-Ваальса являются следствием мгновенной поляризации атомов и молекул, то есть являются эффектами квантовой механики. Капиллярные силы возникают из-за присутствия жидкой пленки микроскопических масштабов на взаимодействующих поверхностях. В зависимости от условий внешней среды, используемых материалов, поверхностных свойств объектов и т.д., также можно выделить такие проявления адгезии, как силы сцепления/упругости (pull-of-force), возникающие во время контакта при деформации поверхности микрообъекта инструментом, магнитные силы и эффекты микротрибологии. Моделирование адгезионных эффектов показало, что при уменьшении размера объекта менее 3–4 мкм упомянутые выше силы становятся более значимыми по сравнению с гравитационным воздействием.

Расчеты действующих на микрообъекты сил носят эмпирический характер, так при всех прочих равных параметрах объекта истинное соотношение адгезионных сил может варьироваться в достаточно широком диапазоне, так как оно определяется целым рядом параметров окружающей среды, шероховатостями поверхностей, контактируемыми материалами, которые измерить практически невозможно в рабочих условиях. Вместе с тем, на практике из всех составляющих адгезии именно электростатические силы создают наибольшие сложности при работе с микрообъектами и выполнении микросборочных операций. Это можно объяснить тем, что поверхностный заряд индуцируется фактически при выполнении каждой операции, где есть трение, взаимодействия и контакты микрообъектов с инструментами, паллетами и т.д. К

тому же, всегда наблюдается эффект «конденсатора», поскольку между поверхностями микрообъектов и инструмента всегда присутствует определенный воздушный зазор из-за наличия на поверхностях шероховатостей, неровностей и т.д. Электростатические силы, в отличие от других составляющих адгезии, способны проявляться не только на поверхности, но и по всему объему микрообъектов. Борьба с негативным влиянием электростатических сил наиболее сложна и, как правило, малоэффективна.

Все вышеперечисленные возмущения относятся к классу случайных и не поддаются измерению в явном виде или их оценка требует значительных временных затрат. Случайный характер адгезионных сил проявляется не только при работе захватных устройств традиционных принципов действия, но и при работе концевых эффекторов. В математических моделях микроконтактной динамики, используемых при синтезе систем управления, с целью упрощения были учтены не все эффекты (о влиянии некоторых возмущений на микроуровне сегодня точно не известно, например, короткодействующих молекулярных сил). Но на основе результатов проведенных вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что при работе концевых эффекторов, величины адгезионных сил являются также труднопрогнозируемыми, а на микроманипуляционные операции оказываются комбинированные воздействия.

Поэтому при генерации управляющих воздействий сборочными микромеханизмами проанализировать и учесть влияние каждого из возмущающих факторов практически невозможно из-за отсутствия численных показателей для большинства из них, а также чрезмерного увеличения сложности модели. Предлагаемый подход основан на синтезе интеллектуальной системы управления с виртуальной надстройкой, в которой реализован блок предсказания (предиктор), построенный в нейросетевом базисе и использующий в процессе функционирования как результаты моделирования различных составляющих адгезии, так и текущую доступную информацию с сенсорных систем.

Основная особенность выполнения микроманипуляций состоит в том, что в отличие от захвата «макро» изделий, где усилие захвата рассчитывается исходя из массы изделия, его поверхностных свойств, динамики системы манипулирования и сил сцепления с рабочей поверхностью схвата, при микроманипулировании необходимо учитывать поверхностные эффекты [3].

Таким образом для вычисления  $F_{cxb}^{mp}$  силы сжатия губок схвата необходимо использовать форму-

лу, отличную от классической, которая включает не только стандартные параметры, такие как масса микрообъекта  $m$ , коэффициент трения  $\mu$ , динамические характеристики манипуляций (ускорения, возникающие при перемещении объекта)  $a_{\text{возм}}$ , но и адгезионные силы  $F_{\text{адз}}$ , шероховатость поверхности (материал)  $\delta$ , а также условия эксплуатации схвата  $M$ .

Классический (традиционный) вариант формулы для расчета силы схвата  $F_{cxb}^{mp}$  выглядит следующим образом:

$$F_{cxb}^{mp} = K_1 \cdot K_2 \cdot (F_{zp} + m \cdot a_{\text{возм}}),$$

где  $K_1$  — коэффициент, зависящий от положения заготовки по отношению к губкам схвата и направления действия силы тяжести;  $K_2$  — коэффициент запаса.

Анализ экспериментальных данных показал, что роль гравитационной силы при выполнении микроманипуляций сводится часто к необходимости придания захватываемому объекту нужной ориентации и дополнения действующих адгезионных сил до минимально необходимого уровня. Так, при захвате сферического микрообъекта, радиус которого 50 мкм, схватом с плоскими губками, сила поверхностного натяжения имеет величину в пределах  $10^{-5}$  Н, сила Ван-дер-Ваальса —  $10^{-7}$  Н, электростатическая сила —  $10^{-9}$  Н, в то же самое время, гравитационная сила равна примерно  $10^{-9}$  Н.

Поэтому для вычисления силы схвата предлагается использовать следующую формулу, где добавляется «положительный» (для операции захвата) эффект адгезионных сил:

$$F_{cxb} = K_1 \cdot K_2 [\mu \cdot (F_{zp} + m \cdot a_{\text{возм}}) + \mathbf{F}_{\text{адз}}(M, \delta)],$$

где  $\mathbf{F}_{\text{адз}}(M, \delta)$  — сумма наиболее эффективных адгезионных сил при заданных режимах работы схвата и для данной пары взаимодействующих материалов.

Прогнозирующую оценку недетерминированных возмущений предлагается проводить на основе информации, поступающей на вход в виде векторов текущего состояния  $Sf(k)$  (сигналы обратной связи, получаемые с сенсорных систем), косвенных и размерных факторов  $Sv(k)$  (данные в виде констант, описывающих основные свойства окружающей обстановки и используемых материалов), текущих коэффициентов взаимодействий  $Sa(k)$  (выход математических моделей микромира, моделей микроразрушения), а также значений векторов текущего состояния за один  $Sf(k-1)$ , два  $Sf(k-2)$ , три такта  $Sf(k-3)$  назад. Выходом предиктора будет являться коэффициент  $\alpha(k+1)$  уменьшения силы захвата  $F_{cxb}^{mp}$ , величина которой была вычисле-

на классическими методами (1), для последующей операции:

$$\alpha(k+1) = RBF(Sf(k), Sv(k), Sa(k), \alpha(k), Sf(k-1), Sf(k-2), Sf(k-3)),$$

где  $RBF$  — проводимое сетью преобразование вход–выход.

Предиктор синтезировался в виде одношагового блока прогнозирования на базе прямонаправленной трехслойной нейронной сети с радиально-базисными активационными функциями нейронов скрытого слоя (РБФ-сети):

$$f_i(Y, c_i, \sigma_i) = \exp\left(-\frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^V (Y_j - c_{i,j})^2\right), \quad i = \overline{1, H},$$

где  $Y = (Sf(k), Sv(k), Sa(k), \alpha(k), Sf(k-1), Sf(k-2), Sf(k-3))$  — вектор входных сигналов сети;  $c_i = (c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,V})$  — вектор координат центра активационной функции  $i$ -го нейрона скрытого слоя;  $\sigma_i$  — ширина окна активационной функции;  $V$  — количество нейронов во входном слое сети;  $H$  — количество нейронов в скрытом слое.

Линейные выходные нейроны суммируют сигналы со скрытого слоя и формируют выход сети, генерируя предсказания:

$$Z_j(k+1) = \sum_{i=1}^H w_{ji} f(Y, c_i, \sigma_i),$$

где  $j$  — номер нейрона выходного слоя;  $w_{ji}$ ,  $i = \overline{1, H}$  — весовые коэффициенты.

Проведенные исследования доказывают, что синтез одношагового нейросетевого предиктора для оценки величин микроэффектов при захвате объектов возможен даже при отсутствии прямой информации обо всех действующих на микрообъект силах, — достаточно только косвенных и модельных данных. Исходя из полученных результатов, использование концевых эффекторов с предложенной прогнозирующей моделью управления наиболее эффективно в задачах по сборке гибридных микросистем, где требуется высокая точность в прикладываемых усилиях, т.к. отдельные детали имеют толщину несколько мкм и ниже (кантилеверы, пластины, мембраны и т.д.). Несмотря на необходимость затрат машинных ресурсов на прогнозирование, в результате достигается минимизация времени сборки микроизделия за счет увеличения быстродействия манипуляционной системы и снижается вероятность выхода из строя захватываемых микродеталей, т.к. усилие приводов значительно ниже.

Достоверность работы виртуальной надстройки со встроенным предиктором подтверждена положительными результатами ее тестирования на моделях адгезионных эффектов и экспериментальными данными [4]. Все это указывает на перспективность использования виртуальных технологий для решения задач управления микроманипулятором.

#### 4. Заключение

В статье показана лишь часть возможностей, реализуемых при помощи виртуальных технологий, применительно к синтезу и использованию систем управления микроробототехническими устройствами. Использование технологий виртуализации позволяет проводить реконструкцию состояния окружающей среды по косвенным показателям и генерировать «виртуальные» сигналы для систем управления, как результат прямого «измерения» параметров рабочей среды: шероховатость, величины адгезионных взаимодействий и т.д. При этом нагрузка на бортовой управляющий комплекс снижается практически на порядок, система корректно парирует возмущения внешней среды

#### Список литературы

- [1] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Виртуальный имитатор технологического комплекса сборки микросистем // Вестник компьютерных и информационных технологий. М.: Изд-во «Машиностроение». 2006. № 10. С. 19–25.
- [2] Даринцев О.В. Использование интеллектуальных алгоритмов при построении систем управления микроробототехническими комплексами // Искусственный интеллект. Донецк, ИПШ МОН і НАН України «Наука і освіта». № 3, 2008. С. 408–418.
- [3] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Моделирование работы микроманипуляционного устройства, изготовленного с использованием наноструктурных материалов // Нано- и микросистемная техника. М.: Изд-во «Новые технологии». 2007. № 11. С. 19–23.
- [4] Даринцев О.В. Система управления и конструкция капиллярного микрозахвата // Материалы XX Междунар. науч.-техн.конфер. «Экстремальная робототехника. Нано- микро- и макророботы (ЭР-2009)». Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. С. 335–337.

# Сравнительный анализ интеллектуальных методов планирования<sup>1</sup>

Даринцев О.В., Мигранов А.Б.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассмотрены основные этапы решения задачи планирования движений мобильными роботами в нестационарной рабочей среде на основе нейронных сетей, генетических алгоритмов и нечеткой логики. Выделяются общие для рассматриваемых интеллектуальных алгоритмов особенности и проводится их сравнительный анализ. Даются рекомендации по использованию того или иного метода в зависимости от типа решаемой задачи и требований, предъявляемых к быстродействию алгоритма, качеству траектории, наличию (объему) сенсорной информации и т.д.

## 1. Введение

В последние годы в робототехнике растет количество научных групп, работающих над проблемой реализации коллективного управления автономными мобильными роботами и микророботами, что связано с расширением возможностей роботов и повышением гарантий получения результата при совместном (коллективном) использовании таких устройств для решения поставленных задач. В связи с тем, что использовать коллективы роботов предполагается в опасных средах, в дополнении к общей задаче управления движением появляются проблемы мультиагентного планирования движения в нестационарном рабочем окружении: непредсказуемое изменение окружающей обстановки, наличие подвижных препятствий и т.д. Поэтому для управления движением мобильных роботов, функционирующих в условиях неопределенности, в последние годы широкое распространение получили методы решения на основе интеллектуальных алгоритмов: нейронных сетей, генетических алгоритмов и нечеткой логики. В данной работе рассматриваются основные этапы решения задачи планирования на основе перечисленных интеллектуальных методов, выделяются схожие моменты для всех алгоритмов, проводится сравнение по способу представления рабочего пространства, количеству роботов в коллективе, затратам машинного времени и т.д. Также даются рекомендации по использованию

того или иного метода в зависимости от особенностей решаемой задачи и требований, предъявляемых к быстродействию алгоритма, оптимальности траектории, наличию сенсорной информации и т.д.

## 2. Планирование на основе генетических алгоритмов

В настоящее время одними из перспективных подходов, которые позволяют достаточно эффективно управлять сложными динамическими объектами в условиях неопределенности, дефицита ресурсов и в реальном времени, являются системы принятия решений с элементами искусственного интеллекта, в частности генетические алгоритмы [1].

Решение задачи планирования на основе генетических алгоритмов можно свести к следующим основным этапам [2]:

- 1) формирование модели внешней среды (рабочего пространства);
- 2) кодирование потенциальных решений (формирование хромосом);
- 3) генерация начальной популяции (траекторий, соединяющих точки старта и цели);
- 4) определение критериев выживания популяции на каждом эволюционном этапе и формирование функций соответствия;
- 5) нахождение оптимального решения на каждом этапе эволюции путем вычисления функции пригодности.

Формирование модели внешней среды заключается в разбиении (дискретизации) рабочей области в трехмерном пространстве по осям координат.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 1 фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (проект «Научные основы робототехники и мехатроники») и РФФИ (грант № 11-08-97016-р\_поволжье\_а).

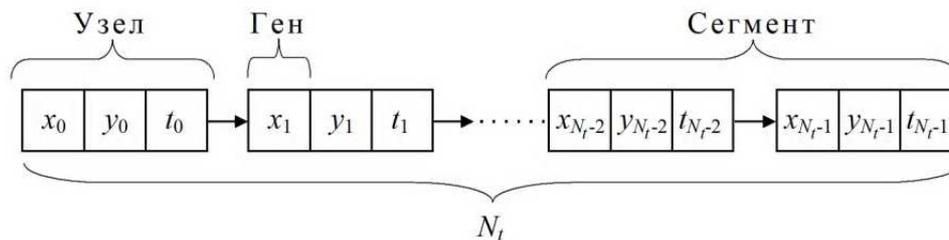


Рис. 1. Кодировка маршрута движения в хромосоме

нат  $X$ ,  $Y$  и времени  $t$ . Шаг квантования по времени характеризует период, в котором определено движение препятствий в рабочей области, задавая таким образом максимальную глубину планирования по времени. Квантование по осям координат необходимо для дискретизации состояния неподвижных объектов, определения точек, соответствующих стартовым и конечным положениям агента, а также для фиксирования моментов изменения состояния нестационарной рабочей среды.

Одним из наиболее важных элементов в генетических алгоритмах является кодирование потенциальных решений, то есть формирование хромосом. Если в качестве индивидуумов рассматривать маршруты движения по ячейкам дискретного трехмерного рабочего пространства, то хромосома будет представлять собой последовательность узлов, образующих траекторию движения. При этом каждый  $i$ -ый узел будет содержать гены, представляющие собой координаты в виде индексов  $x_i$  и  $y_i$  соответствующей ячейки, а также индекс момента времени  $t_i$ , в котором агент достигнет эту ячейку (рис. 1). Гены, соответствующие времени и расположенные в последовательных узлах хромосомы, отличаются на единицу.

Для полученного множества потенциальных решений применяются генетические операторы (скрещивание, мутация, спрямление и сглаживание), результатом чего является получение новых хромосом и отбор среди них лучших решений в следующее поколение. Этот набор действий повторяется итеративно, пока полученное решение не будет удовлетворять заданному критерию. Такими критериями могут быть: минимальная длина маршрута, минимизация времени перемещения в заданную точку и т.д.

### 3. Планирование на основе нейронных сетей

Основу нейронной сети составляют относительно простые, однотипные элементы, имитирующие работу нейронов мозга. Отличительной чертой

нейросетевого подхода, обеспечивающей преимущества использования нейронных сетей в задачах планирования оптимальных маршрутов движения, является принцип параллельной обработки сигналов, который достигается путем объединения большого числа нейронов в слои и соединения определенным образом нейронов различных слоев [3].

Решение задачи планирования на основе нейронных сетей можно свести к следующим основным этапам [4]:

- 1) формализация задачи планирования;
- 2) выбор топологии сети;
- 3) отображение энергетических взаимодействий нейронов в сети в виде нейронной карты (поверхности);
- 4) расчет полной траектории в виде некоторой процедуры «восхождения» к вершине поверхности (цели).

Условия применения данного подхода определяются формализацией задачи планирования. Используем следующие обозначения:  $R$  — мобильный робот;  $C$  — заданное рабочее пространство. Некоторый внешний источник (сенсорная система) непрерывно обеспечивает информацией об окружающей среде. По получаемой информации определяются конфигурация заданного пространства  $C$  и расположение препятствий. Следует отметить, что определение точной конфигурации рабочего пространства во многом зависит от технических возможностей внешнего источника (сенсорной системы). Сенсорная информация  $X$  с помощью энергетических взаимодействий нейронов в сети отображается в виде нейронной карты  $\Psi$  на нейронной области  $F$ . Для создания нейронной карты необходимо, чтобы распространение энергии в сети было подобно эффекту распространению волны, поэтому каждый нейрон должен взаимодействовать только с подмножеством своих соседей. Это условие выполняется для нейронной сети Хопфилда.

Выбор топологии нейронной сети определяет функции расстояния, используемые для расчета расстояния между нейронами в слое. Функция рас-

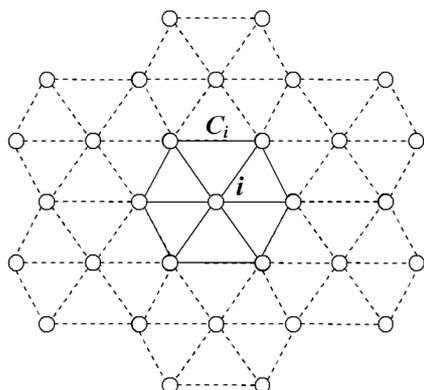


Рис. 2. Гексагональная топология сети

стояния между нейронами  $i$  и  $j$  в описываемой сети есть функция евклидова расстояния  $\rho(i, j)$ :

$$\rho(i, j) = \sqrt{([i] - [j])^2},$$

где  $[i]$  и  $[j]$  – векторы состояний  $i$ -го и  $j$ -го нейронов соответственно.

Для сети Хопфилда можно принять кроме ортогональной топологии гексагональную, с семью нейронами в нейронной области, то есть 6-ю возможными соседями для каждого нейрона (рис. 2).

Дальнейшее решение задачи планирования определяется отображением энергетических взаимодействий нейронов в сети в виде нейронной карты. Для этого координаты цели, а также информация об окружающей среде подаются на вход сети Хопфилда. Нейроны сети входят в состояние равновесия и принимают собственные значения энергии (в зависимости от функции активации). Взаимодействия нейронов построенной сети обусловлены динамикой и архитектурой самой сети, а также конфигурацией окружающего пространства и координатами цели, которая является точкой активации. Значения энергии нейронов на данной нейронной области (ландшафт активации) поступают на вход блока генератора траектории, который в свою очередь и выполняет расчет траектории.

Таким образом, основная идея данного подхода состоит в том, чтобы использовать нейронную карту как динамическое представление заданного рабочего пространства, информация о котором поступает с внешних источников (сенсорных систем робота). Энергетические взаимодействия нейронов в сети подобно распространению волны возмущений приводят к возникновению (модификации) ландшафта активации, который используется в дальнейшем как навигационная карта для планирования траектории.

#### 4. Планирование на основе нечетких алгоритмов

Реализация бортовых систем управления «большими» мобильными роботами на основе генетических алгоритмов или нейронных сетей не вызывает особых технических затруднений, поскольку размеры роботов позволяют размещать на борту аппаратно-программные комплексы, ресурсы которых будут достаточными для реализации алгоритмов управления, работающих в реальном времени. В то же время, на возможности бортовых вычислительных устройств микроботов накладываются более жесткие ограничения – размеры микроботов уже не позволяют размещать высокопроизводительные аппаратно-программные управляющие комплексы [5].

Решение задачи планирования на основе нечетких алгоритмов можно свести к следующим основным этапам [6]:

- 1) определить входы и выходы создаваемой системы;
- 2) задать для каждой из входных и выходных переменных функции принадлежности;
- 3) разработка нечетких правил выводов.

За входные сигналы нечеткого регулятора можно принять следующие параметры:  $\mathbf{A}$  – свободные области рабочей зоны;  $b$  – угловое отклонение от цели. Свободные области рабочей зоны  $\mathbf{A}$  – это матрица, формируемая на основе поступающей информации от восьми датчиков, расположенных в каждом из 8-ми возможных направлений движения. Элементы матрицы  $\mathbf{A}$  могут принимать значения «0» и «1», где «0» соответствует свободной области, а «1» соответствует препятствию в рабочей зоне. Угловое отклонение от цели  $b$  – входная переменная, определяющая отклонение курса движения мобильного робота от целевого направления. Выходными сигналами нечеткого регулятора являются:  $V$  – линейная скорость мобильного робота;  $\omega$  – направление движения мобильного робота.

Входным и выходным сигналам соответствуют логико-лингвистические переменные, значения которых определяются термами-множествами: отрицательное большое (NB), отрицательное среднее (NM), отрицательное малое (NS) и т.д.

На следующем этапе строится база знаний нечеткой системы, состоящая из продукционных правил и отражающая зависимость между входными и выходными термами-множествами. Для разрабатываемой нечеткой системы выбор нужного правила будет определяться угловым отклонением микробота от цели и наличием свободных областей в рабочей зоне. Всего в базе правил определено 72 правила – по девять вложенных правил для

каждого из восьми значений углового отклонения робота от цели.

В базе правил, в первую очередь, выполняется поиск по переменной «цель», что позволяет эффективнее использовать вычислительные ресурсы бортовой микроЭВМ. Аналогично строятся базы нечетких правил управления для других возможных ситуаций расположения цели относительно робота (цель перед роботом и слева, цель перед роботом и справа, цель слева, цель справа и т.д.).

Наиболее важной отличительной чертой алгоритмов планирования на основе нечеткой логики являются умеренные затраты машинного времени и оперативной памяти микроЭВМ. Вычислительные затраты также практически не зависят от размерности матрицы конфигурации рабочей зоны, а оптимизация используемого объема памяти микроЭВМ для больших размерностей рабочей области может быть достигнута отображением в матрице локальной зоны робота.

## 5. Сравнение методов планирования

Сравнение рассмотренных методов проведем по следующей таблице (табл. 1), отражающей особенности применения алгоритмов, а также основные результаты моделирования.

Как показано в таблице, общей чертой рассмотренных алгоритмов является необходимость дискретизации, т.е. разбиения рабочей области на конечное число ячеек. Как правило, это квадраты, длина сторон  $\Delta S$  которых выбирается из условия обеспечения алгоритмом бесконфликтного движения — исключения столкновений роботов между собой, столкновений со стационарными препятствиями, а также выход за пределы рабочего пространства. Величину шага дискретизации  $\Delta S$  можно выбрать из следующего соотношения:

$$\Delta S = \eta \cdot L_{\min},$$

где  $L_{\min}$  — минимальный линейный размер наименьшего по габаритам робота, функционирующего в пределах рабочей области, или препятствий, расположенных в зоне движения роботов;  $\eta$  — коэффициент шага дискретизации, характеризующий достижимую безопасность движения в заданной среде. Как показали результаты моделирования, при выборе величины коэффициента  $\eta$  в диапазоне  $1, 1 \div 1, 5$  обеспечиваются бесконфликтное движение и эффективная работа рассмотренных интеллектуальных алгоритмов.

Выбор шага дискретизации в соответствии с этой методикой также позволяет получить поисковое пространство наименьшей размерностью, при которой реализуется бесконфликтное движение мо-

бильных роботов, а значит достигается эффективность работы алгоритма. Относительно невысокая точность решения задачи при таком подходе будет соответствовать грубой подсистеме генерации движений, которая при необходимости может компенсироваться уже прецизионной подсистемой управления.

Для решения проблемы массового применения мобильных роботов в составе больших групп (микророботов), насчитывающих сотни и даже тысячи технических устройств, наиболее перспективным является использование методов планирования на основе нечеткой логики (количество роботов в группе — до 1000). Сложность построения бортовой системы управления «отдельными» микророботами больших групп на основе генетических алгоритмов или нейронных сетей определяется необходимостью их реализации в реальном времени на основе ограниченных по мощности вычислительных ресурсов. Поэтому с учетом затрат машинного времени размер группы для данных подходов ограничен и составляет 50 и 10 роботов в группе соответственно.

Подводя итог, можно дать следующие общие рекомендации по использованию рассмотренных подходов.

Из основных характеристик, обеспечивающих преимущества использования генетических алгоритмов в задачах планирования оптимальных маршрутов движения, можно выделить параллельность процесса поиска, вовлечение в соответствующую процедуру сразу большего числа потенциальных решений и большое число исследуемых областей в пространстве поиска. В отличие от методов оптимизации на основе нейронной сети в генетических алгоритмах не предъявляется каких-либо особых требований к целевой функции, не требуется информации об ее градиенте, функции могут быть любой сложности. Генетические алгоритмы способны обеспечить нахождение близкого к оптимальному маршрута, не встречая затруднений при возникновении проблемы локальных экстремумов.

Важной особенностью методов планирования на основе нейронной сети является возможность аппаратной поддержки централизованной системы управления на базе стационарных вычислительных комплексов с использованием нейроускорителей, а также разработка распределенных децентрализованных систем с учетом аппаратной специфики бортовых комплексов. Поскольку нейронные сети обладают способностью быстро адаптироваться к изменениям, то становится возможным их использование в нестационарных средах с динамическими препятствиями с организацией пере- или дообуче-

Таблица 1

Метод планирования	Генетические алгоритмы	Нейронные сети	Нечеткая логика
Размерность дискретного рабочего пространства	от 10x10 до 100x100	от 10x10 до 25x25	от 10x10 до 1000x1000
Коэффициент шага дискретизации	1,1 ÷ 1,5	1,1 ÷ 1,5	1,1 ÷ 1,5
Количество роботов в группе	1 ÷ 50	1 ÷ 10	1 ÷ 1000
Затраты машинного времени на поиск траектории в стационарном рабочем пространстве 20x20	21 мс	110 мс	<1 мс
Затраты машинного времени на инициализацию алгоритма	3 мс (генерация начальной популяции)	3100 мс (обучение НС)	0 мс (инициализация базы знаний)
Сенсорная информация	Полная конфигурация рабочей области	Полная конфигурация рабочей области	В ближней окрестности робота
Критерии оптимальности траектории	- по длине маршрута; - по затраченному времени; - по гладкости; - по «безопасности» маршрута	- по длине маршрута; - по затраченному времени	- по гладкости; - по «безопасности» маршрута
Управление взаимодействием роботов	Централизованное	Централизованное	Мультиагентное

ния в реальном времени.

Как следует из представленных в таблице результатов, основной характеристикой, обеспечивающей преимущества использования нечетких алгоритмов в задачах планирования, является их низкая требовательность к аппаратным ресурсам в сочетании с высокой скоростью отклика, как у классических регуляторов. К преимуществу нечеткого управления следует также отнести наличие библиотек с готовыми макетами для реализации на контроллерах.

### Список литературы

- [1] Gerke M. Genetic path planning for mobile robots // Proc. of the American Control Conference. 1999. Vol. 4. Pp. 2424–2429.
- [2] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Система планирования движения группы мобильных микроботов на основе генетических алгоритмов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 163–173.
- [3] Michail G. Lagoudakis. Mobile Robot Local Navigation with a Polar Neural Map // The Center for Advanced Computer Studies University of Southwestern Louisiana, 1999.
- [4] Даринцев О.В. Мигранов А.Б. Использование нейронной карты для планирования траектории мобильного робота // Искусственный интеллект № 3, 2009 ППП МОИ i НАН України «Наука i Освіта». С. 300–307. ISSN 1561-5359.
- [5] Ziemke T. Adaptive behavior in autonomous agents // Presence. 2003. 7(6): pp. 564–587.
- [6] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Планирование траекторий движения микробота на базе нечетких правил // Искусственный интеллект. Интеллектуальные системы (ИИ-2011): материалы Межд. науч.-техн. конфер. Донецк: ППП «Наука i Освіта». 2011. С. 228–232. ISBN 978-966-7829-49-0.

## Анализ конструктивных схем гидромеханических дозаторов топлива<sup>1</sup>

Денисова Е.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассмотрены различные варианты конструктивных схем агрегатов дозирования топлива, проведена их классификация. Показана возможность возникновения автоколебательных режимов, причиной которых является наличие неоднозначных нелинейностей и внутренних связей в агрегатах топливопитания.

Достаточно долгое время к синтезу алгоритмов управления существовал следующий подход: объект управления (силовая установка) и исполнительный механизм (агрегат дозирования топлива) описывались линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами [1]. Практический опыт доводки реальных систем управления показал неправомочность данного подхода в силу того, что в агрегатах дозирования топлива происходят достаточно сложные гидродинамические процессы, влияющие на функционирование всей системы в целом.

Целью настоящей работы является анализ конструктивных схем агрегатов дозирования топлива и их исследование как элементов системы автоматического управления (САУ) силовой установкой.

Рассматриваются различные конструктивные схемы агрегатов дозирования топлива, приведенные в [1]. Все многообразие схем по связям между элементами можно разделить на три большие группы: 1) агрегаты с гидравлическими связями между элементами; 2) агрегаты с механическими (жесткими) и механическими (гибкими) связями между элементами; 3) агрегаты смешанного вида, имеющие и гидравлические, и механические связи.

Функциональные схемы представлены на рис. 1, 2 и 3 соответственно.

Все агрегаты описываются уравнениями следующего вида:

- уравнения сил на подвижных элементах (золотниках, поршнях и т.д.);
- уравнения баланса расходов рабочей жидкости.

Ранее при проектировании САУ поступали сле-

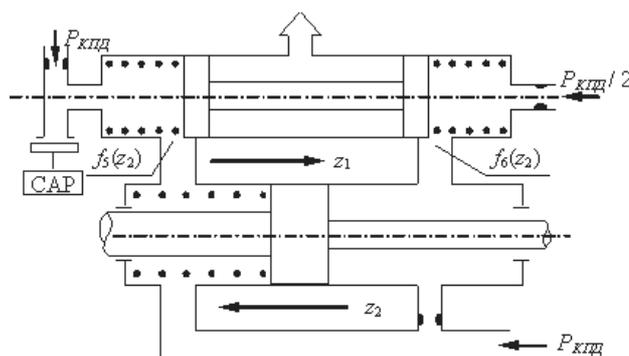


Рис. 1. Агрегат дозирования топлива с гидравлическими связями между элементами

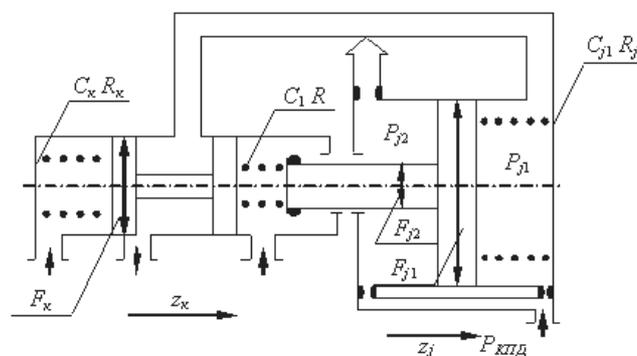


Рис. 2. Агрегат дозирования топлива с гибкими связями между элементами

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-08-97046, 11-08-00823-а).

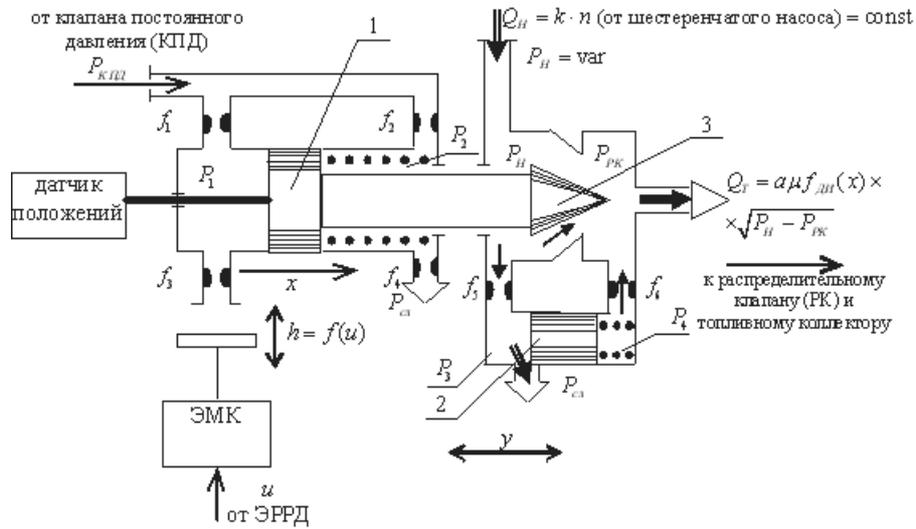


Рис. 3. Агрегат дозирования топлива с гидравлическими и механическими связями между элементами

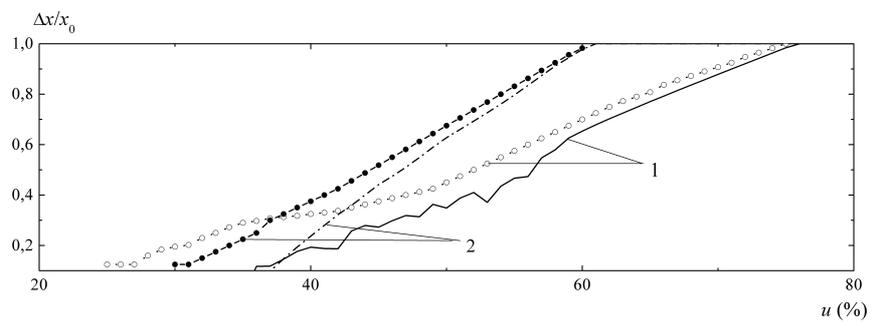


Рис. 4. Отклонение сервопоршня от начального положения  $\Delta x/x_0$  в зависимости от управляющего сигнала  $u$  (эксперимент и расчет)

дующим образом: полученные дифференциальные уравнения линеаризовались известными методами, например, разложением в ряд Тейлора, получалась придаточная функция колебательного звена, что и использовалось при синтезе алгоритмов управления силовой установкой. Практический опыт показал неправомерность подобного подхода. Поскольку именно из-за гидродинамических процессов, происходящих в агрегатах, чаще всего возникают автоколебательные режимы.

В работе [2] показано, что введение в уравнение сил на сервопоршне дроссельной иглы дополнительной составляющей, учитывающей противодействие движению одного элемента относительно другого, позволило получить характеристики сервопоршня, качественно совпадающие с экспериментальными [3]. Это показано на рис. 4.

Остановимся на схеме, представленной на рис. 1. Здесь между управляющим золотником (верхняя часть схемы) и сервопоршнем (нижняя часть схемы) существуют гидродинамические связи между левыми и правыми частями элементов. Если при описании функционирования элемента подобного вида ввести в уравнения функции изменения площадей отверстий от перемещения элемента, т.е., например,  $f_5(z_2)$  и  $f_6(z_2)$ , и рассматривать движение элемента уже с учетом введенных функций, то получим, что внутри агрегата уже имеются перекрестные связи. При этом характер связей, их величина и знак (положительная связь или отрицательная) существенным образом зависят от режима работы агрегата. Схема замещения агрегата первой группы, полученная в соответствии с его математическим описанием, приведена на рис. 5.

На рис. 6 и 7 показаны автоколебательные режимы, возникающие в агрегате при изменении его режима работы.

Далее рассмотрим агрегат дозирования топлива третьего вида как наиболее сложный элемент.

В его конструктивной схеме присутствуют: жесткая механическая связь между сервопоршнем и дроссельной иглой; гидродинамическая связь между дроссельной иглой и КПП.

Проведенные исследования показали наличие неоднозначных нелинейностей в агрегатах (см. рис. 4), которые и являются причиной возникновения автоколебательных режимов в системах управления силовой установкой.

Проведенный анализ конструктивных схем агрегатов дозирования топлива позволил выявить внутренние связи между элементами и показать их многообразие. Доказано с помощью математического моделирования, что именно внутренние связи между элементами являются причиной появле-

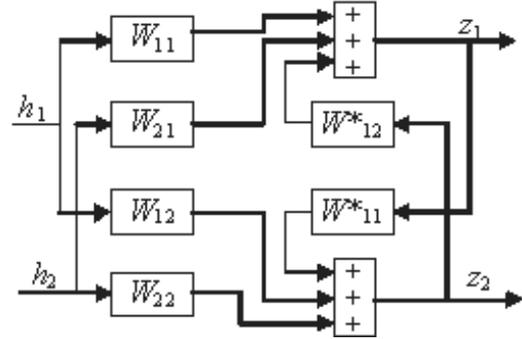


Рис. 5. Схема замещения гидромеханического исполнительного механизма — сервопоршня дроссельной иглы с золотником

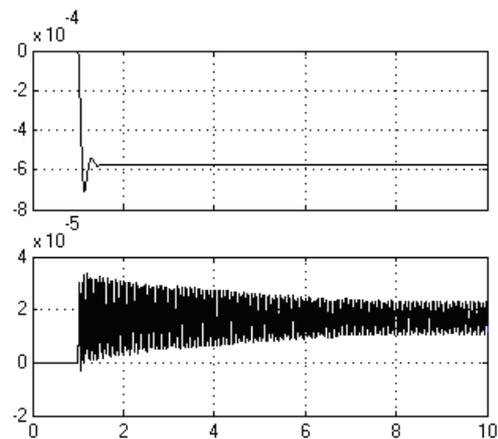


Рис. 6. Характеристики сигналов  $z_1$  и  $z_2$  соответственно при начальном перемещении золотника  $z_2^0 = 0.1 \cdot 10^{-6}$

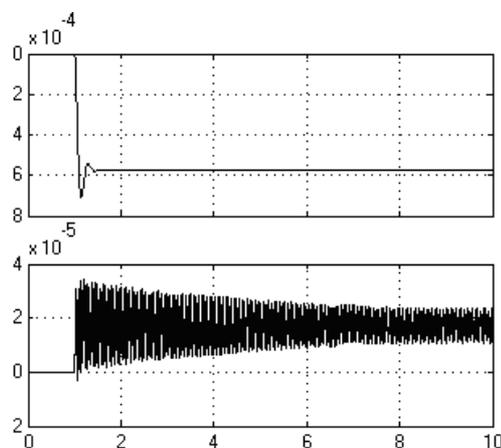


Рис. 7. Характеристики сигналов  $z_1$  и  $z_2$  соответственно при среднем положении золотника  $z_2$

ние автоколебательных процессов в системе управления силовой установкой.

### Список литературы

- [1] Добрынин А. Н. Проектирование гидромеханических систем автоматического регулирования авиадвигателей. Часть 1. М.: ЦИАМ, 1980. 417 с.
- [2] Денисова Е. В., Насибуллаева Э. Ш. Исследование гидромеханического элемента дозирования топлива // Труды Института механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 2007. Вып. 5. С. 157–162.
- [3] Денисова Е. В., Насибуллаева Э. Ш. Источники неопределенностей в элементах топливной автоматики // «Механика и процессы управления». Труды XXXVII Уральского семинара, посвященного 150-летию К. Э. Циолковского, 100-летию С. П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра «КБ им. Академика В. П. Макеева» (26–28 июня 2007 г., г. Миасс). Екатеринбург. 2007. С. 163–171.

## Двухкоординатная система автоматического управления подачей топлива в ГТД<sup>1</sup>

Денисова Е.В., Насибуллаева Э.Ш., Черникова М.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Показана возможность повышения качества управления частотой вращения ротора газотурбинного двигателя за счет введения двухкоординатного агрегата дозирования топлива. Введение двух управляемых сигналов на дозирующую иглу и на клапан постоянного перепада позволит конструктивно осуществить «грубое» и «тонкое» управления величиной расхода топлива при сохранении заданной точности по частоте вращения.

### 1. Введение

В системах автоматического управления (САУ) газотурбинными двигателями топливные агрегаты выполняют двойную роль — обеспечивают топливом двигательную установку и, одновременно, дозируют его по команде бортового компьютера в зависимости от режима работы и условий применения.

В настоящее время ведутся интенсивные разработки авиационных двигателей нового поколения для летательных аппаратов различного назначения, в том числе и для беспилотных, которые должны обладать повышенным эксплуатационным ресурсом. Обеспечение высоких тактико-технических требований к двигателям новых схем возможно только при наличии современной системы управления, одним из элементов которой является агрегат дозирования топлива (АДТ).

Появление новых поколений двигателей, введение в контур управления современных вычислительных комплексов поставили перед разработчиками САУ следующую проблему: характеристики управляющей (электронной) и исполнительной (гидромеханической) частей системы должны быть согласованы или хотя бы не противоречить друг другу. Существенным недостатком современных систем автоматического управления подачей топлива в ГТД является нестабильность статистических и динамических характеристик АДТ. Это происходит вследствие естественного разброса параметров, обусловленного недостаточной точностью

изготовления устройства дозирования топлива, изменением вязкости топлива при изменении температуры, а также вследствие других причин, таких как старение, износ материалов, что в совокупности приводит к повышению расхода топлива. Диапазон управления подачей топлива снижается из-за механического ограничения регулировочных отверстий в элементах топливной автоматики.

Известно, что количество топлива, поступающего в двигатель, зависит от двух величин: от проходного сечения дозирующей иглы и от перепада давления на клапане постоянного перепада.

Ранее управление расходом топлива  $Q_T$  производилось за счет перемещения сервопоршня агрегата дозирования топлива, что приводило только к изменению проходного сечения иглы, и, как следствие, приводило к ошибке управления по частоте вращения, в силу изменения и перепада давлений на ее сечении.

С целью повышения качества управления САУ ГТД предлагается использовать оба перечисленных параметра: как изменение проходного сечения, так и изменение перепада давления на кромке дроссельной иглы или за счет управления положением поршня клапана постоянного перепада, причем выбор конкретного управляющего параметра производится по отклонению частоты вращения ротора ГТД от заданного значения, т.е. по ошибке управления.

### 2. Постановка задачи

Ранее система автоматического управления газотурбинным двигателем имела вид, представленный на рис. 1, основными элементами которой являются ЭР — электронный регулятор, ОУ — объ-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 1 фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (проект «Научные основы робототехники и мехатроники») и РФФИ (гранты № 11-08-97046, 11-08-00823).

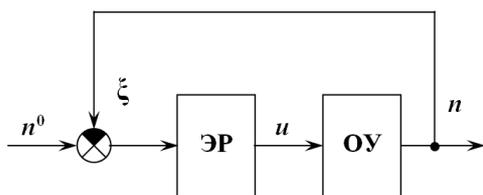


Рис. 1. Структурная схема САУ ГТД

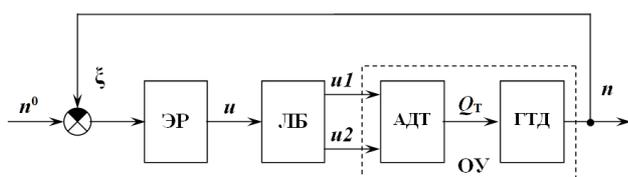


Рис. 2. Усовершенствованная схема САУ ГТД

ект управления. На вход системы поступает входной сигнал  $n^0$ , на выходе системы формируется выходной сигнал  $n$ , на вход электронного регулятора поступает сигнал ошибки  $\xi$ , полученный за счет рассогласования входного сигнала с выходным сигналом системы. На выходе электронного регулятора формируется управляющий сигнал, который поступает на вход ОУ.

В рассмотренной выше системе автоматического управления ГТД предлагается разделить объединенный ОУ на агрегат дозирования топлива и газотурбинный двигатель, а управляющий сигнал  $u$  — разделить на два сигнала: по изменению проходного сечения  $u1$  и изменению перепада давления  $u2$  (рис. 2). По ошибке управления  $\xi = n^0 - n$  формируется сигнал с выхода ЭР, который поступает или на сервопоршень дроссельной иглы, или на клапан постоянного перепада давления. Выбор конкретного сигнала осуществляет логический блок (ЛБ).

Известно, что конструктивно АДТ состоит из нескольких основных элементов: сервопоршня 1, дроссельной иглы 2, клапана постоянного давления (КПД), клапана постоянного перепада 3 (КПП), распределительного клапана и др. элементов (рис. 3), если они необходимы для функционирования системы топливопитания.

Предлагаемое устройство работает следующим образом. Электронный регулятор режима работы двигателя формирует два управляющих сигнала  $u1$  и  $u2$ , поступающие на электромагнитные клапаны (ЭМК 1 и ЭМК 2) соответственно через логический блок (ЛБ). ЭМК 1 открывает (или закрывает) заслонку, изменяя площадь слива  $s_{сл,1}$  в левой полости сервопоршня дроссельной иглы; ЭМК 2 открывает

(или закрывает) заслонку, изменяя площадь слива  $s_{сл,3}$  в левой полости КПП.

Для определенности положим, что левая заслонка закрыта на какой-то момент времени (устройство работает в режиме широтно-импульсной модуляции). В этом случае давление  $P_1$  постепенно возрастает до величины  $P_{кпд} = \text{const}$ , и сервопоршень начинает перемещаться вправо по схеме (стрелка под  $x$  показывает направление перемещения сервопоршня). Одновременно с сервопоршнем перемещается дроссельная игла, изменяя свое проходное сечение  $s_{ди}(x)$ .

Таким образом, устанавливается связь между управляющим сигналом проходного сечения  $u1$  и перемещением сервопоршня дроссельной иглы  $x$ .

Далее, от насоса (или качающего узла) приходит расход топлива  $Q_H$ , прямо пропорциональный частоте вращения ротора турбокомпрессора  $n$ , т.е.  $Q_H = k \cdot n$ . При условии, что  $n = \text{const}$  на заданном режиме работы, получаем, что  $Q_H = \text{const}$ , но при этом давление  $P_H$  является переменной величиной и зависит от положения иглы. Если дроссельная игла перемещается на закрытие (вправо по схеме), то  $P_H$  возрастает, и наоборот. При этом давление в правой полости иглы ( $P_{рк}$  — давление перед распределительным клапаном) остается без изменения. Следовательно, перепад давлений ( $P_H - P_{рк}$ ) начинает изменяться. В случае нерегулируемого КПП перепад ( $P_H - P_{рк}$ ) постепенно устанавливается постоянной величиной при условии, что поршень КПП может перемещаться в зоне регулировочного отверстия. В противном случае, если поршень КПП вышел из зоны управления, то перепад давлений ( $P_H - P_{рк}$ ) изменяется, что, в свою очередь, изменяет и расход топлива в двигатель. Ошибка управления накапливается.

В случае работы двигателя на предельно допустимых режимах поршень КПП может выйти из зоны управления. Во избежание подобного факта и предлагается ввести управление подачей топлива по двум координатам следующим образом. Пока ошибка управления не достигнет точки А (рис. 4), ЛБ подает сигнал на ЭМК 1, который открывает и закрывает заслонку в режиме широтно-импульсной модуляции, т.е. происходит решение задачи управления по положению сервопоршня дроссельной иглы  $x$  в левой части схемы (рис. 3). Происходит достаточно быстрое уменьшение ошибки  $\xi$  в Зоне 1. Это так называемое «грубое» управление по положению сервопоршня. При снижении ошибки до критического значения (до точки А) ЛБ передает управление на ЭМК 2, который открывает и закрывает заслонку в режиме широтно-импульсной модуляции. В этом случае в Зоне 2 ошибка стремится

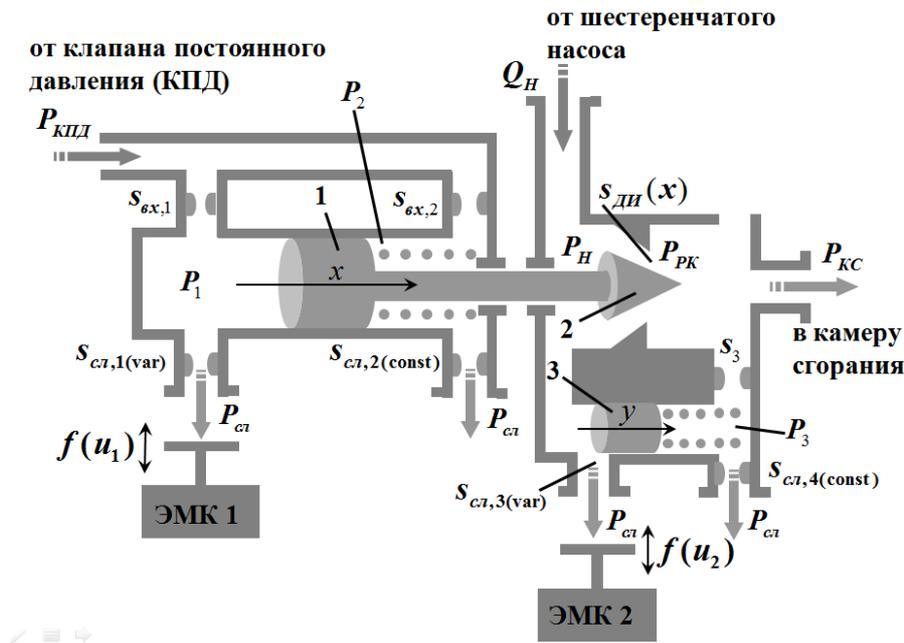
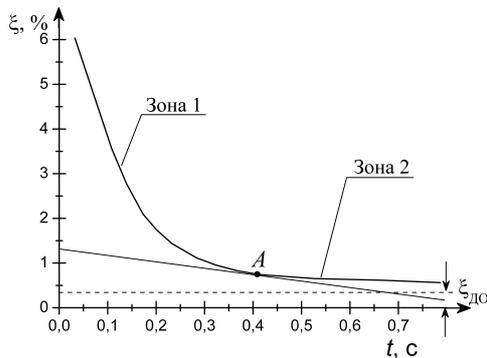


Рис. 3. Конструктивная схема АДТ

Рис. 4. График ошибки частоты вращения ротора газотурбинного двигателя ( $\xi_{до} \approx 0,3\%$  от текущего значения по частоте вращения ротора)

ся к допустимой  $\xi_{до}$  медленно. Таким образом осуществляется «тонкое» управление по перепаду давлений. По сигналу системы автоматического управления, в случае возникновения аварийной ситуации, ЛБ подает сигналы на ЭМК 1 и ЭМК 2 одновременно, открываются оба слива и топливо сливается из АДТ.

### 3. Выводы

Показана возможность повышения качества управления частотой вращения ротора газотурбинного двигателя за счет введения двухкоординатного агрегата дозирования топлива.

Введение двух управляемых сигналов на дозирующую иглу и на клапан постоянного перепада позволит конструктивно осуществить «грубое» и «тонкое» управление величиной расхода топлива при сохранении заданной точности по частоте вращения.

Для того чтобы осуществить «грубое» и «тонкое» управление используется график ошибки частоты вращения ротора газотурбинного двигателя, где части графика, обозначенные «Зона 1» и «Зона 2», осуществляют управление соответственно. Такое управление позволяет увеличить эффективность управления подачей топлива, что в свою очередь приведет к повышению качества управления всей системы в целом.

### Список литературы

- [1] Денисова Е.В., Насибуллаева Э.Ш. Моделирование задачи функционирования агрегата дозирования топлива // Труды Института механики УНЦ РАН. Вып. 7 / Под ред. С.Ф. Урманчеева. Уфа: Гилем, 2010. С. 118–128.

# Решение коэффициентной обратной задачи для уравнения аномальной диффузии дробного порядка

Карачурина Э.В., Лукащук С.Ю.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Рассматривается коэффициентная обратная задача для уравнения аномальной диффузии, содержащего производные дробного порядка типа Римана–Лиувилля или Капуто по временной переменной. Предлагается алгоритм идентификации коэффициента аномальной диффузии, являющегося функцией концентрации. Алгоритм основан на сведении коэффициентной обратной задачи к задаче минимизации функционала невязки (экстремальной задаче), которая решается методом скорейшего спуска. Приводятся основные расчетные соотношения, необходимые для вычисления градиента функционала невязки. Эффективность предложенного алгоритма иллюстрируется рядом тестовых примеров.

## 1. Введение

Процессы аномального диффузионного переноса часто наблюдаются в неупорядоченных сложных системах, таких как пористые и трещиновато-пористые среды, аморфные полупроводники, жидкие полимеры и стекла, перколяционные кластеры и самоподобные фрактальные среды, турбулентные потоки жидкости, газа и плазмы [1–3]. Аномальность таких процессов обычно заключается в их немарковской стохастической природе, которая обусловлена эффектами памяти среды, пространственной нелокальности и перемежаемости. Данные эффекты не могут быть адекватно описаны математическими моделями в виде дифференциальных уравнений в частных производных и требуют перехода к интегро-дифференциальным моделям.

Одним из эффективных и широко используемых подходов для описания процессов аномальной диффузии является использование аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка [3–5]. В этом случае уравнение переноса является интегро-дифференциальным уравнением, содержащим производные дробного порядка по временной и/или пространственным переменным.

Для успешного использования таких уравнений на практике необходимо знать значения коэффициентов аномального переноса. Тем не менее, их непосредственное экспериментальное определение представляет большую сложность в силу специфики процессов аномального переноса, поэтому основным подходом для их нахождения становится решение соответствующих коэффициентных обрат-

ных задач. В настоящее время предложен ряд аналитических и численных подходов к идентификации коэффициентов аномального переноса на основе дробно-дифференциальных уравнений [6–8], однако они не позволяют восстанавливать коэффициенты, являющиеся функцией потенциала переноса.

В данной работе предлагается алгоритм идентификации коэффициента аномальной диффузии, зависящего от концентрации, путем сведения соответствующей коэффициентной обратной задачи к экстремальной задаче для функционала невязки. Экстремальная задача решается в алгоритме методом скорейшего спуска [9]. Для классического уравнения теплопроводности данный подход хорошо известен и нашел широкое применение в практике теплофизических исследований [10]. Тем не менее, в случае дробно-дифференциальных уравнений аномальной диффузии этот подход имеет ряд особенностей, связанных с построением и решением сопряженных задач и вычислением составляющих градиента функционала невязки.

## 2. Постановка задачи

Пусть процесс аномального переноса моделируется одномерным дробно-дифференциальным уравнением

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha u = (a(u)u_x)_x, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < L. \quad (1)$$

Здесь  $u(x, t)$  — функция концентрации;  $a(u)$  — коэффициент аномальной диффузии;  ${}_0\mathcal{D}_t^\alpha$  — левосторонняя производная дробного порядка  $\alpha$ . В дальнейшем будем полагать, что  $\alpha \in (0, 1)$ . В этом случае (1) описывает процесс субдиффузии [2, 3].

В качестве производной дробного порядка  ${}_0D_t^\alpha$  по временной переменной в уравнении (1) наиболее часто используются левосторонние дробные производные двух типов: Римана–Лиувилля [4]

$$({}_0D_t^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2)$$

и Капуто [5]

$$({}_0^C D_t^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3)$$

Отметим, что использование дробной производной Римана–Лиувилля приводит, в общем случае, к решению с особенностью в точке  $t = 0$  порядка  $1 - \alpha$ . Дробная производная Капуто всегда может быть выражена через дробную производную Римана–Лиувилля:

$$({}_0^C D_t^\alpha u)(x, t) = ({}_0D_t^\alpha u)(x, t) - \frac{u(x, 0)}{t^\alpha \Gamma(1-\alpha)}. \quad (4)$$

Таким образом, при  $u(x, 0) = 0$  левосторонние дробные производные Римана–Лиувилля (2) и Капуто (3) совпадают.

Для уравнения (1) ставится первая начальная краевая задача. При этом в случае использования дробной производной типа Римана–Лиувилля (2) начальное условие имеет вид

$$({}_0I_t^{1-\alpha} u)(x, 0) = u_0(x), \quad (5)$$

где

$$({}_0I_t^{1-\alpha} u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (6)$$

— левосторонний интеграл дробного порядка  $1 - \alpha$ ;  $u_0(x)$  — заданная функция. При использовании дробной производной типа Капуто (3) начальное условие имеет традиционную форму:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (7)$$

Граничные условия не зависят от вида используемой дробной производной по времени и в случае первой краевой задачи имеют классический вид:

$$u(0, t) = q_0(t), \quad u(L, t) = q_L(t). \quad (8)$$

Целью данной работы является разработка численного алгоритма для нахождения коэффициента аномальной диффузии  $a(u)$ . Порядок дробного

дифференцирования  $\alpha$  считается известным. Также считаются известными (например, по результатам эксперимента) приближенные значения решения  $\tilde{u}(x, t)$  в некотором количестве  $N \geq 1$  внутренних точек отрезка  $[0, L]$ :

$$\tilde{u}(d_i, t) = f_i(t), \quad i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

а также оценка  $\varepsilon$  погрешности измерений:

$$|\tilde{u}(d_i, t) - u(d_i, t)| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, N}, \quad 0 < t \leq T. \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) определяют априорную информацию, используемую для решения поставленной коэффициентной обратной задачи.

### 3. Алгоритм идентификации

Задачу восстановления коэффициента аномальной диффузии можно сформулировать как экстремальную задачу, если рассмотреть функционал невязки

$$J(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^T \rho_i(u(d_i, t; a(u)) - f_i(t))^2 dt. \quad (11)$$

Здесь  $u(d_i, t; a(u))$  — решение соответствующей краевой задачи (1), (5), (8) или (1), (7), (8);  $\rho_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) — весовые множители, характеризующие степень достоверности экспериментальных данных. В случае, когда ошибкой эксперимента можно пренебречь,  $a(u)$  находится из условия минимума функционала невязки:

$$a(u) = \arg \min J(a). \quad (12)$$

Если ошибка эксперимента значима, то искомое значение коэффициента аномальной диффузии находится из принципа невязки:

$$J(a) = \frac{\varepsilon^2 T}{2} \sum_{i=1}^N \rho_i. \quad (13)$$

Представим искомую функцию в виде

$$a(u) = \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(u), \quad (14)$$

где  $\{\varphi_k(u)\}$  ( $k = \overline{1, m}$ ) — заданная система базисных функций. Тогда задача отыскания функции  $a(u)$  сводится к задаче нахождения вектора коэффициентов разложения (14):  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

Решение экстремальной задачи (12) или (13) может быть эффективно выполнено с использованием градиентных методов минимизации. Для их

использования необходимо иметь алгоритм численного вычисления градиента функционала  $J(a)$ . Построим этот алгоритм. Для определенности будем рассматривать уравнение (1) с дробной производной типа Римана–Лиувилля.

Введем в рассмотрение фиктивные слои, границы которых проходят через точки, в которых известны значения функции  $u(x, t)$ , т.е. имеют координаты  $x = d_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Задачу (1), (5), (8) представим в виде системы краевых задач для нескольких слоев с одинаковыми свойствами и идеальным контактом между ними:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha u_i &= (a(u)u_{ix})_x, \\ ({}_0I_t^{1-\alpha} u_i)(x, 0) &= u_{0i}(x), \\ u_1(0, t) &= q_0(t), \quad u_{N+1}(L, t) = q_L(t), \\ u_i(d_i, t) &= u_{i+1}(d_i, t), \\ u_{ix}(d_i, t) &= u_{i+1,x}(d_i, t). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $d_0 = 0$ ,  $d_{N+1} = b$ ,  $u_i(x, t)$  — искомая функция в  $i$ -ом слое ( $x \in [d_{i-1}, d_i]$ ).

Рассмотрим задачу минимизации функционала невязки (11) при ограничениях (15). Составим функционал Лагранжа:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^T \int_{d_{i-1}}^{d_i} \psi_i(x, t) [(a(u)u_{ix})_x - {}_0D_t^\alpha u_i] dx dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \gamma_i(x, 0) (({}_0I_t^{1-\alpha} u_i)(x, 0) - u_{0i}(x)) dx + \\ &+ \int_0^T \eta(d_0, t) [q_0(t) - u_1(0, t)] dt + \\ &+ \int_0^T \eta(d_{N+1}, t) [q_L(t) - u_{N+1}(d_{N+1}, t)] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^T \nu(d_i, t) [u_i(d_i, t) - u_{i+1}(d_i, t)] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^T \xi(d_i, t) [u_{ix}(d_i, t) - u_{i+1,x}(d_i, t)] dt, \end{aligned}$$

где  $\psi_i(x, t)$ ,  $\gamma_i(x, t)$  ( $i = \overline{1, N+1}$ ),  $\nu(d_i, t)$ ,  $\xi(d_i, t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  $\eta(d_0, t)$ ,  $\eta(d_{N+1}, t)$  — неопределенные множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (15).

Допустим, что функция  $a(u)$  получила некоторое приращение  $\Delta a(u)$ . Тогда функция  $u_i(x, t)$  изменится на некоторую величину  $\Delta u_i(x, t)$ . Можно показать, что  $\Delta u_i(x, t)$  удовлетворяют следующей

системе краевых задач:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha \Delta u_i &= (a \Delta u_{ix})_x + a_u (\Delta u_i u_{ix})_x + \\ &+ a_{uu} \Delta u_i (u_{ix})^2 + \Delta a u_{ixx} + \Delta a_u (u_{ix})^2, \\ \Delta u_i(x, 0) &= 0, \\ \Delta u_i(d_i, t) &= \Delta u_{i+1}(d_i, t), \\ \Delta u_{ix}(d_i, t) &= \Delta u_{i+1,x}(d_i, t), \\ \Delta u_1(0, t) &= 0, \quad \Delta u_{N+1}(d_{N+1}, t) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Вариация функционала  $\Phi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^T \int_0^{d_i} \psi_i(x, t) [(a \Delta u_{ix})_x - {}_0D_t^\alpha \Delta u_i + \\ &+ \Delta u_i (a_u u_{ixx} + a_{uu} (u_{ix})^2) + a_u \Delta u_{ix} u_{ix} + \\ &+ \Delta a_u (u_{ix})^2 + \Delta a u_{ixx}] dx dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \gamma_i(x, 0) \Delta u_i(x, 0) dx + \\ &+ \int_0^T \eta(d_0, t) \Delta u_1(0, t) dt + \\ &+ \int_0^T \eta(d_{N+1}, t) \Delta u_{N+1}(d_{N+1}, t) dt + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^T \nu(d_i, t) [\Delta u_i(d_i, t) - \Delta u_{i+1}(d_i, t)] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^T \xi(d_i, t) [\Delta u_{ix}(d_i, t) - \Delta u_{i+1,x}(d_i, t)] dt. \end{aligned}$$

Из условия  $\delta \Phi = 0$  получаем систему сопряженных краевых задач:

$$\begin{aligned} -{}_t^C D_T^\alpha \psi_i &= a(u) \psi_{ixx}, \\ \psi_i(x, T) &= 0, \\ \psi_1(d_0, t) &= 0, \quad \psi_{N+1}(d_{N+1}, t) = 0, \\ \psi_i(d_i, t) &= \psi_{i+1}(d_i, t), \\ a(u(d_i, t)) (\psi_{i+1,x}(d_i, t) - \psi_{i,x}(d_i, t)) &= \\ &= \rho_i(u_i(d_i, t) - f_i(t)), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$({}_t^C D_T^\alpha \psi_i)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

— правосторонняя дробная производная типа Капуто. Таким образом, сопряженный дифференциальный оператор для левосторонней дробной производной типа Римана–Лиувилля представляется через правостороннюю дробную производную типа Капуто. Легко показать, что имеет место и обратное утверждение.

Здесь необходимо сделать важное замечание. Поскольку для сопряженной задачи «начальное»

условие всегда нулевое:  $\psi_i(x, T) = 0$ , то в этом случае соответствующие правосторонние производные типа Римана–Лиувилля и Капуто совпадают (см., например, [3, 5]). Поэтому сопряженная задача является одной и той же как в случае использования в исходном уравнении (1) производной Римана–Лиувилля, так и производной Капуто.

В результате для вариации функционала (11) находим

$$\delta J = \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^T \int_{d_{i-1}}^{d_i} \psi_i(x, t) \left[ \Delta a_u (u_{ix})^2 + \Delta a u_{ixx} \right] dx dt.$$

Используя представление (14), получим

$$\delta J = \sum_{k=1}^m a_k \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^T \int_{d_{i-1}}^{d_i} \psi_i(x, t) \times \left[ \frac{d\varphi_k(u)}{du} (u_{ix})^2 + \varphi_k(u) u_{ixx} \right] dx dt,$$

откуда находим представления для отдельных компонент градиента функционала невязки:

$$J'_{a_k} = \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^T \int_{d_{i-1}}^{d_i} \psi_i(x, t) \times \left[ \frac{d\varphi_k(u)}{du} (u_{ix})^2 + \varphi_k(u) u_{ixx} \right] dx dt, \quad k = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Зная градиент функционала невязки, можно использовать для решения экстремальной задачи градиентные методы. Например, в случае применения метода скорейшего спуска итерационный процесс для восстановления вектора параметров  $A$  строится по формуле

$$A_{n+1} = A_n - \beta_n J'_n, \quad (19)$$

где параметр спуска  $\beta_n$  на  $n$ -й итерации вычисляется из условия

$$\beta_n = \arg \min_{\beta} J(A_n - \beta J'_n).$$

В силу линейности функции  $\Delta u(x, t, \beta_n J'_n)$  относительно параметра  $\beta_n$ , функционал невязки на  $(n+1)$ -ой итерации можно представить в виде:

$$J^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^T \rho_i \times \left( u(d_i, t, A_n) + \beta_n \Delta u(d_i, t, J'_n) - f_i(t) \right)^2 dt.$$

Дифференцируя это равенство по  $\beta_n$  и приравнявая полученное выражение к нулю, получим:

$$\beta_n = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T \rho_i \left( u(d_i, t, A_n) - f_i(t) \right) \Delta u(d_i, t, J'_n) dt}{\sum_{i=1}^N \int_0^T \rho_i \left( \Delta u(d_i, t, J'_n) \right)^2 dt}. \quad (20)$$

Таким образом, алгоритм восстановления коэффициента  $a(u)$  сводится к следующим шагам:

- задается начальное приближение искомого параметра  $a(u)$ ;
- решается система прямых задач (15);
- решается система сопряженных задач (17);
- решается система задач для  $\Delta u_i$  (16);
- по формулам (18) вычисляются компоненты градиента функционала невязки;
- по (20) вычисляется новое значение  $\beta_n$ ;
- по (19) вычисляется новое приближение вектора  $A$ ;
- проверяется условие сходимости и при необходимости процесс вычислений повторяется.

Численное решение прямых и сопряженных краевых задач выполняется с помощью неявных конечно-разностных схем. Дробная производная Римана–Лиувилля дискретизируется на основе формулы Грюнвальда–Летникова [4]:

$$({}_0 D_t^\alpha u)(x_i, t_n) \approx (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^\alpha u_i^{n-j},$$

где

$$\omega_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)};$$

$\Delta t$  — шаг сетки по временной переменной;  $(x_i, t_n)$  — координаты узлов конечно-разностной сетки,  $u_i^n = u(x_i, t_n)$ . Дискретизация дробной производной Капуто получается из формулы связи (4).

Правые части всех уравнений, содержащие производные целого порядка, дискретизируются классическим образом со вторым порядком точности по пространственной переменной по неявной схеме. В результате при решении как прямых, так и сопряженных задач получаются системы с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом прогонки.

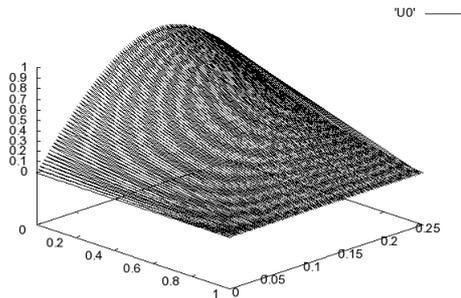


Рис. 1. Решение прямой задачи при  $a = \text{const}$

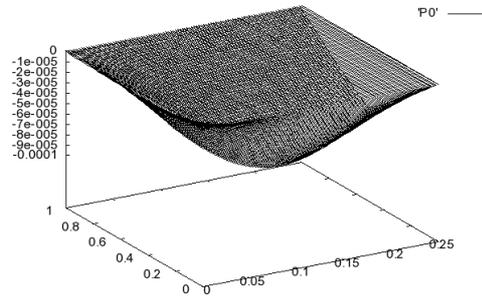


Рис. 2. Решение сопряженной задачи при  $a = \text{const}$  на 1-ой итерации

#### 4. Результаты численных расчетов

Приведем результаты некоторых численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенного алгоритма. Численные эксперименты проводились по классической схеме: сначала решалась прямая задача с заданным (истинным) значением  $a(u)$  и определялось поле концентрации, которое затем использовалось в качестве априорной информации при решении обратной задачи по описанному выше алгоритму.

Параметры тестовой задачи:

$$\alpha = 0.5, L = 1, T = 0.25, \\ u_0(x) = 0, q_0(t) = \sin(10t), q_L(t) = 0.$$

В качестве базисных функций в (14) использовались  $\varphi_k(u) = u^k, k = \overline{0, m}$ . В качестве априорной информации считалось известным изменение концентрации во времени в центральной точке  $x = 0.5$ .

Сначала рассмотрим результаты численного эксперимента по восстановлению постоянного коэффициента аномальной диффузии. Истинное значение:  $a = 100$ . В качестве начального приближения использовалось значение  $a_0 = 150$ . За 15 итераций процесс сошелся с точностью  $10^{-12}$  по функционалу невязки, что обеспечило точность восстановления коэффициента диффузии  $10^{-9}$ . Соответствующее поле концентрации показано на рис. 1. На рис. 2 показано решение сопряженной задачи на первой итерации. На рис. 3 приведена зависимость параметра спуска  $\beta_n$  от номера итерации.

Существенно большее количество итераций требуется для восстановления вектора параметров (14). При точной зависимости  $a(u) = 100 + 10u + 10u^2$  с начального приближения  $A_0 = (150, 15, 5)$  процесс сошелся с точностью  $10^{-12}$  по функционалу невязки за 26383 итерации. При этом точность восстановления элементов вектора  $A$  составила  $10^{-6}$ . Графики решения прямой и сопряженной задач при этом качественно аналогичны приведен-

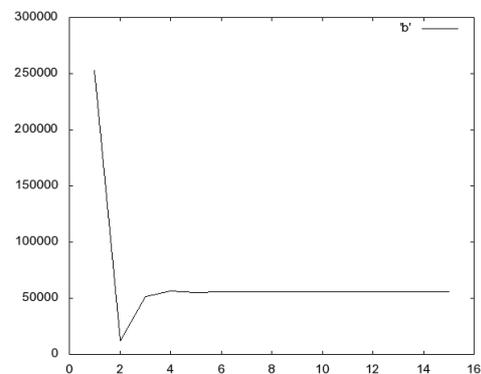


Рис. 3. Зависимость параметра спуска от номера итерации при  $a = \text{const}$

ным на рис. 1 и 2, график зависимости параметра спуска  $\beta_n$  от номера итерации показан на рис. 4.

Наиболее интересным представляется случай восстановления коэффициента  $a(u)$  при условии, что он точно не разлагается по выбранному базису  $\varphi_k$  при конечном  $m$ . При  $a(u) = 100e^{0.3u}$  и  $m = 3$  процесс сошелся к  $A = (100.068, 29.651, 5.237)$  за 12220 итераций. На рис. 5 показана зависимость функционала невязки от номера итерации, а на рис. 6 — зависимость параметра спуска  $\beta_n$  от номера итерации.

Приведенные примеры показывают, что предложенный алгоритм позволяет достаточно точно и эффективно решать задачу восстановления коэффициента аномальной диффузии.

#### 5. Заключение

Приведенный в работе алгоритм в настоящее время не имеет строгого математического обоснования, поскольку отсутствует целый ряд важных теорем существования и единственности решения в классах обобщенных функций для дробно-дифференциальных уравнений аномального пере-

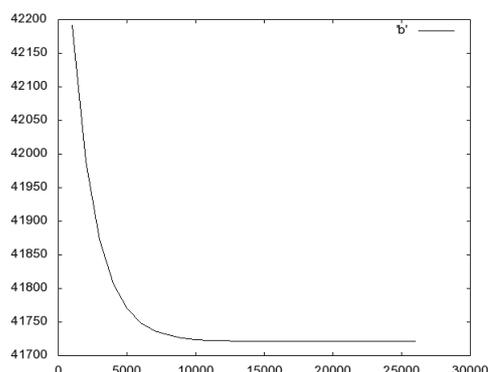


Рис. 4. Зависимость параметра спуска от номера итерации при  $a(u) = 100 + 10u + 10u^2$

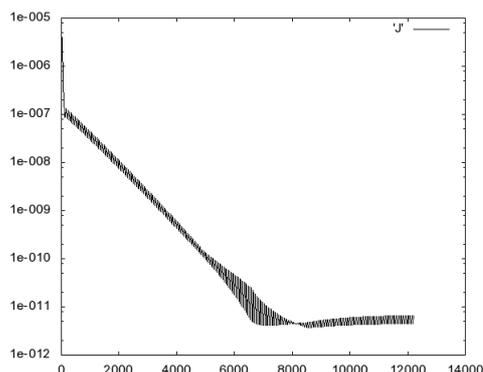


Рис. 5. Зависимость функционала невязки от номера итерации при  $a(u) = 100e^{0.3u}$

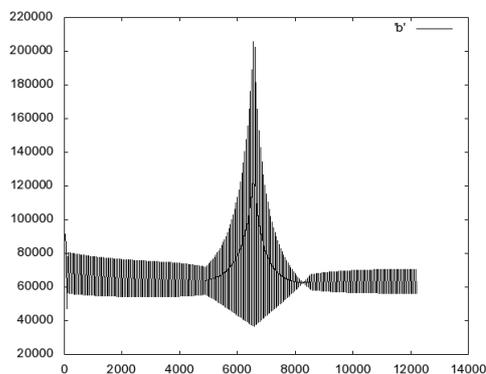


Рис. 6. Зависимость параметра спуска от номера итерации при  $a(u) = 100e^{0.3u}$

носа. Работоспособность алгоритма подтверждается численными экспериментами, однако границы применимости подхода остаются весьма расплывчатыми. Поэтому в качестве основных направлений дальнейшего развития работы можно указать, во-первых, получение теоретических оценок для скорости сходимости алгоритма и, во-вторых, его строгое математическое обоснование.

### Список литературы

- [1] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach // *Phys. Rep.* 2000. V. 339, P. 1–77.
- [2] Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
- [3] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
- [4] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [5] Podlubny I. Fractional differential equations. Academic press, San Diego, 1999. 240 p.
- [6] Bondarenko A.N., Ivaschenko D.S. Numerical methods for solving inverse problems for time fractional diffusion equation with variable coefficient // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2009. Vol. 17, № 5. P. 419–440.
- [7] Lukashchuk S.Yu. Estimation of parameters in fractional subdiffusion equations by the time integral characteristics method // *Computers and Mathematics with Applications*. 2011. V. 62, №. 3. P. 834–844.
- [8] Maryshev B., Cartalade A., Latrille C., Joelson M. Neel M.C. Adjoint state method for fractional diffusion // *Proc. of the Fifth Symposium on Fractional Differentiation and Its Applications*, May 14–17 2012, Hohai University, Nanjing, China. 2012. 6 p.
- [9] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
- [10] Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.

# Влияние высокочастотных электромагнитных полей на адсорбционные процессы в пористой среде<sup>1</sup>

Ковалева Л.А.<sup>\*,\*\*</sup>, Степанова З.Ю.<sup>\*\*</sup>, Камалтдинов И.М.<sup>\*,\*\*</sup>, Замула Ю.С.<sup>\*,\*\*</sup>

\*Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», БашГУ, Уфа,

\*\*Башкирский государственный университет, Уфа

Представлены результаты экспериментального исследования процесса адсорбции полярных углеводородов в насыщенных пористых средах после воздействия высокочастотным электромагнитным (ВЧ ЭМ) полем и, для сравнения, тепловым нагревом. Приведены зависимости извлеченного объема углеводородов из моделей от температуры нагрева среды. При сравнении полученных экспериментальных данных отмечено дополнительное влияние ВЧ ЭМ поля на десорбцию асфальтенов с поверхности пористой среды, что, в свою очередь, ведет к увеличению степени извлечения углеводородов из моделей. В основу теоретического рассмотрения положены термодинамическое обоснование и математическое моделирование процессов теплопереноса в насыщенной среде при ВЧ ЭМ воздействии. В результате исследований установлено, что при воздействии ВЧ ЭМ поля процесс адсорбции замедляется, что положительно сказывается на фильтрационной способности насыщенной породы. При этом учтено, что уравнение кинетики сорбции, основанное на законе Генри, включает слагаемое, отражающее вклад теплового и ЭМ полей. Для выявления механизма адсорбции и десорбции полярных компонентов на поверхности пористой среды под действием ВЧ ЭМ поля проведено исследование влияния поля на процесс адсорбции асфальтенов с помощью атомно-силовой микроскопии (АСМ). По полученным АСМ изображениям отмечено изменение ориентации асфальтенов на подложке в направлении действия поля.

## 1. Введение

Тепловые и электромагнитные методы нагрева насыщенных углеводородных сред применяются для извлечения высоковязких нефтей и битумов. Фильтрация такой нефти в пористой среде сопровождается некоторым уменьшением расхода. Это явление объясняется образованием на поверхности поровых каналов адсорбционных слоев полярных компонентов нефти, изменяющих молекулярную природу твердой поверхности, и являющихся базой для формирования граничных слоев нефти, вязкость которых на порядок выше вязкости нефти в объеме, а толщина в ряде случаев соизмерима с радиусом поровых каналов. В результате этого явления уменьшается сечение фильтрационных каналов пористой среды и снижаются ее проницаемость и нефтеотдача. При извлечении высоковязких нефтей посредством тепловых методов или же закачки растворителя основной упор делается на разрушение образующегося адсорбционного слоя.

Одним из тепловых методов является ВЧ ЭМ воздействие на призабойную зону пласта (ПЗП), позволяющее проводить направленную, мощную тепловую ее обработку.

Целью данной работы являлось исследование влияния ВЧ ЭМ поля на адсорбционные процессы в насыщенных пористых средах.

## 2. Экспериментальные исследования

Для определения и оценки ВЧ ЭМ воздействия на процесс адсорбции полярных углеводородов проводились эксперименты, осуществляемые под влиянием ВЧ ЭМ поля и, для сравнения, под действием теплового нагрева. Необходимым условием проведения такого сопоставительного эксперимента являлось соблюдение совершенно одинаковых параметров (физические характеристики моделей, температура ВЧ и теплового нагрева и др.).

### 2.1. Постановка эксперимента

Модель пористой среды представляла собой пластмассовый стаканчик диаметром 1 см, длиной 10 см, с небольшими отверстиями на дне для отгонки нефти на центрифуге. В качестве наполнителя

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России (грант 11.G34.31.0040) и РФФИ (грант 11-01-97013).

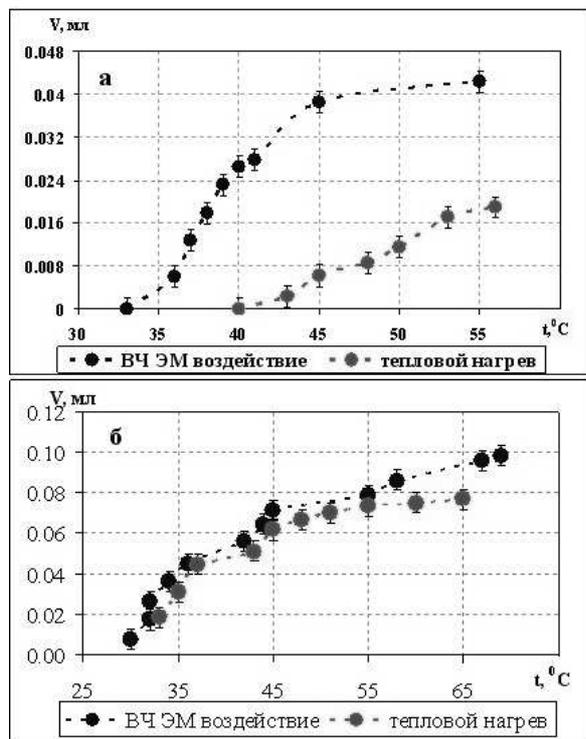


Рис. 1. Зависимость количества вышедшей нефти после ВЧ ЭМ либо теплового воздействия от температуры нагрева для кварцевого песка фракции 0,2 мм (а) и фракции 0,6 мм (б)

модели использован кварцевый песок (фракции 0,2 и 0,6 мм) и силикагель, а в качестве насыщающей жидкости — высоковязкая нефть.

Алгоритм проведения эксперимента состоял в следующем: вначале насыщали образцы нефтью, далее они отстаивались в течение суток для того чтобы все полярные компоненты успели адсорбироваться. Затем образцы помещались в центрифугу для извлечения свободной нефти, содержащейся в моделях. Следующий этап эксперимента, который включал в себя воздействие на пленочную нефть, начинался ВЧ ЭМ или тепловым воздействием на образцы, причем температуры нагрева для двух видов воздействия были одинаковыми. После нагрева до определенной температуры пленочный слой отгонялся из образцов на центрифуге, и измерялось количество вышедшей нефти. Третий этап заключался в воздействии на адсорбированную нефть, который заканчивался полным экстрагированием адсорбированной нефти растворителем и определением количества вышедшей из образцов смеси растворителя и нефти. Количество нефти, вышедшей из образцов, определялось колориметрическим спектрофотометром.

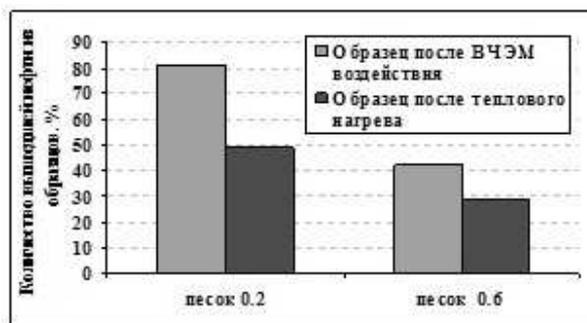


Рис. 2. Количество вышедшей нефти из образцов по отношению к первоначальной насыщенности, %

## 2.2. Результаты эксперимента

На первом этапе в случае с кварцевым песком фракции 0,2 мм центрифугирование не дало отделения свободной нефти, а из модели с кварцевым песком фракции 0,6 мм выделилось 0,21 мл нефти.

На втором этапе в образцах с кварцевым песком фракции 0,2 мм значение вышедшей пленочной нефти при ВЧ ЭМ воздействии в 2 раза больше количества нефти, вышедшей при тепловом нагреве (рис. 1(а)).

Это означает, что при ВЧ ЭМ воздействии кроме теплового действия проявляются дополнительные (пондеромоторные) силы, которые изменяют структуру нефти. В случае с кварцевым песком фракции 0,6 мм такое количественное различие заметно меньше. Чем меньше диаметр частиц, тем больше удельная поверхность породы и, следовательно, количество адсорбированных частиц больше. Этим и объясняется то, что количество вышедшей нефти больше в тех образцах, где крупнее фракция песка.

На третьем этапе воздействовали на адсорбированный слой, посредством полного экстрагирования растворителем. Можно отметить, что в образцах с кварцевым песком фракции 0,2 мм (рис. 2) вышло значительно больше нефти, чем в образцах с кварцевым песком 0,6 мм (в образцах после ВЧ ЭМ воздействия количество вышедшей нефти больше, чем в образцах после теплового нагрева). Здесь следует, однако, учесть, что у образцов с крупной фракцией песка и само количество адсорбированной нефти было значительно меньше, так как часть ее находилась в свободном состоянии и была отделена на центрифуге.

### 3. Математическое моделирование

Было проведено также теоретическое исследование влияния ВЧ ЭМП на процессы фильтрации углеводородных систем, содержащих поверхностно-активные компоненты, которые по мере движения в пористой среде адсорбируются на ее поверхности. Для этого произведено математическое моделирование трех вариантов осуществления процесса фильтрации в пористой среде: при воздействии ВЧ ЭМ полем, тепловом прогреве и без внешнего воздействия. Основным уравнением, описывающим рассматриваемые процессы фильтрации в пористой среде, является уравнение конвективной диффузии относительно изменяющейся во времени и пространстве массовой концентрации адсорбирующихся компонентов нефти  $C$  в поровом объеме и их концентрации на поверхности породы  $a$  (задача одномерная):

$$\frac{\partial a}{\partial t} + m \frac{\partial C}{\partial t} + \nu \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D(\alpha_T + \alpha_T^E) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Здесь  $m$  — пористость среды;  $D$  — коэффициент диффузии;  $\alpha_T$  — параметр термодиффузии;  $\alpha_T^E$  — параметр термодиффузии электромагнитного происхождения;  $T$  — температура среды.

Скорость фильтрации  $\nu$  определяется из закона Дарси:

$$\nu = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2)$$

а распределение давления  $P$  и температуры  $T$  — из уравнений пьезопроводности и теплопроводности, соответственно:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{m\beta_f + \beta_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$c_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \nu c_f \rho_f \frac{\partial T}{\partial x} + Q, \quad (4)$$

в которых  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды;  $\beta_f$ ,  $\beta_s$  — коэффициенты сжимаемости соответственно флюида и скелета породы;  $c_m$ ,  $\rho_m$  — коэффициенты удельной теплоемкости и плотности насыщенной пористой среды;  $k$  — проницаемость;  $Q$  — распределенные источники тепла, возникающие в среде вследствие поглощения энергии ВЧ ЭМП;  $c_f$ ,  $\rho_f$ ,  $\mu$  — соответственно удельная теплоемкость, плотность и динамическая вязкость флюида.

Выражение для распределенных источников тепла в случае ВЧ ЭМ воздействия на среду записывается в виде:

$$Q = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon' \operatorname{tg} \delta |E|^2, \quad (5)$$

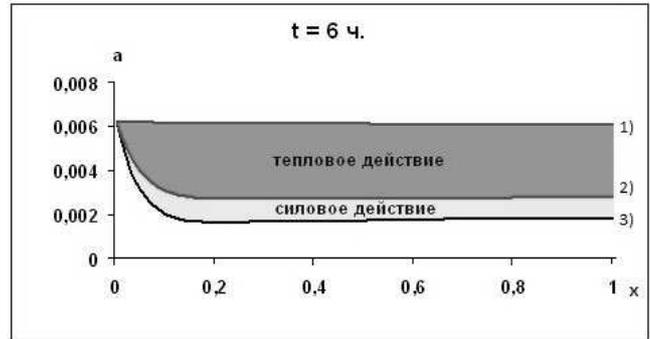


Рис. 3. Распределение концентрации адсорбированной нефти без внешнего воздействия (1), при тепловом прогреве (2) и при воздействии ВЧ ЭМ полем (3) в различные моменты времени

где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота ЭМ поля;  $f$  — циклическая частота поля;  $\operatorname{tg} \delta$  — тангенс угла диэлектрических потерь среды.

Предполагается, что вязкость флюида зависит от температуры и определяется из выражения:

$$\mu = \mu_0 \exp(-\gamma(T - T_0)), \quad (6)$$

где  $T_0$  — первоначальная температура;  $\mu_0$  — вязкость флюида при  $T = T_0$ ;  $\gamma$  — температурный коэффициент.

Используем выражение для кинетики сорбции, полученное в работе [5]:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (\beta_m + \beta^{em}) \times \left[ c - a \gamma_0^{-1} \exp \left( -\frac{(Q_m + Q^{em})}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right) \right]. \quad (7)$$

Здесь  $\beta_m$  — константа скорости сорбции;  $\beta^{em}$  — константа скорости сорбции электромагнитного происхождения;  $\gamma_0$  — постоянная Генри;  $Q_m + Q^{em}$  — теплота адсорбции, которая содержит и зависящую от ВЧ ЭМ воздействия часть;  $R$  — молярная газовая постоянная.

### 4. Анализ результатов

На рис. 3 приведено распределение адсорбированной нефти при воздействии ВЧ ЭМ полем, тепловом прогреве и без внешнего воздействия в разные моменты времени. Полученные кривые позволяют наглядно убедиться в эффективности воздействия ВЧ ЭМ полем. Кроме того, воздействие поля повлияло на время начала фильтрации.

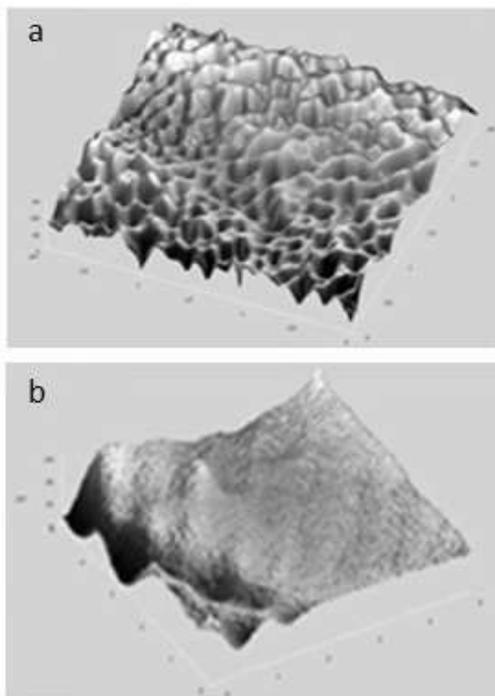


Рис. 4. Изображения агломератов асфальтенов, выделенных из образцов нефти 1, полученные с помощью АСМ до (а) и после ВЧ ЭМ воздействия (б)

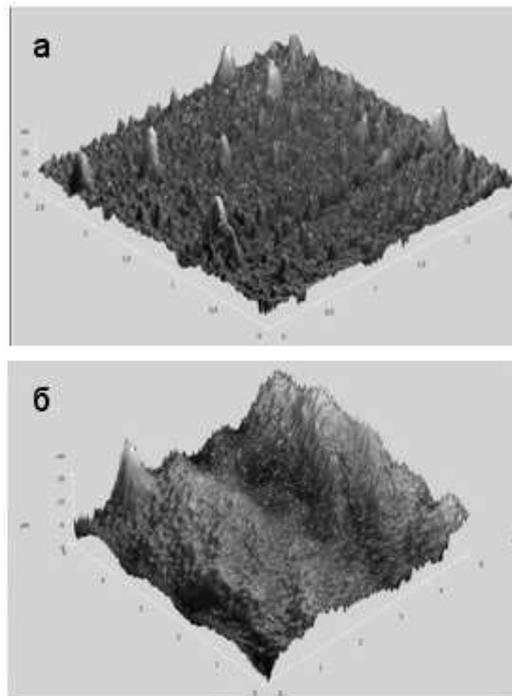


Рис. 5. Изображения агломератов асфальтенов, выделенных из образцов нефти 2, полученные с помощью АСМ до (а) и после ВЧ ЭМ воздействия (б)

## 5. Исследования полярных компонентов нефти с помощью СЗМ

Экспериментальные исследования влияния ВЧ ЭМ поля на сорбционные процессы в пористых средах дали принципиально важный результат: чем больше адсорбционный слой нефти на поверхности пористой среды (т.е. чем мельче порода), тем значительнее проявляется «нетепловое» действие поля. В некоторой степени это действие проявляется даже на таком сильнейшем адсорбенте как силикагель.

По-видимому, единственным объяснением этому феномену является разрушающее действие поля на полярные компоненты нефти. Особенный интерес представляет изучение влияния поля на адсорбцию асфальтенов, т.к. именно они являются наиболее высокомолекулярными полярными компонентами нефти и обладают повышенной поверхностной активностью. Исследования проводились с применением сканирующей атомно-силовой микроскопии (АСМ) по методике, описанной в работе [7]. При оптимальных условиях данная техника способна к получению изображений, показывающих молекулярное разрешение пленок Ленгмюра–Блоджетта (ЛБ). Для приготовления ЛБ пленок применялись

асфальтены, выделенные из нефтей с месторождений Мортук (нефть 1) и Мешалкинское (нефть 2). В качестве подложки, на которой образовывался монослой из асфальтенов, применялась слюда.

На рис. 4 и 5 показаны изображения агломератов асфальтенов, полученных с помощью АСМ до и после воздействия ВЧ ЭМ поля для нефтей 1 и 2 соответственно.

Изображения, полученные до и после влияния поля, существенно различаются. По изображениям частиц, полученным до обработки поля, можно заметить упакованную структуру асфальтенов на подложке. Причем, в первом случае (рис. 4) отмечается однородная структура слоя, а во втором случае (рис. 5) заметны некоторые пики, что свидетельствует об образовании полимолекулярного слоя асфальтенов на подложке. После воздействия ВЧ ЭМ полем на изображениях можно отметить скопление и некоторую ориентацию частиц. Полярные частицы ориентируются на подложке в направлении действия поля и их размещение на подложке более упорядоченно, чем на изображениях, полученных до воздействия ВЧ ЭМ полем.

## 6. Заключение

Приведенные в работе результаты экспериментальных и теоретических исследований показали, что по сравнению с тепловым прогревом воздействие ВЧ ЭМП в значительной степени замедляет процесс адсорбции. Это связано с тем, что при ВЧ ЭМ излучении в рабочей среде наряду с распределенными источниками тепла возникает и силовое действие поля (пондеромоторные, термомеханические, термоэлектрические силы и т.д.), которое влияет на процессы образования и разрушения структур полярных компонентов нефти. Воздействие поля улучшает фильтрационные способности породы и флюида, что обусловлено такими процессами, как разрушение адсорбционного слоя, термодиффузия и т.д.

Результаты исследований могут широко использоваться при обосновании принципиально новых наукоемких технологий применения воздействия электромагнитных полей, в частности, в процессах добычи нефти с учетом адсорбционного взаимодействия.

## Список литературы

- [1] Нигматуллин Р.И., Саяхов Ф.Л., Ковалева Л.А. Перекрестные явления переноса в дисперсных системах, взаимодействующих с высокочастотным электромагнитным полем // ДАН. 2001. Т. 377, № 3.
- [2] Галимбеков А.Д., Ковалева Л.А. Некоторые аспекты взаимодействия электромагнитных полей с поляризуемыми средами. Уфа: РИО БашГУ, 2004.
- [3] Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. Пособие. В 3-х т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 496 с.
- [4] Ковалева Л.А., Насыров Н.М. Использование численных методов при решении задач высокочастотной электромагнитной гидродинамики. Уфа: РИО БашГУ, 2007. 156 с.
- [5] Галимбеков А.Д. Некоторые аспекты взаимодействия электромагнитных полей с поляризуемыми средами: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Уфа, 2007. 208 с.
- [6] Hu Y., Jha K.N., Chakma A. Heavy-Oil Recovery from Thin Pay Zones by Electromagnetic Heating // Energy Sources. 1999. № 21. С. 67–73.
- [7] Ese M.-H., Sjoblom J., Djuve J., Pugh R. An AFM study of asphaltenes on mica surfaces. Influence of added resins and demulsifiers. 2004.

# Ускорение молекулярно-динамического моделирования многофазных систем при помощи GPU<sup>1</sup>

Марьян Д.Ф.

Центр «Микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем», БашГУ, Уфа  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе представлены результаты по ускорению моделирования методами молекулярной динамики при помощи графических процессоров (GPU). Рассматривалась полярная жидкость на примере воды. Межмолекулярное взаимодействие осуществлялось на основе потенциала Кулона и обрезанного потенциала Леннарда-Джонса. Проведены вычислительные эксперименты по ускорению и производительности.

## 1. Введение

Задачи динамики дисперсных систем в микро- и наномасштабе возникают во многих отраслях науки и промышленности: механической, химической, нефтяной, экологической и др. Экспериментальные исследования процессов, происходящих на микро- и наноуровнях, сильно затруднены тем фактом, что размеры исследуемых элементов и структур зачастую оказываются на порядок меньше размеров длины волны видимого света. Это означает, что фиксация происходящих процессов либо достаточно сложна и требует сложного дорогостоящего оборудования, либо просто невозможна, так как коротковолновое рентгеновское и гамма излучения характеризуются высокой энергией квантов излучения, то есть их использование может в значительной степени искажать реальную картину наблюдаемых процессов.

Теоретические исследования в этой области ограничены применимостью классических континуальных моделей многофазных систем, и актуальность приобретают кинетические модели, используемые в методах молекулярной динамики.

На фоне описанных сложностей вычислительный эксперимент при помощи методов молекулярной динамики, позволяющий описывать и измерять мельчайшие детали, становится незаменимым.

Однако и при проведении вычислительного эксперимента имеется ряд проблем, которые связаны с тем, что при достаточно подробном матема-

тическом описании проблемы, учитывающем многомерность и многопараметричность, а также с использованием при моделировании большого числа частиц, серьезно возрастают требования к производительности как используемого программного кода, так и вычислительной системы в целом.

Существует два пути для уменьшения необходимого времени для проведения вычислительного эксперимента: использование других алгоритмов и реализация на высокопроизводительном оборудовании. Первый заключается в снижении вычислительной сложности используемых алгоритмов. Так сложность прямого алгоритма пропорциональна числу всех парных взаимодействий в системе размера  $N$  и равна  $O(N^2)$ , то есть время выполнения данного алгоритма возрастает квадратично с ростом размера системы. Использование алгоритмов, которые имеют меньшую вычислительную сложность, является задачей чрезвычайно важной и актуальной.

Наряду с использованием алгоритмов с низкой вычислительной сложностью существует еще одно направление повышения производительности вычислений — использование высокопроизводительных вычислительных систем. В настоящее время наиболее эффективными для задач динамики многих тел являются гетерогенные системы, представляющие собой вычислительные кластеры, узлы которых содержат как CPU (центральный процессор), так и GPU (графический процессор). Однако эффективное использование описанных вычислительных систем требует как значительной моди-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант 11.G34.31.0040).

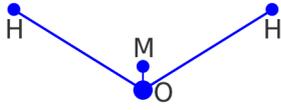


Рис. 1. Схематическое представление модели TIP4P

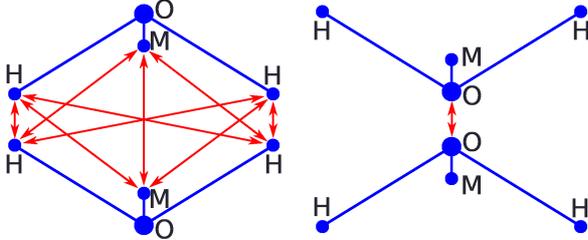


Рис. 2. Дальнее (слева) и ближнее (справа) взаимодействия

фикации существующих алгоритмов, так и разработки новых.

Таким образом, проведение исследований процессов динамики дисперсных систем, происходящих на микро- и наноуровнях, требует реализации молекулярно-динамических моделей с использованием гетерогенных вычислительных систем.

## 2. Математическая модель

Для моделирования воды, которая представляет собой полярную жидкость, использовалась модель TIP4P (рис. 1) [1]. Эта модель описывает воду как жесткую молекулу и является расширением традиционной трехточечной модели TIP3P путем добавления дополнительного безмассового узла, в котором располагается заряд кислорода. Этот узел располагается на фиксированном расстоянии от атома кислорода на биссектрисе угла НОН. Такое расположение атомов, узлов, масс и зарядов позволяет корректно моделировать электростатическое поле вокруг молекулы и воспроизводить экспериментально установленные свойства воды.

Так как молекула воды полагается жесткой, то внутри молекулы атомы не взаимодействуют. Также эта модель воды полагается только на нехимическое взаимодействие атомов, а именно на дальнее (Кулоновское) и ближнее (Леннард-Джонсовское) взаимодействия. Потенциал, описывающий взаимодействие между атомами  $i$  и  $j$  различных молекул, описывается формулой

$$U_{ij} = U_{ij}^{Coulomb} + U^{LJtrunc}(r_{ij}), \quad (1)$$

Первое слагаемое (1) представляет собой электростатическое взаимодействие и описывается при

помощи потенциала Кулона:

$$U_{ij}^{Coulomb} = \frac{k_c q_i q_j}{r_{ij}},$$

где  $k_c$  — электростатическая константа;  $q$  — электрический заряд;  $r_{ij}$  — расстояние между атомами  $i$  и  $j$ .

Второе слагаемое в формуле (1) описывает Леннард-Джонсовское взаимодействие. Для ускорения расчетов потенциал Леннарда-Джонса обрывается на расстоянии  $r_c = 2,5\sigma$ . И, чтобы избежать нефизичной ситуации, такой, что при пересечении сферы радиуса  $r_c$  какой-то молекулой энергия системы меняется скачкообразно, потенциал сдвигается, чтобы выполнялось условие  $U^{LJtrunc}(r_c) = 0$ . Таким образом обрезанный потенциал Леннарда-Джонса принимает следующий вид

$$U^{LJtrunc}(r) = \begin{cases} U^{LJ}(r) - U^{LJ}(r_c), & r \leq r_c, \\ 0, & r > r_c. \end{cases}$$

Сам потенциал Леннарда-Джонса имеет вид

$$U^{LJ}(r) = 4\epsilon \left[ \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right],$$

где  $r$  — расстояние между частицами;  $\epsilon$  — глубина потенциальной ямы;  $\sigma$  — расстояние, на котором энергия взаимодействия становится равной нулю.

Потенциал Кулона применяется при расчете взаимодействия между атомами водорода  $H$  и дополнительным узлом  $M$ , а потенциал Леннарда-Джонса для расчета взаимодействия между атомами кислорода  $O$  (см. рис. 2).

Кинетические уравнения движения атомов следуют из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{f}_{ij},$$

где  $\mathbf{f}_{ij} = -\nabla U_{ij}$ .

Макроскопические параметры (температура, давление, плотность среды и др.) могут быть получены, исходя из положений молекулярно-кинетической теории.

## 3. Численное моделирование

Для интегрирования уравнений движения используется численная схема — метод предиктор-корректор (Adams-Bashforth-Moulton), который имеет вид

$$x(t+h) = x(t) + h\dot{x}(t) + h^2 \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f(t + [l-i]h),$$

$$h\dot{x}(t+h) = x(t+h) - x(t) + h^2 \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i f(t + [l-i]h),$$

где  $x$  — координаты атома;  $t$  — текущий временной шаг;  $h$  — шаг по времени;  $k$  — показатель глубины схемы по временным шагам;  $\alpha_i, \beta_i, l$  — коэффициенты схемы для определенного  $k$  и шага (предиктор или корректор). Метод заключается в первоначальном вычислении значений координат и скоростей и их последующей корректировке. Данная схема имеет локальную ошибку порядка  $O(h^{k+1})$ .

Аналогично описанному выше двухэтапному методу вычисления поступательного движения молекул, вычисляется и их вращение. В этом случае в качестве координат частиц выступают кватернионы.

В качестве граничных условий использовались периодические граничные условия. В качестве начальных условий молекулы равномерно распределялись по кубу. Количество молекул выбиралось исходя из размеров куба и заданной плотности.

#### 4. Методы ускорения

Для проведения физически достоверных расчетов необходимо использование большого числа молекул. В общем, для проведения расчетов требуется  $O(N^2)$  операций, где  $N$  — число частиц (атомов). Ускорить расчет ближнего взаимодействия позволяет схема обрезания с использованием списка соседей или специализированной структуры данных, которая позволяет снизить число операций до порядка  $O(N)$ . Учитывая быстро убывающую природу  $1/r^6$ , эта схема удовлетворительна для потенциала Леннарда–Джонса.

Но использование схемы обрезания для расчета потенциала Кулона ведет к значительной нелинейности, так как величина потенциала убывает пропорционально  $1/r$ . Как результат, метод обрезания не подходит для расчета дальнедействующих взаимодействий и неэффективен для их моделирования.

Ускорение расчета дальнедействующих взаимодействий было достигнуто путем использования GPU. Реализация расчета ближних взаимодействий на GPU также позволяет значительно ускорить вычисления.

##### 4.1. Структура данных

Использование структуры данных позволяет снизить вычислительную сложность всего алгоритма расчета ближнего взаимодействия с  $O(N^2)$  до  $O(NM)$ , где  $N$  — общее число частиц;  $M$  — среднее число частиц в соседних боксах. Построение структуры данных основано на использовании гистограммы распределения частиц по боксам и bucket-сортировке частиц [2]. Вычислительная сложность алгоритма построения структуры данных равна  $O(N)$ . Таким образом, общая вычис-

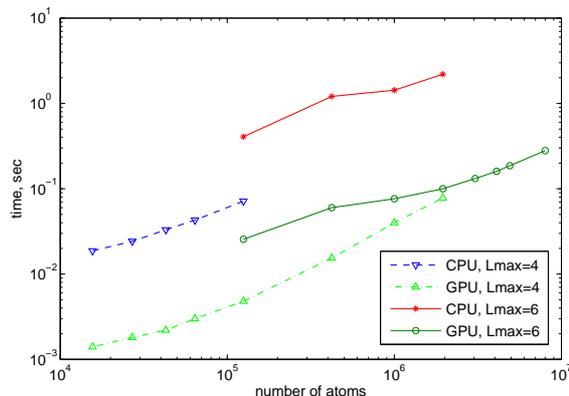


Рис. 3. Время генерации структуры данных в зависимости от числа частиц

лительная сложность снижается при оптимальном подборе числа боксов для данного  $N$ .

#### 5. Результаты

Тестовые расчеты проводились на вычислительной системе с CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz, GPU NVidia Tesla C2075, операционной системой Linux 64bit, компиляторами GCC v.4.4, CUDA v.4.0. Расчеты проводились для чисел с плавающей точкой двойной точности. Размер блока при проведении расчетов выбирался исходя из оптимальности и, начиная с некоторого числа частиц, равнялся 256 потокам на блок. В качестве начального условия использовалось равномерное распределение частиц по моделируемой области.

На рис. 3 показано время генерации структуры данных на CPU и на GPU в зависимости от числа частиц для двух максимальных уровней структуры данных ( $L_{max} = 4$  и  $L_{max} = 6$ ). Ускорение, благодаря использованию GPU, составляет порядка 40 раз.

На рис. 4 показано время необходимое для расчета обрезанного потенциала Леннарда–Джонса. Реализация brute-force метода на GPU позволяет достичь ускорения порядка 300 по сравнению с реализацией на CPU. Использование структуры данных позволяет снизить вычислительную сложность с  $O(N^2)$  до  $O(N)$ . Однако, если не увеличивать максимальный уровень структуры данных ( $L_{max}$ ) с ростом числа частиц, то график перестает расти линейно и начинает стремиться к квадратичному росту в связи со значительным увеличением числа частиц в каждом боксе структуры данных, что можно наблюдать на рисунке в виде прерывистой линии ( $L_{max} = 4$ ). Выбор максимального уровня структуры данных основан на оптимальном соотношении между временем генерации структуры

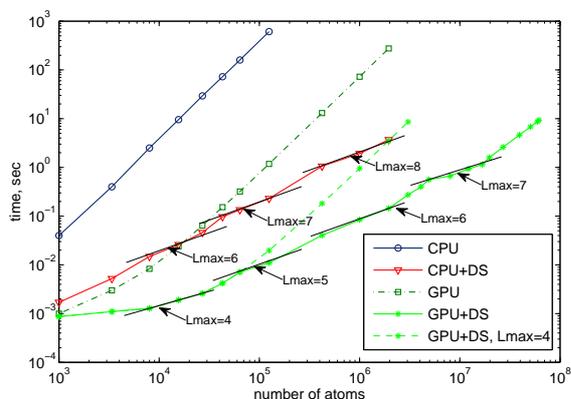


Рис. 4. Время расчета ближнего взаимодействия в зависимости от числа частиц

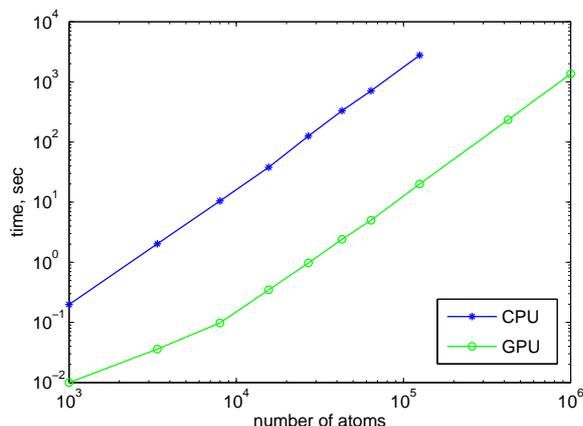


Рис. 5. Время расчета дальнего взаимодействия в зависимости от числа частиц

данных и временем расчета потенциала Леннарда–Джонса. Ввиду того, что ускорение на GPU генерации структуры данных меньше ускорения расчета потенциала Леннарда–Джонса, реализация расчета потенциала Леннарда–Джонса с использованием структуры данных на GPU уменьшает необходимое для расчетов время в 40 раз.

На рис. 5 показано время расчета потенциала Кулона на CPU и на GPU. Использование GPU позволяет ускорить расчет почти в 200 раз.

## 6. Заключение

Использование GPU позволяет значительно ускорить расчеты, в которых необходимо проводить ряд одинаковых операций над массивом данных, и сделать возможным проведение моделирования больших систем на персональных суперкомпьютерных станциях, оснащенных GPU. GPU ускоряет генерацию структуры данных в 40 раз, расчет

потенциала Леннарда–Джонса — в 300 раз и расчет потенциала Кулона — в 200 раз. Использование структуры данных для расчета обрезанного потенциала Леннарда–Джонса позволяет снизить вычислительную сложность с  $O(N^2)$  до  $O(N)$ .

Дальнейшим этапом является применение алгоритмических методов ускорения расчета потенциала Кулона. Одним из таких методов является быстрый метод мультиполей (Fast Multipole Method, FMM), который позволяет снизить вычислительную сложность расчета далекодействующих взаимодействий с  $O(N^2)$  до  $O(N)$ .

## Список литературы

- [1] Jorgensen W.L., Chandrasekhar J., Madura J.D., Impey R.W., Klein M.L. Comparison of simple potential functions for simulating liquid water // J. Chem. Phys. 1983. Vol. 79. P. 926–935.
- [2] Hu Q., Gumerov N.A. and Duraiswami R. Scalable fast multipole methods on distributed heterogeneous architectures // SC'11, International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage, and Analysis, Seattle, WA, November 12–18, 2011.
- [3] Rapaport D.C. The art of molecular dynamics simulation. Cambridge University Press, 2004. P. 400.
- [4] NVIDIA Corporation. NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture Programming Guide. Version 4.0. 2011.

# Моделирование осаждения мелкодисперсной среды под воздействием волн давления

Михайленко К.И.\*, Валеева Ю.Р.\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

\*\*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Записана математическая модель дисперсной системы газ–твердые частицы при прохождении волн давления. Дисперсные частицы способны к коагуляции с ростом концентрации. На дисперсные частицы действуют силы Стокса со стороны дисперсионной среды и сила тяжести. Приведены результаты вычислительного моделирования процессов осаждения дисперсной взвеси. Показано, что одним из механизмов осаждения взвесей может быть коагуляция частиц при прохождении волн давления.

## 1. Введение

Дисперсной системой называют особое соединение двух или более фаз, когда одна из фаз образует непрерывную дисперсионную среду, в объеме которой распределена дисперсная фаза (или несколько дисперсных фаз) в виде мелких кристаллов, твердых аморфных частиц, капель или пузырьков. Системы с газообразной дисперсионной средой играют важную роль в природе, быту и производственной деятельности человека. Природными источниками таких смесей являются землетрясения, извержения вулканов, метеоритная и космическая пыль, туман. Источниками техногенных дисперсных систем могут быть аварии, выбросы предприятий (в том числе вредные), пожары, нефтяная и газовая промышленности.

Нередко возникает необходимость в создании эффективной защиты помещений и открытых пространств от распыленных частиц вредных веществ. Одним из способов, позволяющих решить поставленную задачу, является использование акустического поля для осаждения дисперсной взвеси [1].

Экспериментальное исследование осаждения дисперсных сред и аэрозолей в закрытой трубе активно ведется, в частности, в Институте механики и машиностроения КазНЦ РАН [1, 2]. В представленных работах описываются особенности нелинейных колебаний аэрозоля в безударно-волновом режиме.

В нашей работе сделана попытка построения математической модели и последующего численного исследования процессов, связанных со стратификацией дисперсной фазы при прохождении волн давления в несущей газовой фазе.

## 2. Математическая модель

Нами рассматривалась двухфазная система газ–дисперсная среда, где дисперсная среда задавалась гладкими сферическими частицами с небольшой концентрацией. Механика системы была построена на основе основных положений механики сплошной среды [3]. Межфазное взаимодействие описано осредненной по пространству силой Стокса [4, 5]. Кроме того, учтено влияние силы тяжести на частицы дисперсной среды.

Математическая модель, описывающая движение двухфазной смеси газа и дисперсной среды, при наличии коагуляции дисперсных частиц может быть записана исходя из следующих предположений:

- гранулированная среда состоит из гладких сферических частиц одинакового размера, для которых выполняются предположения о малости частиц по сравнению с характерными линейными масштабами течений;
- время коагуляции пары частиц при их соударении пренебрежимо мало по сравнению со средним временем между столкновениями;
- после соединения частицы гранулированной среды вновь образуют сферическую частицу с вдвое большим объемом;
- воздействие газовой фазы на дисперсную описывается осредненной по пространству силой Стокса;
- воздействие на газовую фазу со стороны дисперсной при рассматриваемых концентрациях

( $\alpha_2 \ll 1$ ) достаточно мало и им можно пренебречь;

- на гранулированную среду действует осредненная по пространству сила тяжести.

С учетом этих предположений система уравнений математической модели записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_\ell \cdot \rho_i v_i^\ell = 0,$$

$$\rho_i \frac{\partial v_i^\ell}{\partial t} + \rho_i v_i \frac{\partial v_i^\ell}{\partial x^\ell} = -\alpha_i \nabla_\ell p + \nabla_k \tau_i^{\ell k} + \rho_i g + F_{ji}^\ell,$$

где  $v_i^\ell$  —  $\ell$ -ая составляющая вектора скорости  $i$ -ой фазы, в нашей модели принято, что  $i = 1$  соответствует дисперсионной газовой фазе, а  $i = 2$  — гранулированной;  $\rho_i$  — эффективная плотность  $i$ -ой фазы, связанная полной плотностью  $\rho_i^0$  соотношением  $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ;  $\alpha_i$  — объемная концентрация  $i$ -ой фазы,  $\sum_i \alpha_i = 1$ ;  $\tau_i^{\ell k}$  — тензор сдвиговых напряжений  $i$ -ой фазы;  $p$  — давление;  $F_{ji}^\ell$  —  $\ell$ -ая составляющая вектора силы межфазного взаимодействия, действующего со стороны  $j$ -ой фазы на  $i$ -ую;  $g$  — ускорение свободного падения.

В соответствии с введенными предположениями, принимаем

$$\rho_1 g = 0, \quad F_{21}^\ell = 0, \quad \tau_2^{\ell k} = 0.$$

Рассмотрим подробнее силы, действующие на частицу, движущуюся в дисперсионной среде. Это силы трех категорий: внешние силы (сила тяжести), силы сопротивления среды и силы взаимодействия между частицами. Последние, в случае электрически нейтральных частиц, и при условии  $\alpha_2 \ll 1$  достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь.

Сила сопротивления среды описывается формулой Стокса:

$$\mathbf{F}_{st} = 6\pi a \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_p),$$

где  $a$  — радиус сферической частицы;  $\mu$  — вязкость дисперсионной среды;  $\mathbf{v}_1$  — скорость дисперсионной фазы;  $\mathbf{v}_p$  — скорость частицы.

Сила тяжести, действующая на частицу сферической формы:

$$\mathbf{F}_g^0 = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_2^0 \mathbf{g}.$$

Здесь  $\rho_2^0$  — плотность вещества дисперсионной среды;  $g$  — ускорение свободного падения.

Взаимодействие взвешенных частиц с колеблющимся потоком газа приводит к нарушению их равномерного распределения в пространстве, сближению друг с другом и дальнейшей коагуляции. В

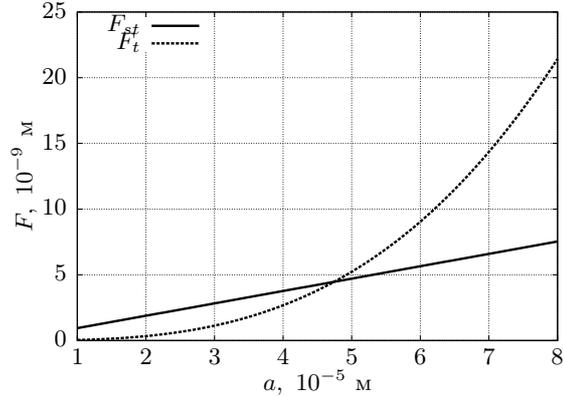


Рис. 1. Сравнительные величины силы Стокса  $F_{st}$  при некоторой заданной разнице в скорости между частицей и газом и силы тяжести  $F_g$ , действующих на отдельную частицу, в зависимости от радиуса частицы  $a$

процессе коагуляции образуются частицы большего размера, причем для упрощения модели мы считаем, что каждая новая частица имеет удвоенную массу, но при этом остается сферической.

При достижении радиусом частицы определенного значения, величина силы тяжести начинает превышать значение силы Стокса, как это показано на рис. 1, что приведет к усиленному осаждению дисперсионной фазы.

Так как поведение дисперсионной среды описывается с помощью континуальной модели, действие внешних сил необходимо описывать в интегральной форме.

Силу, действующую на дисперсионную среду со стороны дисперсионной фазы, можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_{12} = \eta_\mu \alpha_1 \alpha_2 a^{-2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

где  $a$  — радиус частиц дисперсионной фазы;  $\eta_\mu$  — структурный коэффициент, определяемый формой и поверхностью частиц. Для случая гладких сфер  $\eta_\mu = \frac{9}{2} \mu_1$ .

Аналогичным образом записывается сила тяжести, действующая на дисперсионную фазу:

$$\mathbf{F}_g = \alpha_2 \rho_2^0 \mathbf{g}.$$

Для моделирования коагуляции вводится понятие эффективного радиуса  $\tilde{a}$ . Начальная концентрация равна  $\alpha_0$ , при этом все частицы имеют радиус  $\tilde{a}_0 = a$ . При увеличении концентрации частицы начинают коагулировать и при достижении некоторого значения  $\xi \alpha_0$  достигают максимума коагуляции исходных частиц, когда все частицы считаются соединенными попарно. Новые частицы имеют радиус  $\tilde{a}_1 = 2^{1/3} a$ . При достижении концентрации

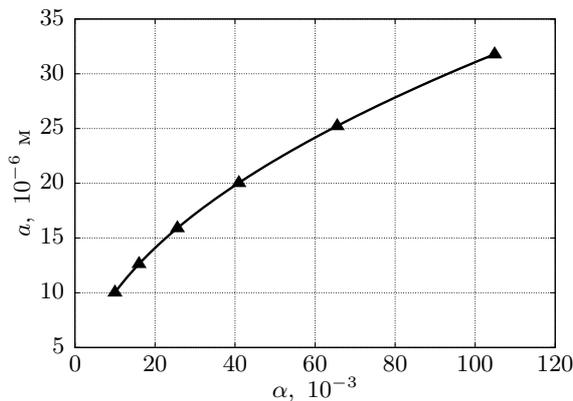


Рис. 2. Зависимость эффективного радиуса  $\tilde{a}$  частиц гранулированной фазы от концентрации  $\alpha_2$ ; треугольниками обозначены значения размеров дисперсных частиц при заданных  $\alpha_i$

$\xi^2 \alpha_0$  мы будем иметь частицы с эффективным радиусом  $\tilde{a}_2 = 2^{2/3} a$  и т.д. Таким образом, имеется следующая зависимость:

$$\alpha_i = \xi^i \alpha_0 \Rightarrow \tilde{a}_i = 2^{i/3} a.$$

Другими словами, эффективный радиус является функцией концентрации:

$$\tilde{a} = f(\alpha).$$

Графическое представление данной функции показано на рис. 2.

### 3. Численный метод

Уравнения модели решаются численно с использованием метода крупных частиц [6]. Выбор данного метода определяется его консервативностью и устойчивостью при решении задач со слабыми ударными волнами.

Основная идея метода крупных частиц заключается в расщеплении по физическим процессам системы уравнений, записанной в форме законов сохранения. Среда моделируется системой из крупных частиц, совпадающих в рассматриваемый момент времени с ячейкой эйлеровой сетки. Расчет каждого временного шага разбивается на три этапа.

*Эйлеров этап*, на котором пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением элементарной ячейки (потока массы через границы ячеек нет), и учитываем эффекты ускорения жидкости лишь за счет давления; здесь для крупной частицы определяются промежуточные значения искомых параметров потока ( $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{E}$ ).

*Лагранжесв этап*, во время которого вычисляются потоки физических величин через границы ячеек.

*Заключительный этап* для определения в новый момент времени окончательных значений гидродинамических параметров потока ( $u, v, E, \rho$ ) на основе законов сохранения массы, импульса и энергии для каждой ячейки и всей системы в целом на фиксированной расчетной сетке.

Разностная схема для расчета течения двухфазных сред является модификацией схемы для расчета течения однофазного газа, приведенной выше. Изменяется заключительный этап. В новой схеме добавляются концентрация и силы межфазного взаимодействия. Для рассматриваемой задачи была принята модель с общим давлением:  $p_1 = p_2 = p$ . В силу того, что  $\alpha_2 \ll \alpha_1$ , давление газа является определяющим, оно и принимается в качестве общего давления системы. Концентрации газа и дисперсных частиц рассчитываются для каждой ячейки. Также были добавлены функция пересчета концентрации фаз системы и функция, вычисляющая значение силы Стокса.

## 4. Результаты

### 4.1. Моделирование процесса осаждения

Описанная математическая модель и численный метод были использованы для решения поставленной задачи об осаждении дисперсной фазы при прохождении через среду волн давления.

Расчетная область представляет собой закрытую с одного конца трубу прямоугольного сечения. В качестве граничных условий на боковых и верхней границах используется условие прилипания (стенка). На нижней границе ставится условие периодического изменения давления (акустическое воздействие).

На рис. 3–6 показаны результаты моделирования осаждения дисперсной среды при прохождении волн давления. Приведенные результаты были получены при следующих параметрах рассматриваемой системы:

- исходный размер дисперсных частиц  $a = 10^{-5}$ ;
- исходная объемная концентрация дисперсной среды  $\alpha = 0.01$ ;
- исходная плотность газовой фазы  $\rho_1^0 = 1 \text{ кг/м}^3$ ;
- плотность дисперсной фазы  $\rho_2^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;
- вязкость газовой фазы газ  $\mu = 10^{-5} \text{ П}$ ;

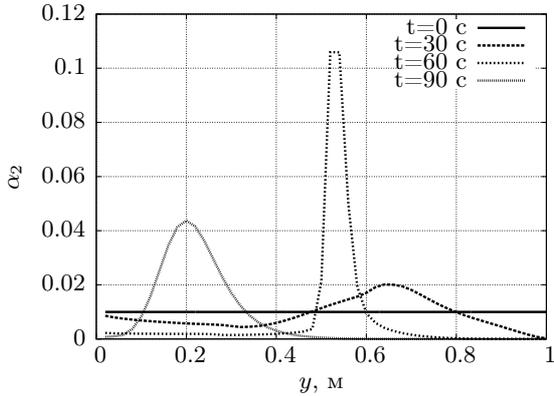


Рис. 3. Изменение концентрации дисперсной фазы  $\alpha_2$  с течением времени

- геометрические размеры системы  $1 \times 0.15 \times 0.15 \text{ м}^3$ .

На рис. 3 показано продольное распределение концентрации дисперсной фазы в некоторые моменты времени. Здесь показано, что в начальный момент времени мы имеем равномерно распределенную по области концентрацию дисперсной среды. Под действием непрерывно проходящих волн давления равномерное распределение нарушается и концентрация дисперсной фазы начинает увеличиваться вблизи дальнего, закрытого конца области (рис. 4).

Одновременно с ростом концентрации происходит также и рост размеров частиц, в результате чего они, под действием силы тяжести, начинают смещаться вниз, повышая концентрацию в нижележащих слоях и ускоряя этот процесс. В итоге, в некоторый момент времени, приблизительно посреди расчетной области образуется небольшой слой с концентрацией, почти на порядок превосходящей начальную, как это показано на рис. 5. Этот слой состоит из большей части ранее находящейся выше него дисперсной фазы.

На рис. 6 показан заключительный этап осаждения дисперсной фазы. Образовавшийся на предыдущем этапе слой высокой концентрации начинает с заметной скоростью оседать, собирая по пути и те дисперсные частицы, которые находятся ниже. Этот процесс происходит достаточно быстро и в ходе него наблюдается «размывание» концентрации дисперсной среды, вызванное, по-видимому, волнами давления, наиболее энергичными вблизи их источника — нижней границы области.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что процесс осаждения состоит из двух, сравнимых по длительности, этапов. На первом этапе происходит постепенное выведение дисперсной сре-

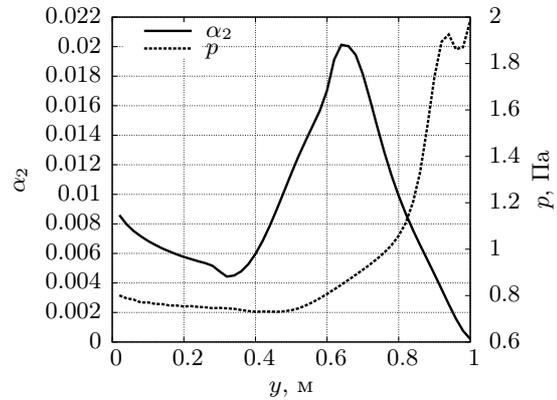


Рис. 4. Распределение концентрации дисперсной фазы  $\alpha_2$  и давления  $p$  в момент времени  $t = 30 \text{ с}$

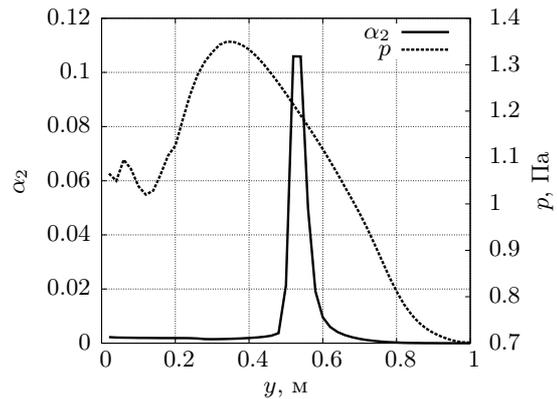


Рис. 5. Распределение концентрации дисперсной фазы  $\alpha_2$  и давления  $p$  в момент времени  $t = 60 \text{ с}$

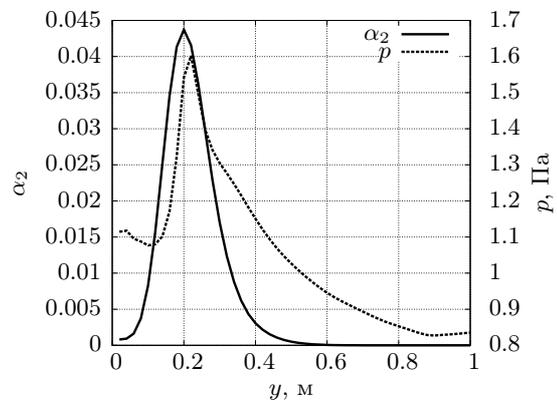


Рис. 6. Распределение концентрации дисперсной фазы  $\alpha_2$  и давления  $p$  в момент времени  $t = 90 \text{ с}$

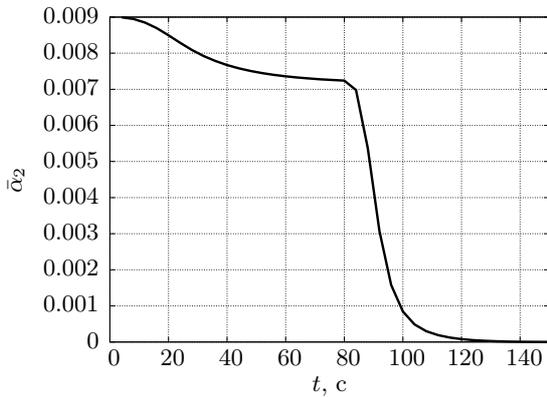


Рис. 7. Изменение средней концентрации дисперсной фазы  $\bar{\alpha}_2$  в расчетной области с течением времени

ды из положения равновесия под действием проходящих волн давления. После того, как в результате перераспределения концентрации дисперсной среды образовалась область с достаточно заметно повышенной концентрацией, начинается второй этап — собственно осаждение дисперсной среды.

Как было показано выше, второй этап процесса вначале приводит к образованию слоя с высокой концентрацией дисперсных частиц, после чего данный слой достаточно быстро опускается вниз, вбирая в себя все встреченные дисперсные частицы.

Данный двухэтапный процесс можно наблюдать и на рис. 7 где показана кривая изменения средней концентрации дисперсной фазы  $\bar{\alpha}_2$ . На этой кривой мы видим два перегиба: слабо выраженный в момент времени  $t \approx 40$  с и резкий при  $t \approx 80$  с. При этом первый перегиб как раз и разделяет этап начального перераспределения концентрации и этап последующего осаждения. Второй перегиб образуется, когда в процессе осаждения область повышенной концентрации достигает нижней границы, и дисперсная среда начинает активно выводиться из расчетной области.

#### 4.2. Сравнение с экспериментом

На рис. 8 приведены результаты сравнения данных, полученных из эксперимента [2] с расчетами, в которых основной упор делался на эмпирическое получение используемого в модели коэффициента коагуляции  $\xi$ .

На приведенных графиках сравниваются времена осаждения дисперсной фазы в зависимости от частоты и амплитуды волны давления, генерируемой на нижней границе области.

Соответствие с экспериментальными данными достигается при следующих параметрах вычислительного эксперимента:

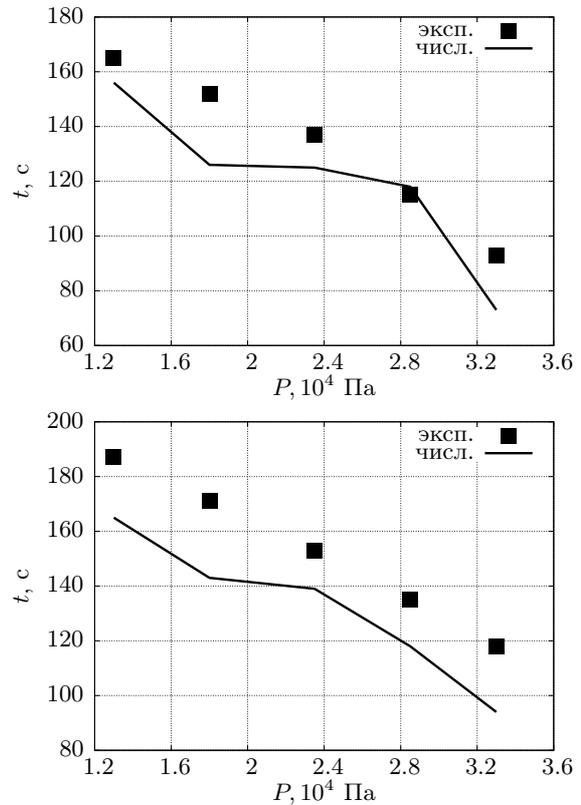


Рис. 8. Время осаждения дисперсной фазы в зависимости от амплитуды волны давления при различных частотах в эксперименте [2] (квадраты) и полученные из расчета (линия): на верхнем графике  $\omega = 158$  Гц; на нижнем —  $\omega = 160.66$  Гц

- исходный размер дисперсных частицы  $a_0 = 0.83 \cdot 10^{-6}$  м, их плотность  $\rho_2^0 = 557$  кг/м<sup>3</sup> и начальная концентрация  $\alpha = 0.073$ ;
- плотность и вязкость газовой фазы:  $\rho_1^0 = 2$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1.97 \cdot 10^{-4}$  Пз;
- размер расчетной области: длина 1 м, диаметр 0.03 м);
- коэффициент коагуляции  $\xi = 4.7$ .

Наблюдаемое расхождение между вычисленными и экспериментальными параметрами может быть объяснено в том числе и используемыми в модели упрощающими предположениями. В частности, предположение о том, что отдельная частица дисперсной среды всегда представляет собой сферу, независимо от того, сколько исходных частиц ее образовали. При таком подходе сохраняется возможность использования силы Стокса для вычисления межфазного взаимодействия на всех этапах,

однако, тем самым модель занижает влияние несущей фазы на дисперсную. По-видимому, это одна из причин, по которой скорость осаждения дисперсной среды в расчетах оказывается выше, чем в эксперименте.

## 5. Заключение

В представленной работе показано, что известный из экспериментальных работ процесс осаждения дисперсной фазы под воздействием волн давления, может быть описан в рамках модели конкуренции силы тяжести и силы межфазного взаимодействия, когда возможна коагуляция частиц дисперсной среды.

Следует особо отметить, что даже в рамках чрезвычайно простой модели оказалось возможно получить достаточно хорошее соответствие с результатами экспериментов.

Дальнейшая работа должна предусматривать развитие модели путем включения в систему уравнений некоторого кинетического соотношения, описывающего процессы коагуляции и диссоциации дисперсных частиц. Также необходимо учесть, что после коагуляции частицы становятся несферическими, поэтому выражение для сил межфазного взаимодействия не должно основываться только на силе Стокса.

## Список литературы

- [1] Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г. Экспериментальное исследование коагуляции аэрозоля в трубе вблизи субгармонического резонанса // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42, № 5. С. 788–795.
- [2] Ткаченко Л.А., Зарипов Р.Г. Особенности нелинейных колебаний аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 3, № 4. С. 1171–1173.
- [3] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч I. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [4] Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Наука, 1995. 352 с.
- [5] Михайленко К.И., Везиров Р.Р., Ахатов И.Ш., Урманчиев С.Ф. Численное моделирование течения мелкодисперсного катализатора в канале лифтреактора // Нефтепереработка и нефтехимия. 1997. № 12. С. 17–20.
- [6] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 392 с.

# Влияние режимов конвекции на полимеразную цепную реакцию в квадратной полости<sup>1</sup>

Моисеев К.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Численно исследуется влияние различных режимов свободно-конвективного теплообмена ньютоновской несжимаемой жидкости на полимеразную цепную реакцию в квадратной полости. В качестве математической модели процесса свободной конвекции рассматривается приближение Обербека–Буссинеска. Для полимеразной цепной реакции применяются уравнения переноса вещества, учитывающие физико-химические взаимодействия компонент смеси. Полагалось, что смесь состоит из трех компонент. Результаты расчетов позволяют оценить влияние режимов течений конвекции на общую продолжительность проведения реакции и поля концентраций компонент, а также выявить оптимальные тепловые параметры для ПЦР.

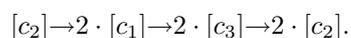
## 1. Введение

Полимеразная цепная реакция (ПЦР) — экспериментальный метод молекулярной биологии, позволяющий добиться значительного увеличения малых концентраций определенных фрагментов нуклеиновой кислоты (ДНК) в биологическом материале (пробе). Также ПЦР позволяет производить множество других манипуляций с ДНК: введение мутаций, сращивание фрагментов ДНК, что широко используется в биологической и медицинской практике, например, для диагностики заболеваний, для установления отцовства, для клонирования и выделения новых генов. При проведении ПЦР выполняется несколько циклов, каждый из которых состоит из трех стадий: денатурация — сильный нагрев, разрушение водородных связей двойных цепей ДНК; отжиг — охлаждение смеси, связывание специальных ферментов (праймеров) с разделенными цепями ДНК; элонгация — образование двух новых копий исходных ДНК, данная стадия происходит при некоторой средней между денатурацией и отжигом температуре. ПЦР проводят в амплификаторе — приборе, обеспечивающем периодическое охлаждение и нагревание пробирок с исходной смесью (пробой), содержащей малое количество ДНК. Ввиду того, что свободно конвективный теплообмен может обеспечить массоперенос смеси в полости, стенки которой поддерживаются при темпера-

турах денатурации и отжига, и где, следовательно, существует область с температурой благоприятной для элонгации, то цикл ПЦР будет выполняться посредством свободной конвекции, а не периодического нагрева. Это обстоятельство, в свою очередь, может оказать воздействие на скорость реакции ПЦР. Целью данной работы является исследование влияния параметров свободно конвективного теплообмена на успешность выполнения ПЦР и достижение условий, аналогичных условиям в амплификаторе.

## 2. Постановка задачи

Пусть исходная смесь состоит из трех компонент, обозначим через  $c_1$  — концентрацию одноцепочечных ДНК,  $c_2$  — двухцепочечных и  $c_3$  — отождженных. Положим, что различные элементы ДНК преобразуются вследствие реакций первого порядка [1, 2]:



Пренебрежем любыми воздействиями поверхностей на кинетику реакции. Предположим, что диффузия всех разновидностей ДНК характеризуется постоянным коэффициентом диффузии —  $D$ , тогда для концентраций компонент ДНК можно записать следующие безразмерные уравнения:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla c_i = \frac{1}{Pe} \Delta c_i + Da \cdot r_i, \quad (1)$$

где  $c_i$ , ( $i = 1..3$ ) — концентрации соответствующих ДНК;  $\vec{v}$  — вектор скорости жидкости;  $r_i$  — источники членны:

$$r_1 = 2k_d f_d c_2 - k_a f_a c_1, \quad r_3 = k_a f_a c_1 - k_e f_e c_3, \\ r_2 = k_e f_e c_3 - k_d f_d c_1,$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 15 ОЭМПУ РАН и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-834.2012.1).

где  $k_a, k_e, k_d$  — безразмерные скорости реакции отжига, элонгации и денатурации соответственно;  $f_a, f_e, f_d$  — интенсивности соответствующих реакций.

Безразмерные параметры:

$$Pe = \frac{\nu}{D}, \quad Da = \frac{kL^2}{\nu}$$

— число Пекле и конвективное число Дамкелера соответственно, где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $k$  — характерная скорость реакции.

Предполагалось, что интенсивности реакций  $f_i, (i = 1..3)$  являются функциями нормального распределения по температуре:

$$f_i = \exp \left[ -\frac{(\theta - \theta_i^*)^2}{2\sigma_i^2} \right],$$

где  $\theta = \frac{T - T^*}{\Delta T}$  — безразмерная температура;  $T^*$  — некоторая средняя температура;  $\Delta T$  — перепад температуры в полости;  $\theta_i^*$  — благоприятная температура для  $i$ -ой реакции и  $\sigma_i$  — допустимое отклонение температуры для  $i$ -ой реакции.

В качестве модели тепломассопереноса использовались уравнения свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в приближении Обербека–Буссинеска [3, 4], которые в безразмерном виде можно записать следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \operatorname{Gr} \cdot \theta \cdot \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \quad (4)$$

где  $p$  — безразмерное отклонение от гидростатического давления;  $\operatorname{Gr} = \frac{gL^3\beta\Delta T}{\nu^2}$  — число Грасгофа;

$Pr = \frac{\nu}{\chi}$  — число Прандтля;  $\vec{g}$  — вектор ускорение свободного падения;  $L$  — характерный размер полости;  $\beta$  — коэффициент температурного расширения;  $\chi$  — коэффициент теплопроводности.

Рассмотрим процесс изменения концентраций ДНК с течением времени при свободно конвективном теплообмене в квадратной полости со стороной  $L$ . Предполагалось, что нижняя граница полости поддерживается при температуре денатурации, а верхняя — при температуре отжига, боковые стенки считались теплоизолированными. Для компонент вектора скорости на границах использовались условия прилипания, для концентраций компонент смеси — условия отсутствия потока через границы полости.

### 3. Параметры задачи

Все вычисления производились на равномерной сетке  $55 \times 55$  узлов с безразмерным шагом интегрирования по времени  $\delta t = 10^{-4}$ . В качестве исходной смеси использовалась вода ( $Pr = 2$ ) с малой концентрацией двухцепочных ДНК:  $c_2 = c_0$ ,

$c_1 = c_3 = 0$ . В начальный момент полагалось, что жидкость находится в равновесии. Для модели выбраны следующие параметры: оптимальная температура денатурации равна  $95^\circ \text{C}$ , отклонение  $85 - 95^\circ \text{C}$ , отжига  $55^\circ \text{C}$ , отклонение  $55 - 60^\circ \text{C}$ , элонгации —  $72 \pm 2^\circ \text{C}$ . Константы скоростей химических реакций определяются из тех соображений, что реакция элонгации проходит вдвое медленнее реакций отжига и денатурации  $k_a = k_d = 1$  и  $k_e = 0.5$ . Для изучения влияния режимов свободно конвективного теплообмена на ПЦР варьировались числа Грасгофа, для исследования влияния диффузии и скорости течения реакции числа Пекле и Дамкелера соответственно.

### 4. Результаты моделирования

Уравнения для концентраций (1) и система уравнений свободной конвекции (2)–(4) численно интегрировались методом контрольного объема [5, 6], для исключения давления из уравнений движения применялась процедура «simple». Выбор этого численного метода обусловлен, прежде всего, тем, что он является неявным, консервативным и простым в реализации.

На рис. 1 представлены линии тока и поле температуры (слева) и поле концентрации двухцепочных ДНК  $c_2$  (справа) для числа Грасгофа  $\operatorname{Gr} = 3000$ , в момент времени  $t = 100$  безразмерных секунд. Из рис. 1 видно, что реализуется режим течения с преимущественно одним вихрем в центре полости, и наибольшая концентрация двухцепочных ДНК оказывается внутри этого вихря, то есть, благоприятная температура для элонгации оказывается внутри свободно конвективного вихря.

На рис. 2 приведены линии тока и поле температуры (слева) и поле концентрации  $c_2$  (справа), для числа Грасгофа  $\operatorname{Gr} = 15000$ , в момент времени  $t = 100$  безразмерных секунд. Из рис. 2 легко заметить, что реализуется режим течения с преимущественными двумя симметричными вихрями по отношению к вертикальной средней линии полости, наибольшая концентрация двухцепочных ДНК оказывается внутри этих вихрей, отметим также, что величина максимальной концентрации на порядок выше, чем для случая при  $\operatorname{Gr} = 3000$ . Можно сделать вывод, что поливихревой режим свободно конвективного течения более благоприятен для реализации ПЦР.

На рис. 3 показано изменение во времени средней концентрации двухцепочных ДНК в зависимости от числа Дамкелера, можно увидеть, что с увеличением числа Дамкелера реакция происходит быстрее, так как становится выше характерная скорость реакции.

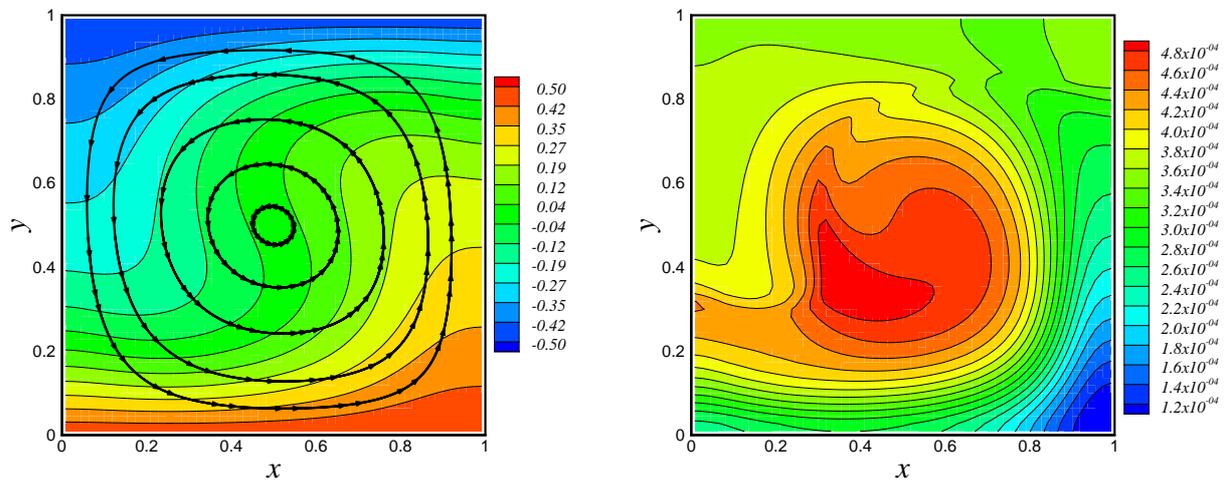


Рис. 1. Линии тока и поле температуры (слева) и поле концентрации  $c_2$  (справа),  $Gr = 3000$ ,  $t = 100$

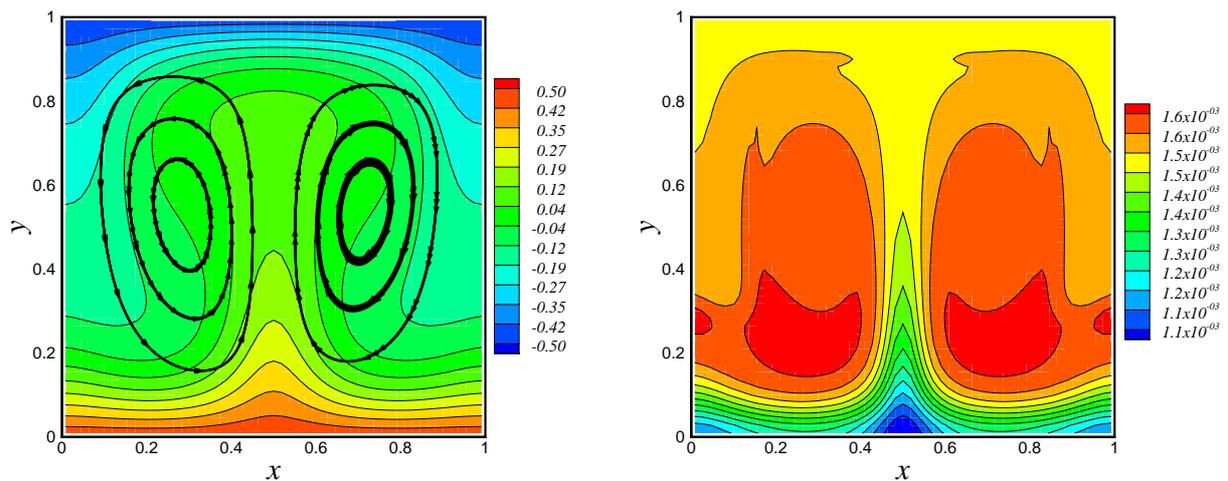


Рис. 2. Линии тока и поле температуры (слева) и поле концентрации  $c_2$  (справа),  $Gr = 15000$ ,  $t = 100$

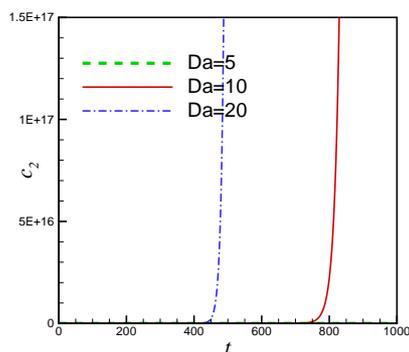


Рис. 3. Изменение во времени средней концентрации двухцепочных ДНК в зависимости от числа Дамкелера

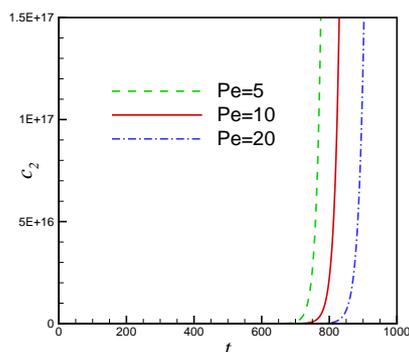


Рис. 4. Изменение во времени средней концентрации двухцепочных ДНК в зависимости от числа Пекле

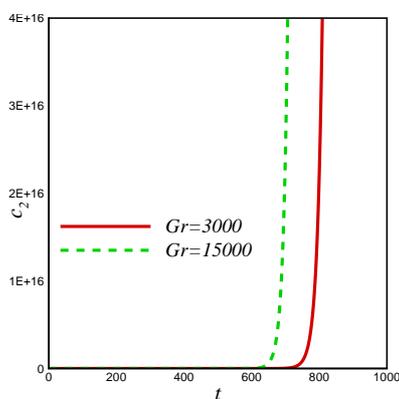


Рис. 5. Изменение во времени средней концентрации двухцепочных ДНК в зависимости от числа Грасгофа

На рис. 4 представлено изменение во времени средней концентрации двухцепочных ДНК в зависимости от числа Пекле, заметно, что с увеличением числа Пекле реакция происходит медленнее, что является следствием уменьшения коэффициента диффузии.

Таким образом, как диффузионный, так и кинетический механизмы в данной модели находят свое отражение и играют важную роль.

На рис. 5 приведено изменение во времени средней концентрации двухцепочных ДНК в зависимости от числа Грасгофа, видно, что при  $Gr = 15000$  реакция ПЦР протекает быстрее, что подтверждает предположение о том, что поливехревой режим более благоприятен для осуществления реакции ПЦР.

## 5. Заключение

Произведено математическое моделирование ПЦР при свободном конвективном теплообмене в квадратной полости, подогреваемой снизу. Исследовано влияние числа Пекле на ПЦР. Установлено, что при увеличении числа Пекле средняя концентрация молекул ДНК увеличивается медленнее. Изучено влияние числа Дамкелера на ПЦР. Обнаружено, что при увеличении числа Дамкелера средняя концентрация молекул ДНК увеличивается быстрее. Рассмотрено влияние режимов конвекции на ПЦР. Показано, что наиболее благоприятными режимами являются поливехревые режимы течения.

## Список литературы

- [1] Yariv E., Ben-Dov G., Dorfman K.D. Polymerase chain reaction in natural convection system: A convection-diffusion-reaction model. *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 71. № 6. Pp. 1008–1014.
- [2] Allen J.W., Kenward M., Dorfman K.D. Copled flow and reaction during natural convection. *Microfluid Nanofluid*. 2009. № 6. Pp. 121–130.
- [3] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392 с.
- [4] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. Москва: Наука, 1989. 319 с.
- [5] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Москва: Энергоатомиздат. 1984. 152 с.
- [6] Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах: Пер. с англ. Е.В. Калабина; под ред. Г.Г. Янькова. Москва: Издательство МЭИ. 2003. 312 с.

# Исследование растекания капли воды по поверхности металла методами молекулярной динамики<sup>1</sup>

Моисеева Е.Ф., Малышев В.Л.

Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем» БашГУ, Уфа

В статье представлены результаты моделирования методом молекулярной динамики для системы «вода–металл–водяной пар». Проведена верификация метода путем сравнения численных результатов с экспериментальными данными. Приведены результаты численного моделирования процесса растекания капли воды по поверхности платины.

## 1. Введение

Явления, связанные с взаимодействием жидкости, пара и твердого тела, а также растекание жидкости по твердой поверхности играют важную роль в изучении процессов теплообмена при фазовом переходе. Во многих задачах твердое тело рассматривается как нагреватель или конденсатор. Методы, используемые в механике и термодинамике, зачастую не позволяют с должной точностью рассмотреть процессы, происходящие вблизи линии контакта трех фаз, в то время как методы молекулярной динамики, описывают их с достаточной точностью. В 1998 году Маруяма представил результаты моделирования капли жидкости, находящейся в термодинамическом равновесии [1]. В 2000 году были опубликованы результаты по зарождению парового пузырька в жидкости [2]. В 2002 году Маруяма и Кимура представили результаты моделирования капли жидкого аргона на поверхности платины [3]. Ими изучена зависимость структуры капли от типа решетки и параметров потенциала взаимодействия. Одним из самых распространенных веществ в мире является вода. Поэтому моделирование динамики молекул воды интересно не только с практической точки зрения, но и с точки зрения фундаментальных исследований. В данной работе представлены результаты моделирования капли воды на поверхности платины, показан процесс растекания ее по поверхности металла при различных термодинамических параметрах.

## 2. Математическая модель

Моделирование методами молекулярной динамики используется для определения свойств систем, в которых движение частиц (атомов или молекул) определяется вторым законом Ньютона. В классической молекулярной динамике, положения частиц определяются из решения классических уравнений движения:

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{F(r_i)}{m_i}, F(r_i) = -\frac{\partial}{\partial r_i} U(r^N), \quad (1)$$

где  $r_i$  — радиус-вектор  $i$ -й частицы;  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы и  $v_i$  — ее скорость.

Однако, прежде всего, необходимо вычислить силу  $F(i)$ , действующую на атом  $i$ , которая в большинстве случаев вычисляется в соответствии с потенциалом взаимодействия  $U(r^N)$ , где  $r^N = (r_1, r_2, \dots, r_3)$  представляет собой набор координат всех частиц.

### 2.1. Модель воды

Компьютерное моделирование воды впервые было описано в работах Ваттса и Баркера [4], Рахмана и Штиллингера примерно сорок лет назад [5]. Основной задачей при моделировании воды является выбор модели потенциала, описывающей взаимодействие молекул. В данной работе используется модель TIP4P. Подобная геометрия была предложена Йоргенсенем [6], который определил параметры потенциала с целью наиболее точного воспроизведения энтальпии парообразования и плотности жидкой воды при комнатной температуре.

Особенность этой модели заключается в том, что расположение частицы, имеющей отрицательный заряд (чаще всего обозначается  $M$ ), не совпа-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант 11.G34.31.0040).

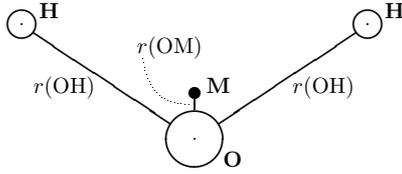


Рис. 1. Модель воды TIP4P

дает с положением кислорода, а лежит на биссектрисе угла Н-О-Н. Модель воды, изображенная на рис. 1, имеет плоскую конфигурацию и содержит 4 связанных частицы, две из которых — обозначенные  $M$  и  $O$ , ассоциированы с ядром кислорода, и две — обозначенные  $H$  — с водородом. Величины, определяющие расстояние между атомами, равны:

$$r_{OH} = 0.957\text{Å}; r_{OM} = 0.15\text{Å}; \angle_{HOH} = 104.5^\circ.$$

Таким образом, заряд кислорода смещается в другую точку, в результате чего кислород распадается на две воображаемых частицы, одна из которых ( $M$ ) заряжена, но не имеет массы, а другая ( $O$ ) — не заряжена, однако имеет массу кислорода. Энергия взаимодействия между двумя молекулами  $i$  и  $j$  представляет собой сумму энергий взаимодействия всех атомов, часть из которых взаимодействуют согласно потенциалу Леннарда-Джонса, а часть — согласно закону Кулона:

$$u_{ij} = \sum_{k \in \{i \setminus O\}} \sum_{l \in \{j \setminus O\}} \frac{q_k q_l}{r_{kl}} + 4\epsilon_w \left[ \left( \frac{\sigma_w}{r_{OO}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_w}{r_{OO}} \right)^6 \right]. \quad (2)$$

Соответственно сила взаимодействия имеет следующий вид:

$$\vec{f}_{ij} = \sum_{k \in \{i \setminus O\}} \sum_{l \in \{j \setminus O\}} \frac{q_k q_l}{r_{kl}} \cdot \vec{r}_{ij} + 48\epsilon_w \left[ \left( \frac{\sigma_w^{12}}{r_{OO}^{14}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_w^6}{r_{OO}^8} \right) \right] \cdot \vec{r}_{ij} \quad (3)$$

где  $q_l$  — это заряд атома  $l$ ;  $q_k$  — заряд атома  $k$  и  $r_{kl}$  — расстояние между атомами  $l$  и  $k$  двух различных молекул. Параметры Леннарда-Джонса для этой модели равны  $\sigma_w = 3.154 \text{Å}$  и  $\epsilon_w = 1.07 \cdot 10^{-21}$  Дж, а заряды  $q_O = -1.04|e|$  и  $q_H = -q_O/2$ .

## 2.2. Модель платины

В данной работе металлическая подложка сделана из платины. Она состоит из атомов, расположенных согласно FCC решетке, и ее поверхность находится в контакте с водой. Константа решетки равна  $a_{Pt} = 3.92 \text{Å}$ . Взаимодействие атомов

платины описывается потенциалом взаимодействия Леннарда-Джонса:

$$\phi(r_{ij}) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] \quad (4)$$

с параметрами  $\epsilon = \epsilon_{ss} = 109.25 \cdot 10^{-21}$  Дж и  $\sigma = \sigma_{ss} = 2.54 \text{Å}$ .

## 2.3. Модель вода-платина

Потенциал взаимодействия, описывающий взаимодействие воды с платиной, должен удовлетворять как минимум двум условиям. Во-первых, он должен правильно описывать абсорбционные свойства на поверхности молекул платины, которые изучаются при любых исследованиях, связанных с поведением воды на поверхности металла. Во-вторых, он должен удовлетворять хотя бы минимальным ориентационным требованиям, атомы кислорода должны подходить ближе к поверхности, чем атомы водорода.

Существует несколько потенциалов, удовлетворяющих вышеизложенным требованиям. Один из них описана Спором и Хайнцгером [7, 8] в 1988 году. Эта модель может быть использована для точного предсказания структуры и ориентации воды на поверхности платины. Однако, ее притягивающие свойства слишком сильны на поверхности. Использование этой модели не позволяет получить каплю на поверхности металлов, а приводит к образованию тонкой пленки.

Другая модель потенциала была предложена Жу и Филлотом в 1994 году [9]. Потенциальная функция состоит из трех частей:

1. электронной проводимости молекул воды;
2. ближнего анизотропного взаимодействия;
3. ближнего изотропного взаимодействия.

$$\begin{aligned} \Phi_{H_2O-surf} &= \Phi_{H_2O-cond} + \\ &+ \Phi_{an}(O; r_O) + \Phi_{isr}(O; r_O) + \\ &+ \sum_H [\Phi_{an}(H; r_H) + \Phi_{isr}(H; r_H)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi_{H_2O-cond} = \sum_{l,k} \frac{q_l q_k}{2r_{lk}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{an}(p, r_p) &= 4\epsilon_{p-Pt} \sum_j \left[ \left( \frac{\sigma_{p-Pt}^2}{(\alpha \rho_{pj})^2 + z_{pj}^2} \right)^6 - \right. \\ &\left. - \left( \frac{\sigma_{p-Pt}^2}{\left( \frac{\rho_{pj}}{\alpha} \right)^2 + z_{pj}^2} \right)^3 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi_{isr}(p, r_p) = -4\epsilon_{p-Pt} \sum_j \frac{c_{p-Pt} \sigma_{p-Pt}^{10}}{r_{pj}^{10}}, \quad (8)$$

где  $\alpha = 0.8$ ;  $\sigma_{O-Pt} = 2.70 \text{ \AA}$ ;  $\epsilon_{O-Pt} = 6.44 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ ;  $c_{O-Pt} = 1.28$ ;  $\sigma_{H-Pt} = 2.55 \text{ \AA}$ ;  $\epsilon_{H-Pt} = 3.91 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ ;  $c_{H-Pt} = 1.20$ .

Уравнение (6) представляет собой потенциал Кулоновского взаимодействия между зарядами атомов воды и их отражений, расположенных симметрично относительно поверхности платины.

#### 2.4. Верификация кода

Термин «структура жидкости» весьма распространен. В отличие от кристаллической структуры твердого тела, под структурой жидкости следует понимать статистическую закономерность межмолекулярных расстояний и ориентаций, характерных для любой плотноупакованной системы. Благодаря конечному размеру молекул и силам межмолекулярного взаимодействия, любой жидкости свойственен ближний порядок в расположении частиц и отсутствие дальнего порядка. Отсутствие дальнего порядка означает, что порядок в одном месте никак не действует на порядок в другом. Удобным методом описания структуры простой жидкости является функция радиального распределения, которая может быть рассчитана на основании данных по расстоянию рентгеновских лучей и нейтронов.

Вероятность того, что элемент объема  $dV$  в жидкости объема  $V$  содержит заданную молекулу, пропорциональна  $dV/V$ . Вероятность, что данная пара молекул занимает два таких объема —  $(dV/V)^2$  (при этом предполагается, что расстояние  $r$  между частицами достаточно велико и их межмолекулярный потенциал мал). Если же расстояние между молекулами приближается к диаметру молекулы  $d_0$ , то объем молекулы и силы межмолекулярного взаимодействия жестко определяют расстояние между молекулами. В этом случае вероятность того, что данная пара занимает два определенных элемента объема, будет равна

$$g(r) \left( \frac{dV}{V} \right)^2,$$

где  $g(r)$  — радиальная функция распределения или поправка к фактору свободного распределения. Вероятность найти какую-либо молекулу в объеме  $dV$  на расстоянии  $r$  от центра фиксированной молекулы будет равна

$$g(r) \frac{dV}{V}.$$

Число молекул в сферической области толщины  $dr$  (рис. 2) будет равно

$$N g(r) \frac{dV}{V} = \frac{N}{V} 4\pi r^2 dr,$$

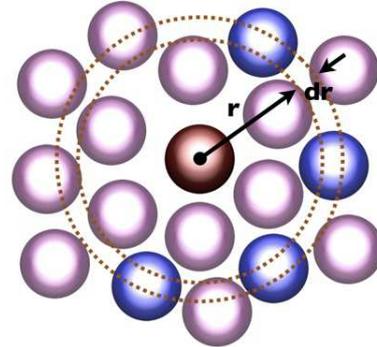


Рис. 2. Пространственная дискретизация для нахождения радиальной функции распределения

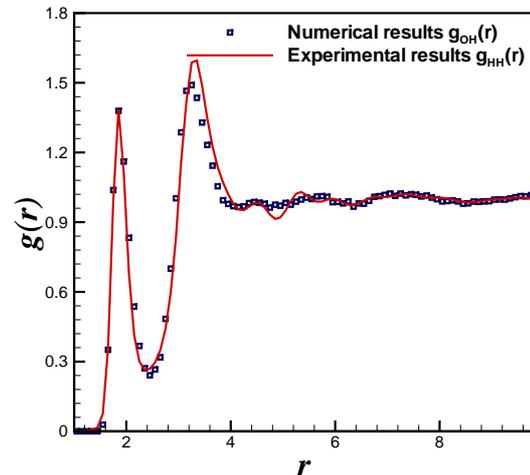


Рис. 3. Радиальная функция распределения  $g_{OH}$  для модели TIP4P

где  $N$  — число молекул в объеме  $V$ , а  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

Исследование структуры жидкости посредством функции радиального распределения было предложено в 1920 г. Дебаем и Менке [10]. Основной способ экспериментального определения функции радиального распределения — анализ картин, полученных с помощью дифракции рентгеновских лучей от изучаемого образца. На рис. 3–5 приведены результаты экспериментального и численного исследований корреляционной функции для молекулы воды. Температура в системе поддерживается постоянной и равной  $25^\circ \text{C}$ . Можно заметить, что результаты численного эксперимента хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [11], что показывает справедливость рассматриваемой модели и ее реализации.

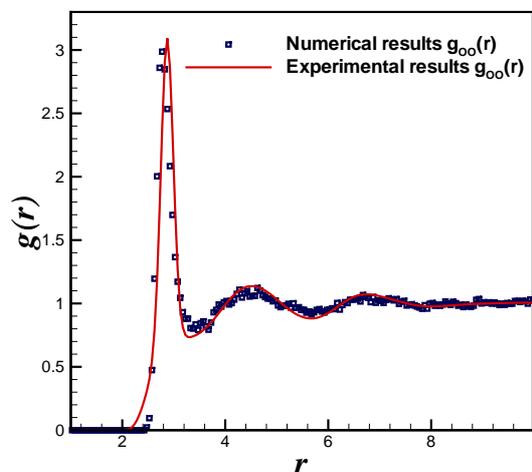


Рис. 4. Радиальная функция распределения  $g_{oo}$  для модели TIP4P

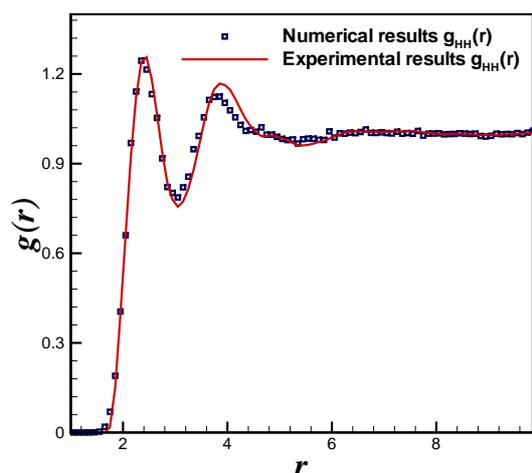


Рис. 5. Радиальная функция распределения  $g_{HH}$  для модели TIP4P.

### 3. Результаты моделирования

Расчеты проводились для системы, содержащей  $18 \times 18 \times 18$  молекул воды и 5184 молекул платины, распределенных согласно кристаллической решетке FCC  $\langle 100 \rangle$ . Периодические граничные условия применяются к четырем вертикальным стенкам моделируемой области, а на верхней границе задано условие отражения. Температура в системе поддерживается постоянной, равной  $T = 350$  К. Равновесие в системе достигается за счет использования термостата Берендсена, и в последующем поддерживается термостатом Нозе-Хувера.

Процесс растекания капли представлен на

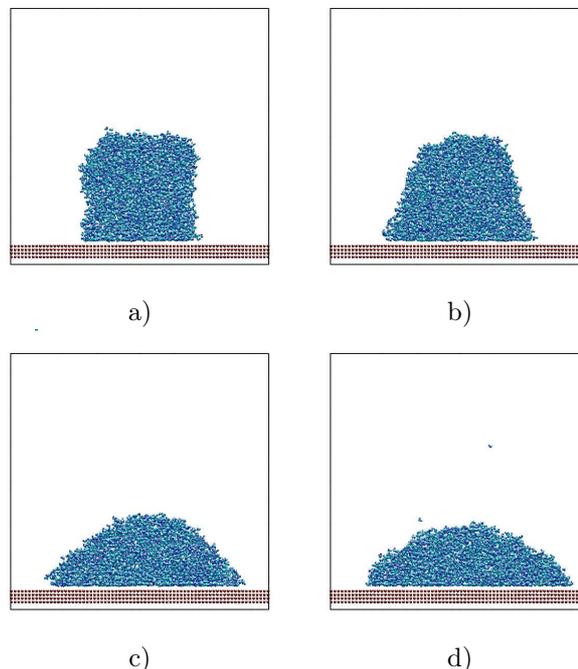


Рис. 6. Капля воды на поверхности платины в различные моменты времени: а)  $t = 6$  пс, б)  $t = 20$  пс, в)  $t = 50$  пс, д)  $t = 100$  пс

рис. 6. Из результатов моделирования видно, что капля принимает полусферическую форму и стоит отметить, что на временах, больших 100 пс, геометрия капли не претерпевает сильных изменений.

### 4. Заключение

В статье представлены результаты моделирования методом молекулярной динамики для системы «вода–металл–водяной пар». Показано, что примененный метод хорошо согласуется с экспериментальными данными. Приведены результаты численного моделирования процесса растекания капли жидкой воды по поверхности платины. В дальнейшем планируется исследовать зависимость краевого угла смачивания, изучить его зависимость от термодинамических параметров. Дополнить систему растворенным в воде газом и определить, как его наличие будет влиять на поведение системы в целом.

### Список литературы

- [1] Maruyama S., Kurashige T., Matsumoto S., Yamaguchi Y. and Kimura T. Liquid droplet in contact with a solid surface // *Microscale Thermophysical Engineering Journal*, 2:49–62, 1998.

- [2] Maruyama S. and Kimura T. A molecular dynamics simulation of a bubble nucleation on solid surface // International Journal of Heat & Technology, 8:69–74, 2000.
- [3] Kimura T. and Maruyama S. Molecular dynamics simulation of heterogeneous nucleation of a liquid droplet on a solid surface // Microscale Thermophysical Engineering, 6:3–13, 2002.
- [4] Barker J.A. and Watts R.O. Structure of water; a monte carlo calculation // Chemical Physics Letters, 3:144–145, 1969.
- [5] Rahman A. and Stillinger F.H. Molecular dynamics study of liquid water // Journal of Chemical Physics, 55:3336–3360, 1971.
- [6] Jorgensen W.L., Chandrasekhar J., Madura J. D., Impey R. W. and Klein M.L. Comparison of simple potential functions for simulating liquid water // Journal of Chemical Physics, 79:926, 1983.
- [7] Heinzinger K. and Spohr E. Computer simulations of water-metal interfaces // Electrochimica Acta, 34:1849–1856, 1989.
- [8] E. Spohr. Computer simulation of the water/platinum interface // The Journal of Physical Chemistry, 93:6171–6180, 1989.
- [9] S-B. Zhu and M.R. Philpott. Interaction of water with metal surfaces // Technical Report 8, IBM Research Division, Almaden Research Center, San Jose, February 1994.
- [10] Г.Н. Зацепина. Свойства и структура воды. Издательство Московского Университета, 1974.
- [11] A.K. Soper and M.G. Phillips. A new determination of the structure of water at 25c // Chemical Physics, 107:47–60, 1986.

## Моделирование процесса копирования формы выступа на электроде–инструменте при электрохимической обработке

Муксимова Р.Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Задачи моделирования нестационарного электрохимического формообразования сводятся к решению двух краевых задач для определения аналитических функций комплексного переменного: конформного отображения параметрической плоскости на физическую и частных производных по времени координат точек межэлектродного пространства. Каждая из функций ищется в виде суммы известной функции с особенностями и двух неизвестных функций, определяемых с помощью формул Шварца или Келдыша–Седова. Одна из неизвестных функций предназначена для описания формы электрода–инструмента, вторая — обрабатываемой поверхности. Представлены результаты численного решения задач с электродом в виде круга и пластины.

### 1. Введение

Применение численно-аналитических методов для моделирования нестационарной электрохимической обработки (ЭХО) до настоящего времени ограничивалось решениями задач с точечным, полубесконечным пластинчатым [1, 2], криволинейным гладким [3] и плоским со щелью [4,5] электрод-инструментом (ЭИ). Для моделирования процесса прорезания пазов ЭИ в форме круга или другой ограниченной формы необходимо существенное видоизменение методов.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную задачу электрохимического формообразования с помощью ЭИ, представляющего собой круг радиуса  $R$  (рис. 1). ЭИ заглубляется в заготовку со скоростью  $V_{et}$  под прямым углом к поверхности. Начальный зазор  $CD$  равен  $S_0$ .

Поверхности электродов считаются эквипотенциальными: на катоде потенциал  $\Phi = -U$  (где  $U$  — напряжение), на аноде  $\Phi = 0$ , поэтому форма области МЭП на плоскости комплексного потенциала  $W$  представляет собой прямоугольник (рис. 2).

Скорость электрохимического растворения  $V_{etm} = \frac{dY_C}{dt}$  локально определяется законом Фарадея

$$V_{etm} = \eta k E_n, \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $\eta$  — анодный выход по току;  $k$  —

электрохимическая постоянная;  $E_n$  — нормальная к анодной поверхности составляющая напряженности электрического поля.

Перейдем к безразмерным величинам  $z, x, y, \tau$  и  $w$ , где  $l = k\eta U/V_{et}$  (величина стационарного зазора в задаче об обработке плоским горизонтальным ЭИ):

$$\begin{aligned} z &= Z/l, & x &= X/l, & y &= Y/l, \\ \tau &= \frac{V_{et}}{l} t = k\eta_0 U t/l^2, & w &= \frac{W}{U}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда

$$v_{et} = -\frac{dy_C}{d\tau} = -\frac{1}{l} \frac{dY_C}{V_{et} dt} = \frac{V_{et}}{V_{et}} = 1. \quad (3)$$

### 3. Краевые условия

В [1–6] закон Фарадея (1) с учетом (2) преобразован к виду

$$\Im \left( \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) = -\Im \frac{\partial w}{\partial \sigma}, \quad (4)$$

где  $z(\chi, \tau), \frac{\partial z}{\partial \tau}(\chi, \tau), w(\chi, \tau)$  — аналитические функции некоторого комплексного параметра  $\chi = \sigma + i\nu$ .

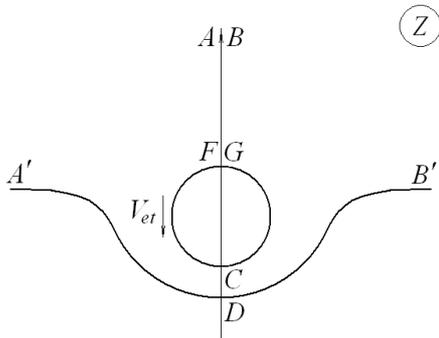


Рис. 1. Схема межэлектродного пространства (МЭП)

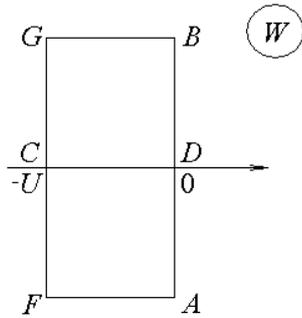


Рис. 2. Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

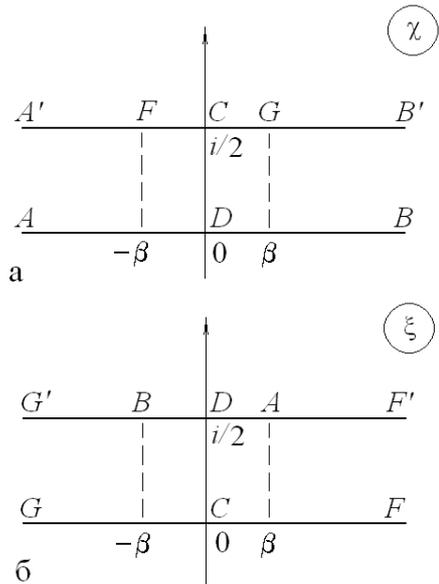


Рис. 3. Формы образов МЭП на параметрических плоскостях  $\chi$  и  $\xi$

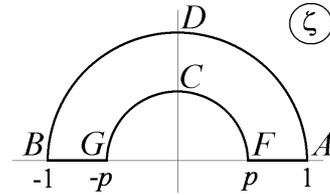


Рис. 4. Форма образа МЭП на параметрической плоскости  $\zeta$

#### 4. Численный метод

Выберем в качестве параметрической переменную  $\chi$ , область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу единичной ширины (рис. 3(a)). Конформное отображение параметрической плоскости  $\chi$  на плоскость комплексного потенциала удобнее определять через переменную  $\zeta$  (рис. 4):

$$\chi = \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - i \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \frac{p^{2m-1} (\zeta^{2m-1} + \zeta^{-2m+1})}{p^{2m-1} - p^{-2m+1}}. \quad (5)$$

Комплексный потенциал и его производная равны

$$W = -\frac{U}{\ln p} \left( \ln \zeta - i \frac{\pi}{2} \right), \quad \frac{\partial W}{\partial \chi} = -\frac{U}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости  $\chi$  на область МЭП физической плоскости в неподвижной (относительно тела заготовки) системе координат в виде суммы

$$z(\chi, \tau) = g(\tau) sh \pi \chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau), \quad (7)$$

где первое слагаемое при  $g > 0$  конформно отображает полосу плоскости  $\chi$  на верхнюю полуплоскость с разрезом, проведенным вверх от точки  $0 + ig$  до бесконечности;  $z_a(\chi, \tau)$  — аналитическая в области  $D_\chi$  и непрерывная в ее замыкании  $\bar{D}_\chi$  функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямолинейной (при  $\chi = \sigma + i \Im z_a(\chi, \tau) = 0$ );  $z_c(\xi, \tau)$  — аналитическая в полосе  $D_\xi$  (рис. 3(б)) и непрерывная в ее замыкании  $\bar{D}_\xi$  функция, предназначенная для описания формы ЭИ (при  $\xi = \omega + i/2 \Im z_c(\xi, \tau) = 0$ ) (рис. 3(б)). Связь  $\xi$  и  $\chi$ :

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e^{2\pi\xi} + e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\xi} e^{2\pi\beta} + 1} + \frac{i}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e^{2\pi\chi} + e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\chi} e^{2\pi\beta} + 1} + \frac{i}{2}. \quad (8)$$

Из (8) найдем ординату точки  $C$  электрод-инструмента:

$$\Im z \left( \frac{i}{2}, \tau \right) = g(\tau) + \Im z_c(0, \tau) = s_0 - \tau, \quad (9)$$

$$\frac{dg}{d\tau} = -1 - \Im \frac{\partial}{\partial \tau} z_c(0, \tau)$$

Допустим, ордината точки  $G$  электрод-инструмента равна  $H$ . Тогда

$$\frac{H}{l} = \frac{H_0}{l} - \tau = g(\tau) \operatorname{ch}(\pi\beta(\tau)) + \frac{1}{i} \left\{ z_a \left( \beta(\tau) + \frac{i}{2}, \tau \right) + z_c(\infty, \tau) \right\}, \quad (10)$$

где  $\beta(\tau)$  — образ точки  $G$ , определяемый из этого уравнения.

Функция  $z_a(\chi, \tau)$  определяется следующим образом. Будем искать решение на границе  $\chi = \sigma + i0$  в узловых точках  $\sigma_m$  ( $m = 0, \dots, n$ ). Заданными на каждом временном шаге будут значения  $\Im z_a(\sigma_m, \tau_j) = y_m$ . Примем  $\Im z_a(\sigma_n, \tau) = 0$ , поскольку  $z_a(\sigma, \tau)$  быстро (как экспонента) убывает при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Значения  $\Im z_a(\sigma, \tau)$  в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

Поскольку  $z_a(\chi, \tau)$  — аналитическая функция, имеющая чисто мнимые значения на прямой  $\Im \chi = 1/2$ , аналитически продолжим ее вверх на полосу единичной ширины. В силу принципа симметрии  $\Im z_a(\sigma + i, \tau) = \Im z_a(\sigma + i0, \tau)$ . Для восстановления функции  $z_a(\chi, \tau)$  используем формулу Шварца

$$z_a(\chi, \tau) = \int_0^\infty \Im z_a(\sigma, \tau) \frac{sh\pi\chi d\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi} + \int_0^\infty \Im z_a(\sigma, \tau) \frac{sh\pi\chi d\sigma}{ch\pi\sigma + ch\pi\chi}. \quad (11)$$

Производная  $\Im \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = -\Im \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(-\sigma, \tau)$ , тогда

$$\frac{\partial z_a}{\partial \chi} = \int_0^\infty \Im \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{sh\pi\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi} d\sigma - \int_0^\infty \Im \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{sh\pi\sigma}{ch\pi\sigma + ch\pi\chi} d\sigma. \quad (12)$$

Функция  $z(\xi, \tau)$  получается аналогичным образом. Будем искать решение на границе  $\xi = \omega$  в узловых точках  $\omega_m$  ( $m = 0, \dots, n$ ). Искомыми будут значения  $\Re z_c(\omega_m, \tau_j) = \bar{x}_m$ . Примем  $\Re z_c(\omega_n, \tau) = 0$ .

Значения  $\Re z_c(\omega, \tau)$  в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна  $P_c(\sigma)$ , имеющего две непрерывные производные.

Отметим, что  $z_c(\xi, \tau)$  — аналитическая функция, имеющая чисто действительные значения на отрезке  $\Im \xi = 1/2$ ,  $-\beta \leq \Re \xi \leq \beta$  (анод  $BDA$ ) и чисто мнимые значения на лучах  $\Im \xi = 1/2$ ,  $\Re \xi \leq -\beta$  и  $\Im \xi = 1/2$ ,  $\Re \xi \geq \beta$  (разрез  $GB, AFl$ ).

Для восстановления функции  $z_c(\xi, \tau)$  используем формулу Келдыша–Седова:

$$\frac{z_c(\xi, \tau)}{G(\xi)} = \int_0^\infty \Im \left[ \frac{z(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{sh\pi\omega d\omega}{ch\pi\omega - ch\pi\xi} + \int_0^\infty \Im \left[ \frac{z(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{sh\pi\omega}{ch\pi\omega + ch\pi\xi} d\omega - g_1(\tau), \quad (13)$$

$$G(\xi) = sh(\pi\chi) = \frac{i}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right), \quad u = \sqrt{\frac{e^{2\pi\xi} + e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\xi} e^{2\pi\beta} + 1}},$$

$$g_1(\tau) = 2 \int_0^\infty \Im \left[ \frac{z(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{sh\pi\omega ch\pi\omega}{ch^2\pi\omega + sh^2\pi\beta} d\omega.$$

Отметим, что слагаемое  $g_1(\tau) G(\xi)$ , аналогичное слагаемому в (7), введено так, чтобы функция  $z_c(\xi, \tau)$  не имела особенностей в точках  $A$  и  $B$ .

Производная  $\frac{\partial z_c}{\partial \omega}(\omega, \tau)$  вычисляется следующим образом: с помощью дифференцирования построенного сплайна  $P_c(\omega)$  вычисляются значения производных  $\frac{\partial x_c}{\partial \omega}(\omega, \tau)$ . По полученным с помощью (13) значениям  $y_c(\omega, \tau)$  строится сплайн  $P_{y_c}(\omega)$ , дифференцированием которого получают производные  $\frac{\partial y_c}{\partial \omega}(\omega, \tau)$ .

## 5. Алгоритм численного решения

Нестационарная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и решается численным методом. При этом на каждом временном шаге  $\tau_j = j\Delta\tau$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости  $\chi$  на физическую плоскость  $z$ . При этом задача конформного отображения в полном объеме решается только при  $\tau = 0$ . Значения переменных  $y_m(\tau_{j+1})$  и  $\bar{x}_m(\tau_{j+1})$  на следующем шаге по времени вычисляются с помощью частных производных  $\frac{\partial y_a}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j)$ ,  $\frac{\partial x_c}{\partial \tau}(\omega_m, \tau_j)$ . Частные производные по времени определяются при решении краевой задачи: найти частную производную  $\frac{\partial z}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$  как аналитическую функцию комплексного параметра  $\chi$ , удовлетворяющую краевому условию (4).

Для вычисления производной  $\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$  применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения  $z_a(\chi, \tau_j)$ . Искомыми параметрами на каждом временном шаге  $\tau_j = j\Delta\tau$  будут значения  $\Im \frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j) = q_m$ . Значения  $\Im \frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma, \tau_j)$  в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна  $Q(\sigma, \tau)$ . Для восстановления  $\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$  используем формулу Шварца, аналогичную (11), где вместо  $\Im z_a(\sigma, \tau)$  используется  $Q(\sigma, \tau)$ .

Для вычисления производной  $\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau_j)$  ( $\chi$  фиксировано) также применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения  $z_c(\xi, \tau_j)$ . Искомыми параметрами на каждом временном шаге  $\tau_j = j\Delta\tau$  будут значения  $\Re \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega_m, \tau_j) = r_m$ . Значения  $\Re \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau_j)$  в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна  $R(\omega, \tau)$ . Для восстановления  $\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau_j)$  используем формулу Келдыша-Седова, аналогичную (13) (с учетом того, что  $\frac{\partial}{\partial \tau} G(\xi) = \frac{\partial}{\partial \tau} sh(\pi\xi) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau) &= -\frac{dg_1}{d\tau}(\tau) + \\ &+ \int_0^\infty \Im \left[ \frac{\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{sh\pi\omega d\omega}{ch\pi\omega - ch\pi\xi} + \\ &+ \int_0^\infty \Im \left[ \frac{\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{sh\pi\omega d\omega}{ch\pi\omega + ch\pi\xi} \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\frac{dg_1}{d\tau}(\tau) = 2 \int_0^\infty \Im \left[ \frac{\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{sh\pi\omega ch\pi\omega}{ch^2\pi\omega + sh^2\pi\beta} d\omega$ .

С учетом (8)–(14) определяются производные  $\frac{\partial z}{\partial \tau}$ .

Значения  $q_m, r_m$ , определяются методом коллокаций по краевому условию (4):

$$\Im \left[ \frac{\partial z}{\partial \tau}(\sigma_m) \frac{\overline{\partial z}}{\partial \sigma}(\sigma_m) \right] + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}(\sigma_m) = 0, \quad (15)$$

$m = 0, \dots, N - 1.$

На катоде краевое условие с учетом (21), (22) имеет вид

$$\Im \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial \tau}(\omega_m) + i \right) \frac{\overline{\partial z}}{\partial \sigma}(\omega_m) \right] = 0, \quad (16)$$

$m = 0, \dots, N - 1.$

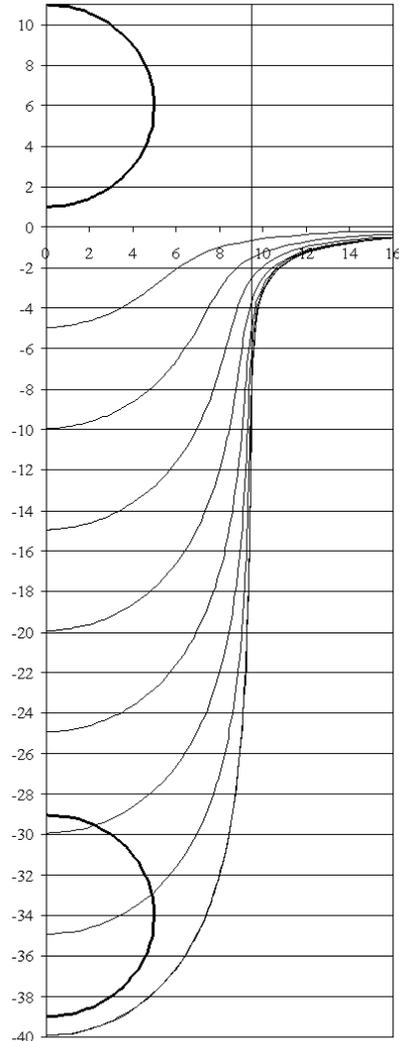


Рис. 5. Формы нестационарных поверхностей при обработке круглым ЭИ для  $s_0=1, \Delta\tau = 5, r = 5$

После решения системы линейных алгебраических уравнений (15), (16) и определения частных производных  $\Im \frac{\partial z_a}{\partial \tau} = q_m, \Re \frac{\partial z_c}{\partial \tau} = r_m$ , производится шаг по времени по методу предиктор-корректор второго порядка точности.

Далее снова повторяется процесс вычисления  $\frac{\partial z_a}{\partial \chi}, \frac{\partial z_c}{\partial \xi}, q_m, r_m$  и т.д.

### 6. Численные результаты

Численные результаты представлены на рис. 5–7. На рис. 5 показаны формы поверхности при обработке круглым ЭИ с радиусом  $r = R/l = 5$  при  $\eta = \text{const}$  ( $\Delta\tau$  — шаг по вре-

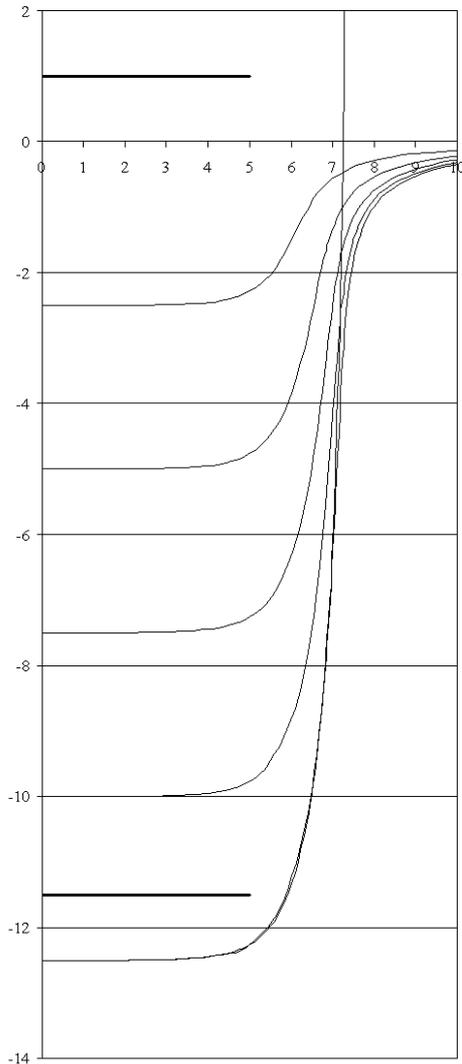


Рис. 6. Формы нестационарных поверхностей при обработке горизонтальным пластинчатым ЭИ для  $l = L/R = 5$ ,  $s_0 = 1$ ,  $\Delta\tau = 2.5$

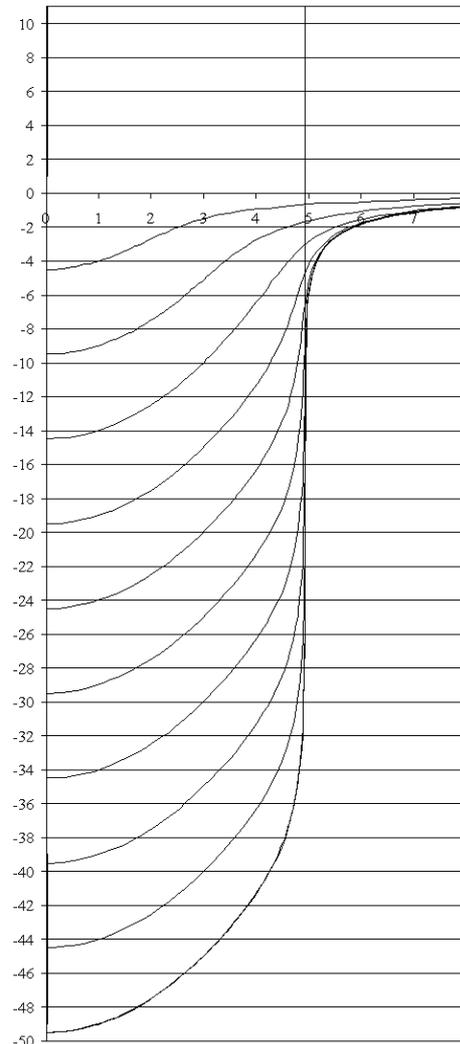


Рис. 7. Формы нестационарных поверхностей при обработке вертикальным пластинчатым ЭИ для  $L = 10$ ,  $s_0 = 1$ ,  $\Delta\tau = 5$

мени). Картина в системе координат, связанной с неподвижной асимптотической поверхностью анода, показывает ход процесса растворения и позволяет увидеть установление стационарной формы обрабатываемой поверхности (которая была рассчитана заранее [5]). При уменьшении  $r$  в пределе получается задача обработки точечным ЭИ [5].

При рассмотрении форм ЭИ, отличных от круглой, имеет смысл рассмотреть граничные формы, которыми являются пластинчатые ЭИ.

Результаты численного решения при обработке горизонтальным пластинчатым ЭИ длины  $2L$  для  $\eta = \text{const}$  приведены на рис. 6.

При  $L \rightarrow \infty$  приходим к задаче обработки

полубесконечным ЭИ. Стационарное решение для этой задачи имеет вид

$$x = \frac{1}{\pi} \left( 2 \ln(y + 1) + 2 \ln \frac{\pi}{2} + 2 \right).$$

Формы нестационарной поверхности при обработке вертикальным пластинчатым ЭИ длины  $L$  приведены на рис. 7 для  $\eta = \text{const}$ . При  $L \rightarrow 0$  формы приближаются к соответствующим формам для точечного ЭИ.

## 7. Заключение

В данной работе решены нестационарные задачи прорезания пазов круглым и пластинчатым (горизонтальным и вертикальным) ЭИ. Для срав-

нения рассматривались предельные (по форме ЭИ) случаи формообразования точечным и плоским неограниченным вертикальным и горизонтальным ЭИ.

Во всех рассмотренных примерах наблюдалось установление стационарных процессов.

### Список литературы

- [1] Zhitnikov V.P., Fedorova G.I., Zinatullina O.R. Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining // *Journal of Materials Processing Tech.* 2004. Vol. 149/1–3. Elsevier. Pp. 398–403.
- [2] Zhitnikov V.P., Fedorova G.I., Sherykhalina N.M., Urakov A.R. Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem // *Journ. Eng. Math.* 2006. Vol. 55, Nos. 1–4. Special Issue. A taste of engineering mathematics from present-day Russia. Pp. 255–276.
- [3] Житников В.П., Федорова Г.И. Квазианалитический метод решения плоских задач нестационарного электрохимического формообразования // *Вестник УГАТУ.* 2006. Т. 7, № 1(14). С. 110–117.
- [4] Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Оценка параметров формы выступа при нестационарной электрохимической обработке // *Тезисы докладов Российской конф. «Многофазные системы: природа, человек, общество, технологии».* Уфа: Нефтегазовое дело, 2010. С. 186–187.
- [5] Поречный С.С., Муксимова Р.Р., Маннапов А.Р. Моделирование процесса формообразования выступов при электрохимической обработке // *Вестник УГАТУ.* 2010. Т. 14, № 2(37). С. 195–201.
- [6] Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 413 с.

# Смена симметрии однородной неустойчивости при изменении температуры в стационарном сдвиговом потоке нематика со слабыми граничными условиями в электромагнитном поле<sup>1</sup>

Насибуллаев И.Ш.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе проводится численное исследование индуцированного изменения температуры переключения симметрии однородной неустойчивости в стационарном сдвиговом потоке нематического жидкого кристалла в электромагнитном поле со слабыми граничными условиями.

## 1. Введение

Нематические жидкие кристаллы (НЖК) представляют собой фазу, промежуточную между твердым телом и жидкостью. Как и твердые тела НЖК обладают анизотропией ряда физических свойств (упругость, двулучепреломление), а как жидкость могут течь. Эти особенности приводят к тому, что НЖК чувствителен к внешним воздействиям (гидродинамические течения, электромагнитные поля, ориентирующее влияние твердой поверхности) и демонстрируют ряд физических явлений, одним из которых является ориентационная неустойчивость — изменение равновесной ориентационной структуры НЖК выше порогового значения внешнего воздействия. Исследование комбинированного воздействия внешних электромагнитных полей и ориентирующего влияния ограничивающей поверхности (слабого сцепления) на устойчивость течения НЖК рассматривалась ранее в теоретической работе [1]. Было показано, что в зависимости от величин внешнего воздействия возможны четыре типа неустойчивости: два вида пространственной структуры (однородная и пространственно-периодическая) могут иметь две различные симметрии возмущений (четная и нечетная). В работе [2] на примере однородной неустойчивости было показано, что температура может влиять на величину порога неустойчивости. В данной работе приводятся результаты расчетов параметров, при которых возможна смена типа однород-

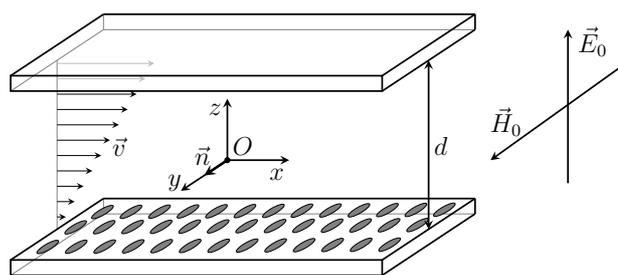


Рис. 1. Геометрия задачи

ной неустойчивости (смена симметрии структурно-ориентационного перехода) под действием температуры.

## 2. Математическая модель

Рассматривается слой НЖК толщиной  $d$ , заключенного между двумя бесконечными параллельными пластинами (рис. 1). Начало декартовой системы координат помещено в центре слоя, ось  $z$  направлена перпендикулярно слою. Исследуется ориентационная устойчивость НЖК в сдвиговом стационарном потоке вдоль оси  $Ox$  от внешних электрического  $\vec{E}_0$  (направленного перпендикулярно слою, вдоль оси  $Oz$ ) и магнитного  $\vec{H}_0$  (направленного перпендикулярно плоскости потока  $Oy$ ) полей и характера поверхностного сцепления в области температур существования нематической фазы ( $T = 20 \div 46.2^\circ \text{C}$ ). Начальная ориентация НЖК  $\vec{n}_0$  перпендикулярна плоскости потока (направлена вдоль оси  $Oy$ ).

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-97009).

Течение НЖК описывается уравнением Навье–Стокса [3]:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -p_{,i} + \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где введено обозначение для частной производной  $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$ ,  $p_{,i}$  — компоненты градиента давления;  $\rho$  — плотность НЖК;  $v_i$  — компоненты скорости жидкости.

Тензор вязкости характеризует вязкость жидкости при течении в различных направлениях и содержит 6 коэффициентов вязкости  $\alpha_i$ :

$$\Sigma_{ij} = \alpha_1 n_i n_j A_{km} n_k n_m + \alpha_2 n_i N_j + \alpha_3 n_j N_i + \alpha_4 A_{ij} + \alpha_5 n_i n_k A_{kj} + \alpha_6 A_{ik} n_k n_j. \quad (2)$$

Симметричный тензор скорости:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (3)$$

Скорость изменения ориентации директора:

$$N_i = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i}{\partial x_j} v_j + n_j \omega_{ij}. \quad (4)$$

Антисимметричный тензор скорости:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (5)$$

Уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} = 0. \quad (6)$$

Уравнение баланса моментов сил, действующих на директор:

$$I \frac{d}{dt} \left[ \vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} \right] = [\vec{n} \times \vec{h}^e] - [\vec{n} \times \vec{h}^d], \quad (7)$$

где  $I$  — момент инерции.

Упругая  $h^e$  и диссипативная  $h^d$  части молекулярного поля имеют вид:

$$h_i^e = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial n_{i,j}} - \frac{\partial F}{\partial n_i}, \quad h_i^d = \gamma_1 N_i + \gamma_2 A_{ij} \cdot n_j, \quad (8)$$

где  $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$ ,  $\gamma_2 = \alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$  — вращательные вязкости НЖК.

Объемная плотность свободной энергии  $F$  во внешнем электрическом  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{H}$  полях имеет вид:

$$F = \frac{1}{2} \{ K_{11} (\nabla \cdot \vec{n})^2 + K_{22} [\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{n})]^2 + K_{33} [\vec{n} \times (\nabla \times \vec{n})]^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_a (\vec{n} \cdot \vec{E})^2 - \mu_0 \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2 \}. \quad (9)$$

Здесь  $K_{ii}$  — константы упругости Франка;  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  — анизотропия диэлектрической проницаемости НЖК ( $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  — диэлектрические проницаемости параллельно и перпендикулярно направлению длинных осей молекул НЖК, соответственно);  $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$  — анизотропия магнитной восприимчивости;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость в вакууме, соответственно [4].

Так как директор представляет собой единичный вектор, записывается условие нормировки:

$$\vec{n}^2 = 1 \Rightarrow n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (10)$$

Граничные условия для скорости определяются условиями прилипания (скорость молекул НЖК на поверхности совпадает со скоростью самой поверхности):

$$v(z = -d/2) = 0, \quad v(z = +d/2) = V_0, \quad (11)$$

где  $V_0$  — скорость движения верхней пластины относительно неподвижной нижней.

Граничные условия на ориентацию директора определяются из условия равновесия моментов сил, действующих на директор на ограничивающей поверхности [5]:

$$\pm \frac{\partial F}{\partial (\partial n_i / \partial z)} + \frac{\partial F_s}{\partial n_i} = 0, \quad (12)$$

где знак « $\pm$ » соответствует поверхности  $z = \pm d/2$ ;  $F$  — объемная плотность свободной энергии;  $F_s$  — поверхностная плотность свободной энергии, которая для малых отклонений  $\vec{n}_1 = \vec{n} - \vec{n}_0$  директора  $\vec{n}$  от равновесия  $\vec{n}_0$ , по аналогии с потенциалом Раппини [6], имеет вид:

$$F_s = \frac{1}{2} W_a n_{1x}^2 + \frac{1}{2} W_p n_{1z}^2, \quad (13)$$

где  $W_a > 0$  — азимутальная сила поверхностного сцепления (характеризующая силу, которую необходимо приложить к директору для его поворота в плоскости твердой поверхности) и  $W_p > 0$  — полярная сила поверхностного сцепления (характеризующая силу, которую необходимо приложить к директору для его отклонения от плоскости твердой поверхности).

## 2.1. Базовое течение

Базовое состояние системы определим таким образом, чтобы директор был ориентирован перпендикулярно плоскости потока:

$$\vec{n}_0 = (0, 1, 0). \quad (14)$$

Базовая скорость имеет только компоненту  $v_x$  и зависит от  $z$  (плоское параллельное течение):

$$\vec{v}_0(z) = (v_{0x}(z), 0, 0). \quad (15)$$

В случае сдвигового потока давление постоянно (и равно атмосферному давлению с открытых концов ячейки), то есть  $p_{,x} \equiv 0$ . Таким образом, решение с учетом граничных условий (11) имеет вид:

$$v_{0x} = V_0 \left( \frac{z}{d} + \frac{1}{2} \right). \quad (16)$$

## 2.2. Линейный анализ устойчивости

Линейный анализ устойчивости позволяет определить пороговое значение параметров системы, при которых течение становится неустойчивым относительно бесконечно малых возмущений.

Ищем решения в следующем виде:

$$\vec{n}(z) = \vec{n}_0 + \vec{n}_1(z), \quad \vec{v}(z) = \vec{v}_0(z) + \vec{v}_1(z), \quad (17)$$

где  $\vec{n}_0$  и  $\vec{v}_0(z)$  — базовое состояние (14), (15) и  $\vec{n}_1(z)$ ,  $\vec{v}_1(z)$  — малые возмущения.

Для однородных (вдоль оси  $Oy$ ) возмущений:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(z) &= \{n_{1x}(z), n_{1y}(z), n_{1z}(z)\}, \\ \vec{v}_1(z) &= \{v_{1x}(z), v_{1y}(z), v_{1z}(z)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (17) в систему уравнений (1), (7) и граничные условия (11), (12) и линеаризуя полученные выражения относительно малых параметров компонент  $\vec{n}_1$  и  $\vec{v}_1$ , получаем уравнения на бесконечно малые возмущения, содержащие градиент сдвига  $v_{0x,z}$ . Порогу ориентационной неустойчивости соответствует значение  $v_{0x,z}$ , при котором существует нетривиальное решение для  $\{\vec{n}_1, \vec{v}_1\}$ . Пороговое значение  $v_{0x,z}$  зависит от параметров системы, определяемых внешними воздействиями и условиями (характера поверхностного сцепления, величины напряженности внешнего поля, температуры).

Для того чтобы определить характерные параметры системы и упростить запись уравнений, перепишем математическую модель в безразмерной форме. В качестве характерного расстояния выберем толщину слоя  $d$ , в качестве характерного времени — характерное время релаксации директора  $\tau_d = \frac{(-\alpha_2)d^2}{K_{22}}$ . В безразмерном виде компоненты директора и скорости (с тильдами) имеют вид:

$$\begin{aligned} n_{1x} &= \tilde{n}_{1x}, n_{1z} = \tilde{n}_{1z}, \\ v_{1x} &= \frac{d}{\tau_d} \tilde{v}_{1x}, v_{1z} = \frac{d}{\tau_d} \tilde{v}_{1z}, \partial_z = \frac{1}{d} \partial_{\tilde{z}}. \end{aligned}$$

Чтобы получить более компактную систему уравнений, используем следующие аффинные преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{1x} &= \frac{N_{1x}}{\beta}; \tilde{n}_{1z} = N_{1z}; \\ \tilde{v}_{1x} &= \frac{V_{1x}}{\beta^2}; \tilde{v}_{1z} = \frac{V_{1z}}{\beta^2 \eta_{23}}; \beta^2 = \frac{K_{22} \alpha_3 \eta_3}{K_{11} \alpha_2 \eta_1}; \end{aligned}$$

Введем безразмерные коэффициенты вязкости и упругости:

$$\begin{aligned} \eta_{13} &= \frac{\eta_1}{\eta_3}; \eta_{31} = \frac{\eta_3}{\eta_1}; \eta_{42} = \frac{\eta_4}{\eta_2}; \eta_{53} = \frac{\eta_5}{\eta_3}; \\ \alpha_{23} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3}; k_{21} = \frac{K_{22}}{K_{11}}; k_{31} = \frac{K_{33}}{K_{11}}; k_{32} = \frac{K_{33}}{K_{22}}, \end{aligned}$$

Введем безразмерные поля и характеристические величины:

$$\begin{aligned} e &= \text{sgn}(\varepsilon_a) \frac{\pi^2 E_0^2}{E_F^2}; h = \frac{\pi^2 H_0^2}{H_F^2}; \\ E_F &= \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_{11}}{|\varepsilon_a| \varepsilon_0}}; H_F = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_{22}}{\mu_0 \chi_a}}; \tau_v = \frac{\rho d^2}{\eta_3}, \end{aligned}$$

где  $E_F, H_F$  — поля перехода Фредерикса для жесткого сцепления;  $\tau_v$  — характерное время релаксации скорости.

Граничные условия перепишем в виде:

$$\begin{aligned} v_{1y}(z = \pm d/2) &= 0, \\ \pm \frac{K_{22}}{W_a} n_{1x,\tilde{z}} + n_{1x} &= 0, \\ \pm \frac{K_{11}}{W_p} n_{1z,\tilde{z}} + n_{1z} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для характеристики компонент силы поверхностного сцепления введем безразмерные величины  $\beta_a = \frac{K_{22}}{W_a d}, \beta_p = \frac{K_{11}}{W_p d}$  — отношения характеристической длины компоненты силы поверхностного сцепления  $\frac{K_{ii}}{W_j}$  к толщине слоя  $d$ .  $\beta_i = 0$  соответствует идеальному жесткому сцеплению (ориентация НЖК на поверхности фиксирована),  $\beta_i = \infty$  — идеальному слабому сцеплению (т.е. поверхность не оказывает ориентирующего воздействия на НЖК), а конечные значения  $\beta_i$  — реальному слабому сцеплению (отклонение ориентации молекул НЖК на поверхности от равновесного значения возрастает с ростом возмущения).

Контрольным безразмерным параметром для градиента скорости сдвига будет  $a^2 = \frac{\beta \tau_d V_0}{d}$ .

Окончательные уравнения в безразмерном виде (для удобства тильды опускаем):

$$\begin{aligned} V_{1y,zz} + (\eta_{23} - 1)(a^2 N_{1x})_{,z} &= 0, \\ -a^2 N_{1z} - N_{1x,zz} + h N_{1x} &= 0, \\ (\partial_z^2 + e - k_{21}h)N_{1z} + V_{1y,z} + a^2 \eta_{23} N_{1x} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} V_{1y}(z = \pm 1/2) &= 0, \\ \pm \beta_a N_{1x,z} + N_{1x} &= 0, \quad \pm \beta_p N_{1z,z} + N_{1z} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

### 2.3. Симметрия однородных неустойчивостей

Проводим анализ симметрий решений системы (20) с граничными условиями (21) относительно преобразования  $z \rightarrow -z$ . Обозначим как «четное» решение, решение с четной симметрией компоненты  $N_{1x}$ , «нечетное» — соответственно с нечетной симметрией этой компоненты. Симметрия остальных компонент определяется однозначно из уравнений для заданной симметрии одной из компонент.

Нечетное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} N_{1x} &= C_1 \operatorname{sh}(\xi_1 z) + C_2 \sin(\xi_2 z), \\ N_{1z} &= C_3 \operatorname{sh}(\xi_1 z) + C_4 \sin(\xi_2 z), \\ V_{1y} &= C_5 \operatorname{ch}(\xi_1 z) + C_6 \cos(\xi_2 z) + C_7. \end{aligned} \quad (22)$$

После подстановки (22) в систему (20) и граничные условия (21), получаем выражение для порогового напряжения сдвига:

$$\begin{aligned} &(\pi^2 h + \xi_2^2)(\xi_1 \beta_a \operatorname{ch}(\xi_1/2) + \operatorname{sh}(\xi_1/2)) \times \\ &\quad \times (\xi_2 \beta_p \cos(\xi_2/2) + \sin(\xi_2/2)) - \\ &-(\pi^2 h - \xi_1^2)(\xi_2 \beta_a \cos(\xi_2/2) + \sin(\xi_2/2)) \times \\ &\quad \times (\xi_1 \beta_p \operatorname{ch}(\xi_1/2) + \operatorname{sh}(\xi_1/2)) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где:

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \frac{\pi^2}{2k_{12}} \left\{ [(1 + k_{12})h - k_{12}e] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(1 - k_{12})h - k_{12}e]^2 + 4k_{12}^2 \frac{a^4}{\pi^4}} \right\}, \\ \xi_2^2 &= \frac{\pi^2}{2k_{12}} \left\{ -[(1 + k_{12})h - k_{12}e] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(1 - k_{12})h - k_{12}e]^2 + 4k_{12}^2 \frac{a^4}{\pi^4}} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{и } k_{12} = \frac{K_{11}}{K_{22}}.$$

Решение четного типа имеет вид:

$$\begin{aligned} N_{1x} &= C_1 \operatorname{ch}(\xi_1 z) + C_2 \cos(\xi_2 z) + C_3, \\ N_{1z} &= C_4 \operatorname{ch}(\xi_1 z) + C_5 \cos(\xi_2 z) + C_6, \\ V_{1y} &= C_7 \operatorname{sh}(\xi_1 z) + C_8 z. \end{aligned} \quad (25)$$

После подстановки (25) в систему (20) и граничные условия (21) пороговое значение напряжения сдвига находится из условия существования нетривиального решения:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi^2 h & f_0 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

где:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\eta_{13}}{2} \left( \frac{\pi^4 h(h - ke)}{a^4 k \eta_{13}} - 1 \right), \\ f_1 &= -\xi_2 \beta_a \sin(\xi_2/2) \cos(\xi_2/2), \\ f_2 &= (\pi^2 h + \xi_2^2) [-\xi_2 \beta_p \sin(\xi_2/2) + \cos(\xi_2/2)], \\ f_3 &= \frac{1 - \eta_{13}}{\xi_2} \sin(\xi_2/2), \\ f_4 &= \xi_1 \beta_a \operatorname{sh}(\xi_1/2) + \operatorname{ch}(\xi_1/2), \\ f_5 &= (\pi^2 h - \xi_1^2) [\xi_1 \beta_p \operatorname{sh}(\xi_1/2) + \operatorname{ch}(\xi_1/2)], \\ f_6 &= \frac{1 - \eta_{13}}{\xi_1} \operatorname{sh}(\xi_1/2). \end{aligned}$$

Из условия существования нетривиального решения получаем трансцендентное выражение, содержащее параметр  $a^2 = a^2(e; h; \beta_a; \beta_p)$  — безразмерная скорость сдвига, зависящая от величин электрического и магнитного полей и компонент силы поверхностного сцепления. Решение этого уравнения относительно  $a^2$  дает нам пороговое значение  $a_c^2$ , при котором базовое состояние теряет устойчивость. Из двух типов решений реализуется только то, которое соответствует наименьшему порогу  $a_c^2$ .

### 3. Результаты

Расчеты порога неустойчивости проводились для материальных параметров НЖК МББА в температурном диапазоне существования нематической фазы  $T = 20 \div 46, 2^\circ \text{C}$ . Температурные зависимости для коэффициентов упругости  $K_{ii}$  были взяты из работы [7]. Экспериментальные данные по измерению коэффициентов вязкости  $\alpha_i$  [8] были нами обработаны методом наименьших квадратов для получения функциональной зависимости  $\alpha_i(T)$  в виде многочленов 4-го порядка (отличие  $\alpha_i(T)$  в

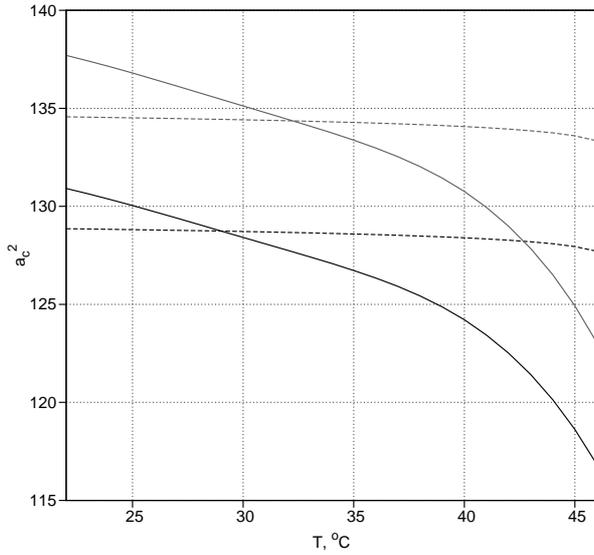


Рис. 2. Зависимость  $a_c^2$  для однородной четной (—) и нечетной (---) неустойчивости от температуры  $T$  в магнитном поле ( $H_0/H_F = 3,5$  — черная линия,  $H_0/H_F = 3,6$  — серая линия) для компонент сцепления  $\beta_a = 1, \beta_p = 0,01$

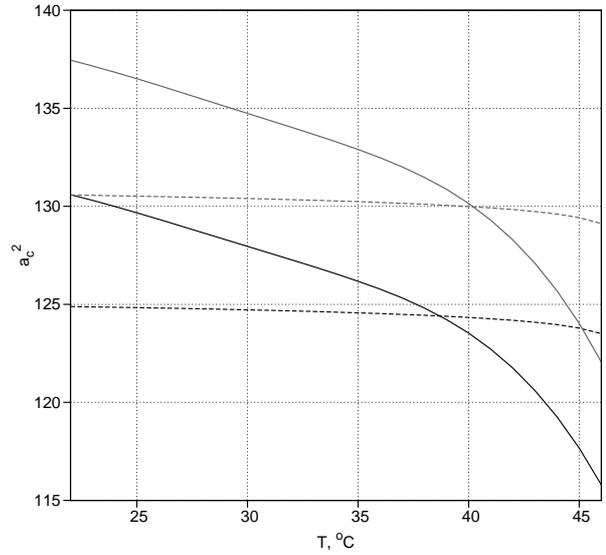


Рис. 3. Зависимость  $a_c^2$  для однородной четной (—) и нечетной (---) неустойчивости от температуры  $T$  в магнитном поле ( $H_0/H_F = 3,5$  — черная линия,  $H_0/H_F = 3,6$  — серая линия) для компонент сцепления  $\beta_a = 0,01, \beta_p = 1$

экспериментальных точках не превышает 5%):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,033 - 0,0085T + 4,4 \cdot 10^{-4}T^2 - \\ &\quad - 9,2 \cdot 10^{-6}T^3 + 7,1 \cdot 10^{-8}T^4, \\ \alpha_2 &= -0,424 + 0,0145T + 1,46 \cdot 10^{-4}T^2 - \\ &\quad - 1,29 \cdot 10^{-5}T^3 + 1,55 \cdot 10^{-7}T^4, \\ \alpha_3 &= 0,019 - 0,0028T + 1,47 \cdot 10^{-4}T^2 - \\ &\quad - 3,49 \cdot 10^{-6}T^3 + 3,03 \cdot 10^{-8}T^4, \\ \alpha_4 &= 0,439 - 0,0312T + 0,0011T^2 - \\ &\quad - 1,81 \cdot 10^{-5}T^3 + 1,23 \cdot 10^{-7}T^4, \\ \alpha_5 &= 0,214 + 0,0012T - 0,00069T^2 + \\ &\quad + 2,23 \cdot 10^{-5}T^3 - 2,21 \cdot 10^{-7}T^4, \\ \alpha_6 &= -0,197 + 0,0138T - 4,33 \cdot 10^{-4}T^2 + \\ &\quad + 6,79 \cdot 10^{-6}T^3 - 4,21 \cdot 10^{-8}T^4. \end{aligned}$$

Под действием электрического поля  $E_0$  пороги неустойчивости возрастают, но порог неустойчивости четного типа всегда ниже порога для неустойчивости нечетного типа во всей рассматриваемой температурной области и во всем диапазоне компонент сил поверхностного сцепления.

В магнитном поле возможна смена типа неустойчивости [1] при изменении величины магнитного поля  $H_0$  и компонент сил поверхностного сцепления  $\beta_a$  и  $\beta_p$ . На рис. 2 показана смена симметрии структурно-ориентационного перехода при

заданных  $H_0, \beta_a$  и  $\beta_p$  вызванная изменением температуры. Для слабого азимутального  $\beta_a = 1$  и жесткого полярного  $\beta_p = 0,01$  сцепления в магнитном поле с ростом температуры четная однородная неустойчивость сменяется однородной неустойчивостью нечетного типа. С ростом величины магнитного поля смена типа неустойчивости происходит при более высоком значении температуры. Отметим, что величина порога нечетного типа неустойчивости сильно зависит от температуры (уменьшается с ростом температуры), в то время как порог неустойчивости четного типа при изменении температуры меняется слабо.

На рис. 3 показана смена симметрии структурно-ориентационного перехода для тех же параметров, что на рис. 2, но с жестким азимутальным сцеплением  $\beta_a = 0,01$  и слабым полярным сцеплением  $\beta_p = 1$ . Видно, что смена компонент сил поверхностного сцепления приводит к уменьшению пороговой амплитуды скорости  $a_c^2$  для нечетного типа неустойчивости (пороговое значение  $a_c^2$  для четного типа неустойчивости практически не изменилось), в результате увеличивая значение температуры  $T_c$ , при которой происходит смена симметрии неустойчивости. Таким образом, можно получить зависимость  $T_c(\beta_a, \beta_p)$  и из сравнения с результатами эксперимента определить компоненты силы поверхностного сцепления.

#### 4. Заключение

В работе было проведено исследование влияния температуры на смену симметрии неустойчивости в стационарном сдвиговом потоке НЖК под действием электромагнитного поля и температуры. Было получено, что смена симметрии однородной неустойчивости под действием температуры возможна в магнитном поле. Асимметрия зависимости критической температуры  $T_c$  от компонент силы поверхностного сцепления  $\beta_a$  и  $\beta_p$  может быть использована для экспериментального определения  $\beta_a$  и  $\beta_p$ .

#### Список литературы

- [1] Nasibullayev I.Sh. Orientational instabilities in nematic liquid crystals with weak anchoring under combine action of steady flow and external fields /I.Sh. Nasibullayev, O.S. Tarasov, A.P. Krekhov et al. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 051706-1–10.
- [2] Насибуллаев И.Ш. Влияние температуры на однородные неустойчивости в стационарном сдвиговом потоке нематического жидкого кристалла с жесткими граничными условиями / И.Ш. Насибуллаев, О.В. Юрина // Труды Института механики УНЦ РАН. Вып.7 / Под ред. С.Ф. Урманчеева. Уфа: Гилем, 2010. С. 191–201.
- [3] Де Жен, П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
- [4] Пикин С.А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
- [5] Kedney P.J., Leslie F.M. Switching in a simple bistable nematic cell // Liq. Cryst. V. 24. I. 9. 1998. Pp. 613–618.
- [6] Rapini A., Papoular M. Distorsion d'une lamelle nématique sous champ magnétique conditions d'ancrage aux parois // Liq. Cryst. 1998. V. 24. P. 613–618.
- [7] Leenhouts F. Elastic constants of nematic liquid crystalline Schiff's bases /F. Leenhouts, A.J. Dekker // J. Chem. Phys. 1981. V. 74, № 3. P. 1956–1965.
- [8] Wang H. A method to estimate the Leslie coefficients of liquid crystals based on MBBA data /H. A Wang, Th. X. Wu, S. Gauza et al. // Liquid Crystals. 2006. Vol. 33, № 1. P. 91–98.

# Движение поршня в цилиндрической трубе с учетом вязкого трения<sup>1</sup>

Насибуллаев И.Ш.\*, Насибуллаева Э.Ш.\*\*

\*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

\*\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе рассматривается численное моделирование движения поршня с пружиной в цилиндрической трубе под действием осциллирующего перепада давления с учетом действия сухого и вязкого трений. Определяется время установления периодического режима движения поршня и характер его движения в зависимости от различных типов трения и жесткости пружины.

## 1. Введение

При разработке различных технических устройств важным является определение влияния различных видов сил трения на динамику составных частей устройства. Трение между твердыми элементами определяется коэффициентом сухого трения — коэффициент пропорциональности между силой трения и силой нормальной реакции на границе элементов (закон Амонтона–Кулона). При наличии жидкой фазы необходимо учитывать вязкое трение через коэффициент динамической вязкости, связывающий силу вязкого трения и произведение площади контакта и нормального градиента скорости вблизи поверхности.

Ранее было проведено численное исследование влияния сухого и вязкого трений на движение поршня в трубе цилиндрической формы [1]. Было получено, что влияние жидкости в зазоре на поршень может приводить как к ускорению, так и к замедлению движения поршня в зависимости от мгновенного значения скорости движения поршня и значения нормального градиента скорости жидкости вблизи поверхности поршня. При этом, влияние вязкого трения оказалось малым (порядка 2%). Наличие сухого трения оказывает существенное влияние на скорость движения поршня и смещает положение равновесия и сдвиг по фазе относительно фазы градиента давления.

В данной работе продолжено исследование влияние различных видов сил трения на движение поршня в цилиндрической трубе с учетом дополнительного действия жесткости пружины, а так-

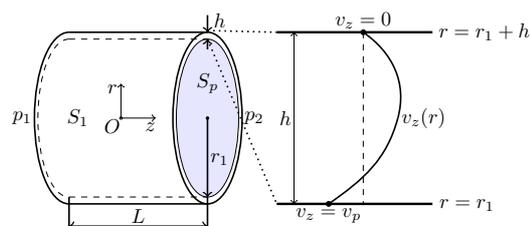


Рис. 1. Геометрия задачи в цилиндрических координатах

же определяются условия, когда кривизной трубы можно пренебречь, и свести гидродинамическую задачу к плоскому параллельному течению жидкости с комбинированным пуазейлевским и сдвиговым (с одной фиксированной и одной инертной границей) воздействиями.

## 2. Математическая модель

Получим систему уравнений для скорости течения жидкости и скорости движения поршня в цилиндрической и декартовой системе координат.

### 2.1. Цилиндрические координаты

Рассмотрим движение поршня радиуса  $r_1$  и массой  $m$  внутри цилиндра радиуса  $r_2 = r_1 + h$  ( $h$  — зазор между поршнем и цилиндром), заполненного жидкостью с плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\mu$ , под действием периодического по времени перепада давления  $\Delta p g(t)$ ,  $g(t) = \cos(\omega t)$  (рис. 1), где  $\Delta p = (p_1 - p_2)$ ,  $p_1$  и  $p_2$  — значения давлений слева и справа от поршня, соответственно;  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  — частота осцилляций давления.

Начало цилиндрической системы координат

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-01-97009, 11-01-97007, 11-08-00823).

поместим на оси в центре цилиндра. Координаты в радиальном, окружном и осевом направлениях обозначим через  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  соответственно, а компоненты скорости течения жидкости —  $v_r$ ,  $v_\varphi$  и  $v_z$ . Скорость движения поршня имеет только одну компоненту  $v_p$  — вдоль оси  $z$ .

Уравнение движения поршня описывается вторым законом Ньютона:

$$mv_{p,t}(t) = S_p \Delta p f(t) - k_p z_p(t) - F(v_p) - \mu S_1 v_{z,r}(r, t)|_{r=r_1}, \quad (1)$$

где введено обозначение для частной производной  $f_{,x} = \partial f / \partial x$ ;  $S_p$  — площадь поперечного сечения поршня;  $S_1 = 2\pi r_1 L$  — площадь внешней поверхности поршня;  $L$  — длина поршня;  $k_p$  — жесткость пружины;  $z_p$  — отклонение пружины от равновесного состояния. Сила сухого трения  $F(v_p) = F_0 \operatorname{sgn}(v_p)$ , где  $F_0$  — модуль силы трения. Последнее слагаемое уравнения (1) описывает силу вязкого трения:

$$F_v = \tau S_1 = \mu S_1 \left. \frac{\partial v_z(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_1},$$

где  $\tau$  — напряжение поршня на поверхности.

Координата поршня  $z_p$  описывается уравнением

$$\frac{dz_p(t)}{dt} = v_p(t). \quad (2)$$

В начальный момент времени поршень покоится:  $v_p(0) = 0$ .

Движение жидкости описывается уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости и уравнением Навье–Стокса [2]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \rho[\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}] = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (3)$$

где  $\nabla$  — оператор набла;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\nabla p$  — градиент давления.

Пренебрегая краевыми эффектами, получим  $v_z = v_z(r, t)$ . Поскольку течение является осесимметричным и не рассматривается осевое вращение поршня, компонента скорости  $v_\varphi = 0$ . Из уравнения неразрывности получим, что  $v_r = 0$ . Таким образом, рассматриваемое течение жидкости соответствует нестационарному параллельному течению. Уравнение Навье–Стокса (3) запишется в виде:

$$\rho v_{z,t} = -p_{,z} + \mu \left( v_{z,rr} + \frac{1}{r} v_{z,r} \right), \quad (4)$$

где градиент давления  $p_{,z} = (\Delta p / L) g(t)$ .

Граничные условия на поверхности поршня ( $r = r_1$ ) и цилиндра ( $r = r_2 = r_1 + h$ ) определяются из условия залипания:

$$v_z(t, r_1) = v_p(t), \quad v_z(t, r_2) = 0. \quad (5)$$

Для исследования системы проведем обезразмеривание уравнений. В качестве характерного размера выберем ширину зазора  $h$ , а для безразмерного времени выберем обратную частоту потока  $\omega^{-1}$ . Размерные величины примут вид (безразмерные величины записаны с тильдами):

$$z = h\tilde{z}, \quad r = h\tilde{r}, \quad v = (h\omega)\tilde{v}, \quad t = \omega^{-1}\tilde{t}.$$

Опуская тильды, запишем безразмерную систему:

$$v_{z,t} = a_p g(t) + a_f (v_{z,rr} + r^{-1} v_{z,r}), \quad (6)$$

$$v_{p,t} = b_p g(t) - k_p z_p - k_f \operatorname{sgn}(v_p) - b_f v_{z,r}(r = r_1), \quad (7)$$

$$z_{p,t} = v_p, \quad (8)$$

где  $a_p = \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{\rho h \omega^2}$  — амплитуда давления для жидкости;  $a_f = \frac{1}{\operatorname{Re}} = \frac{\mu}{\rho h^2 \omega}$ ;  $\operatorname{Re} = \frac{\rho h^2 \omega}{\mu}$  — число Рейнольдса;  $b_p = \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{\rho_p h \omega^2} = a_p \rho / \rho_p$  — амплитуда давления для поршня;  $b_k = \omega_0^2 / \omega^2$ ;  $\rho_p$  — плотность материала поршня;  $b_f = \frac{2\mu}{\rho_p r_1 h \omega} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{2}{r_1} \frac{\rho}{\rho_p}$  — величина, характеризующая силу вязкого трения. Величины, характеризующие материальные параметры и геометрию системы, размерны.

## 2.2. Декартовы координаты

Уравнения движения поршня в цилиндрической трубе представляют собой плоскую двухмерную задачу. Проведем сравнение этих уравнений с плоским параллельным течением в декартовой системе координат (течение в плоском канале с подвижной границей) для того, чтобы определить параметры, при которых кривизной трубы можно пренебречь.

Начало декартовой системы координат помещено на поверхности поршня, ось  $Ox$  — вдоль движения поршня,  $Oz$  — перпендикулярно движению поршня (рис. 2). Течение индуцируется приложенным вдоль слоя перепадом давления  $p(t) = \Delta p g(t)$ .

Система уравнений, описывающая динамику жидкости и поршня в безразмерном виде (характерный размер —  $h$ , характерное время —  $\omega^{-1}$ ), примет вид:

$$v_{x,t} = a_p g(t) + a_f v_{x,rr}, \quad (9)$$

$$v_{p,t} = b_p g(t) - k_p x_p - k_f \operatorname{sgn}(v_p) - b_f v_{x,z}(z = 0), \quad (10)$$

$$x_{p,t} = v_p, \quad (11)$$

где коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  и  $k_i$  (где  $i = \{p, f\}$ ) совпадают с соответствующими коэффициентами для цилиндрической системы координат с учетом обозначений  $R = r_1$ ,  $S_1 = S_\ell$  и  $S_p = S_f$ .

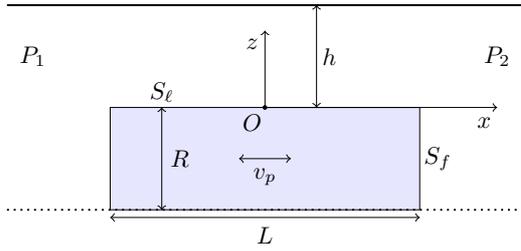


Рис. 2. Геометрия задачи в декартовых координатах

Уравнение движения поршня в цилиндрической и декартовой геометрии полностью совпадают, если выбрать  $S_1 = S_l$  и  $S_p = S_f$ . Уравнение Навье–Стокса в цилиндрической геометрии содержит дополнительное слагаемое в правой части, учитывающее кривизну трубы:

$$a_f r^{-1} v_{z,r}. \quad (12)$$

Таким образом, задачу в цилиндрической системе координат можно свести к плоскому параллельному течению в декартовой системе координат, когда слагаемое (12) не вносит существенного вклада в уравнение Навье–Стокса, т.е. при  $v_{z,rr} \gg r^{-1} v_{z,r}$  или при  $a_f \ll a_p$ . Для типичных параметров системы и большой амплитуды градиента давления ( $\Delta p \sim 10^5$  Па) последнее условие выполняется в моменты времени, когда  $|g(t)| \lesssim a_f/a_p \sim 10^{-8}$ , т.е. во время пренебрежимо малой доли периода перепада давления.

### 2.3. Численная реализация

Уравнения (6) с граничными условиями (5) записывались с помощью метода конечных разностей и решались численно методом Ньютона. Уравнение Навье–Стокса записывалось в виде численной схемы Кранка–Николсона:

$$\begin{aligned} \frac{v_z^{j+1;i} - v_z^{j;i}}{\Delta t} &= a_p f(t^j) + \\ &+ \frac{a_f}{2\Delta h^2} (v_z^{j+1;i+1} - 2v_z^{j+1;i} + v_z^{j+1;i-1} + \\ &+ v_z^{j;i+1} - 2v_z^{j;i} + v_z^{j;i-1}) + \\ &+ \frac{a_f}{4\Delta h r^i} (v_z^{j+1;i+1} - v_z^{j+1;i-1} + v_z^{j;i+1} - v_z^{j;i-1}), \end{aligned}$$

где индекс  $i$  соответствует  $i$ -му узлу по координате и  $j$  соответствует  $j$ -му узлу по времени.

Уравнения движения поршня запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{z_p^{j+1} - z_p^j}{\Delta t} &= b_p f(t^j) - k_p z_p - b_f v_{z,r}|_{r=r_1} - k_f \operatorname{sgn}(v_p^j), \\ \frac{z_p^{j+1} - z_p^j}{\Delta t} &= v_p^j. \end{aligned}$$

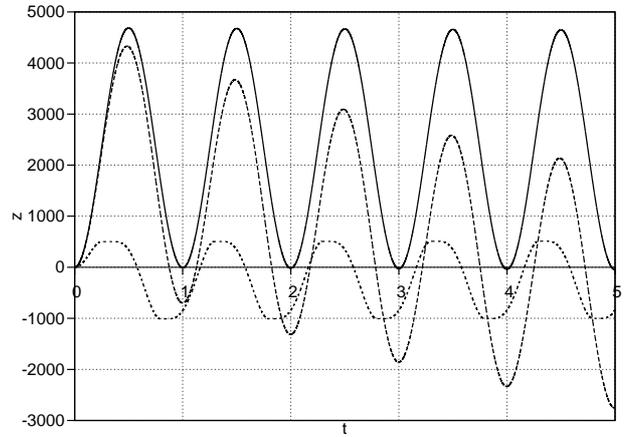


Рис. 3. Зависимость координаты поршня от времени без трения (—) и с сухим трением:  $F_0 = 1$  Н (—),  $F_0 = 20$  Н (- - -)

После записи дифференциальных уравнений через конечные разности, мы получаем систему алгебраических уравнений, которую, дополняя первым граничным условием (5) в виде  $v_z^{j=0,i} = v_p^i$ , мы связываем переменные  $v_z$  и  $v_p$ . Для получения установившегося периодического течения методом Ньютона, с использованием явной схемы по координатам, необходимо просчитать несколько полных периодов с очень малым шагом по времени (для обеспечения точности по координате и сходимости схемы). Для оптимизации численной схемы была выбрана неявная схема по координате и на каждом временном шаге решение находилось с помощью итерационного метода Ньютона–Рафсона. Погрешность вычислений не превышала 1% при разбиении сетки по координате на 50 узлов и  $2 \cdot 10^5$  шагов по времени за 1 с.

### 3. Результаты моделирования

Расчеты проводились для следующих параметров: диаметр трубы  $2r_1 = 10^{-2}$  м, ширина зазора  $h = r_1/50$ , длина поршня  $L = 10^{-2}$  м. Параметры для материала поршня (алюминий) и жидкости (авиационный керосин ТС-1) были взяты при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$ : плотность поршня  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, плотность жидкости  $\rho = 780$  кг/м<sup>3</sup>, вязкость жидкости  $\mu = 1,5 \cdot 10^{-3}$  Па·с, упругость пружины  $k = 1 \dots 5$  кН/м. Амплитуда перепада давления  $\Delta P = 10^5$  Па.

На рис. 3 показана зависимость безразмерной координаты положения поршня (в единицах  $h$ ) от безразмерного времени (в периодах колебания внешней силы) для параметров  $k_f = k_p = 0$  и в отсутствие вязкого трения. Зависимость координаты

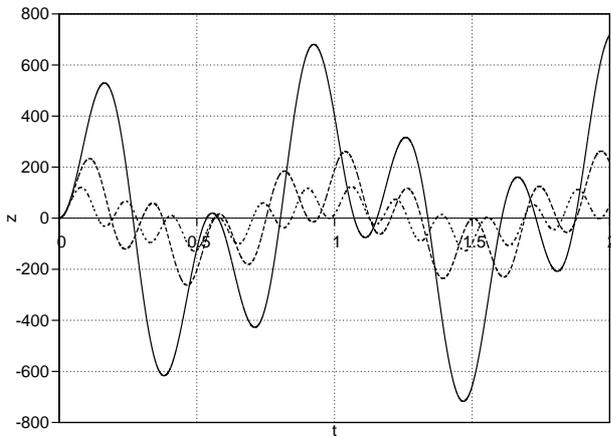


Рис. 4. Зависимость координаты поршня от времени с учетом жесткости пружины и для  $F_0 = 0$  Н:  $k_p = 1000$  Н/м (—),  $k_p = 2500$  Н/м (---),  $k_p = 5000$  Н/м (- - -)

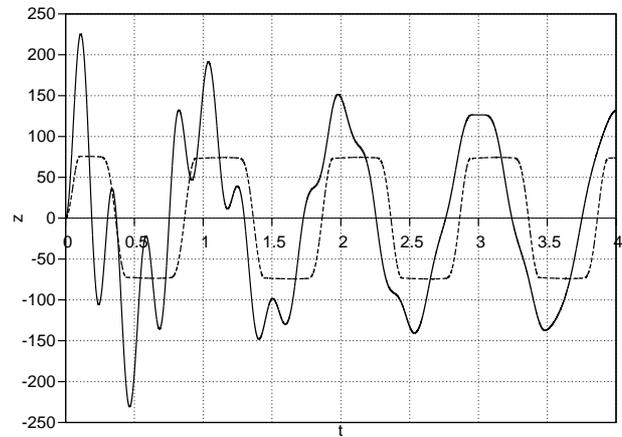


Рис. 5. Зависимость координаты поршня от времени с учетом жесткости пружины  $k_p = 2500$  Н/м для различных сил трения:  $F_0 = 1$  Н (—),  $F_0 = 20$  Н (- - -)

от времени периодическая со сдвигом фазы относительно внешнего давления  $g(t) \sim \cos t$  на  $\pi$ .

Наличие сухого трения  $F_0$  приводит к тому, что смещается положение равновесия и амплитуда колебаний (рис. 3). С уменьшением значений силы сухого трения ( $F_0 < 15$  Н) увеличивается количество периодов необходимых для выхода динамики поршня на периодический режим. При больших значениях силы трения ( $F_0 > 15$  Н) выход на периодический режим происходит с первого периода. Отметим, что часть времени внешняя сила меньше силы трения покоя  $a_p \cos t < F_s$  и поршень покоится (горизонтальные участки в зависимости  $z(t)$ ). При силе сухого трения  $F_0 > 30$  Н поршень покоится практически все время.

Учет жесткости пружины приводит к существенному изменению характера движения поршня (рис. 3), поскольку кроме периодического градиента давления в системе действует упругая сила пружины. Уравнение движения поршня

$$z_{p,tt} = -k_p z_p + b_p \cos t$$

имеет следующее установившееся решение:

$$z_p = C_1 \cos(\sqrt{b_k} t) + C_2 \sin(\sqrt{b_k} t) - \frac{b_p}{1 - b_k} \cos t,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы интегрирования. Из решения видно, что координата поршня  $z_p$  имеет две периодические составляющие — с частотой перепада давления  $\omega$  и собственной частотой колебания системы поршень–пружина  $\omega_0 = \omega \sqrt{b_k}$ . Для типичных параметров системы  $k = 2,5$  кН/м и  $m = 8,5$  г собственная частота колебаний системы

$\omega_0 = \sqrt{k_p/m} \approx 1700$  рад/с ( $f_0 \approx 270$  Гц). Для частот внешней силы  $\omega = 2\pi \cdot 40$  Гц  $\approx 250$  Гц  $\sim \omega_0$  возможны резонансные явления в системе. С ростом коэффициента упругости  $k_p$  растет и собственная частота колебаний  $\omega_0 \sim \sqrt{k_p}$ , а амплитуда колебаний уменьшается. Период колебаний при этом будет равен наименьшему общему кратному частот  $\omega$  и  $\omega_0$ . Точка равновесия смещается к  $z_p = 0$ . При больших значениях коэффициента упругости пружины  $k_p$  система переходит к периодическому режиму за небольшое время.

При совместном действии сухого трения и жесткости пружины (рис. 5) режим движения поршня зависит от величины силы трения. С ростом величины силы трения  $F_0$  амплитуда колебаний поршня и время установления периодического режима движения уменьшаются, причем частота колебаний устанавливается равной частоте перепада давления. Точка равновесия соответствует  $z_p = 0$ .

Уравнение движения поршня с учетом жесткости поршня и силы сухого трения имеет вид:

$$v_{p,t} = -k_p z_p + b_p \cos t - b_f \operatorname{sgn}(v_p).$$

Умножив уравнение на скорость поршня  $v_p$  и преобразовав, получим закон изменения механической системы «поршень–пружина»:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_p^2}{2} + k_p \frac{x_p}{2} \right) = b_p v_p \cos t - b_f |v_p|.$$

На рис. 6 показаны зависимости от времени вкладов в изменение энергии системы компонент с перепадом давления ( $b_p v_p \cos t$ ) и силой трения ( $b_f |v_p|$ ),

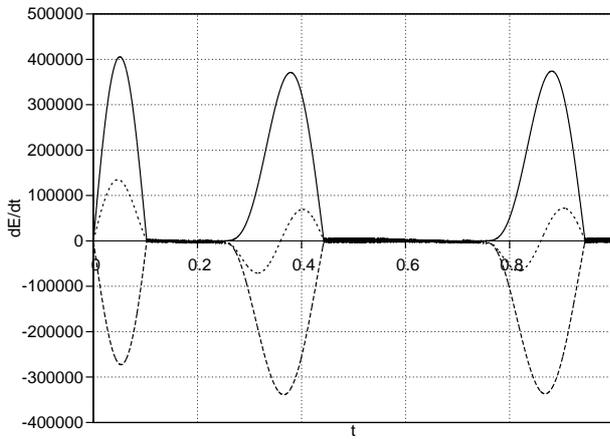


Рис. 6. Изменение энергии системы со временем для  $F_0 = 20$  Н,  $k_p = 2500$  Н/м: (—) мощность перепада давления, (---) мощность силы трения, (- - -) результирующая мощность

а также результирующий вклад в систему. Видно, что периодический перепад давления вносит вклад в рост энергии системы (закачка энергии), а сила трения уменьшает энергию системы (диссипация энергии). При установившемся движении результирующий вклад энергии имеет периодический характер и равен нулю за период. Таким образом, механическая энергия системы сохраняется — вся входящая энергия переходит во внутреннюю.

При наличии вязкого трения с учетом жесткости пружина в первые периоды колебаний не оказывает существенного влияния, однако, через продолжительное время (нескольких десятков периодов) влияние становится существенным (рис. 7). Период колебаний совпадает с периодом изменения перепада давления и амплитуда колебаний уменьшается почти вдвое. Амплитуда градиента скорости  $v_{z,r}$  на поверхности  $r = r_1$  увеличивается при увеличении жесткости пружины, течение устанавливается за один период (рис. 8). Воздействие силы вязкого трения совпадает с воздействием малой силы сухого трения по периоду колебаний и уменьшению амплитуды колебаний при установившемся течении, но при воздействии сухого трения форма колебаний остается симметричной по периодам, а при вязком трении она немного меняется от периода к периоду.

#### 4. Начальные условия

В численной реализации уравнения движения поршня в начальный момент времени  $t = 0$  предполагалось, что поршень находится в точке  $z_p(0) = 0$  и начальная скорость  $z_{p,t}(0) = 0$  при максимальном

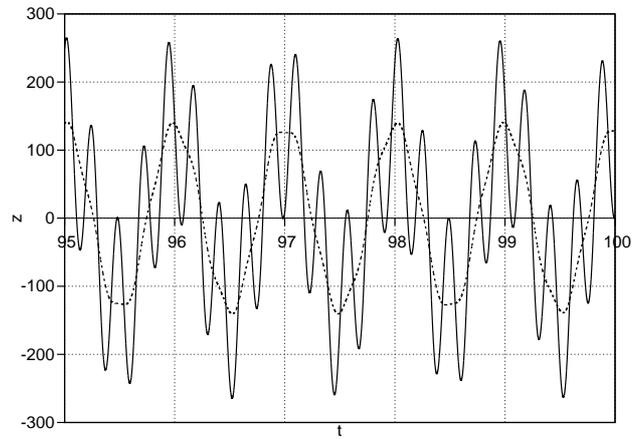


Рис. 7. Зависимость координаты поршня от времени без вязкого трения (—) и с вязким трением (---) для  $k_p = 2500$  Н/м

значении перепада давления  $g(0) = 1$ . Для получения установившегося режима течения необходимо просчитать большое количество периодов по времени, особенно для малых сил трения: вязкого трения и сухого трения с  $F_f < 1$  Н. Необходимо учесть и то, что для ряда параметров смещение поршня от равновесного состояния может быть значительным и превышать величину характерного хода поршня ( $z_{max} = 1$  м  $\sim 100h$  или 100 в безразмерных величинах). В этом случае, при численной реализации необходимо выбрать начальные условия таким образом, чтобы координата поршня не выходила за диапазон  $-z_{max}/2 \leq z_p \leq z_{max}/2$ .

Рассмотрим различные начальные условия на поршень с учетом сдвига фазы перепада давления относительно начального момента времени. При периодическом перепаде давления  $g(t) = \cos(t + \varphi_p)$  (размерная частота  $\omega$ ), где  $\varphi$  — фаза давления в начальный момент времени  $t = 0$ . Уравнение движения поршня для координаты положения поршня  $z_p$  (пренебрегая влиянием жидкости на движение поршня):

$$z_{p,tt} = b_p \cos(t + \varphi_p).$$

Т.е. поршень движется по закону

$$z_p = -b_p \cos(t + \varphi_p) + (\dot{z}_0 - b_p \sin \varphi_p)t + (z_0 + b_p \cos \varphi_p),$$

где  $z_0$  — начальное положение поршня и  $z_{0,t}$  — начальная скорость поршня. Для того чтобы поршень колебался относительно неподвижной точки  $x_r$ , необходимо выполнение условия:

$$z_{0,t} - b_p \sin \varphi_p = 0 \Rightarrow v_{0,t} = b_p \sin \varphi_p. \quad (13)$$

Точка  $x_r$  будет центральной для пути поршня по

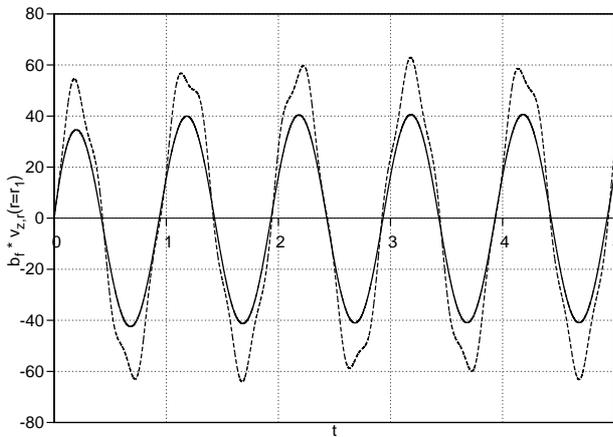


Рис. 8. Зависимость градиента скорости  $v_{z,r}$  на поверхности  $r = r_1$  от времени с жесткостью  $k_p = 0$  Н/м (—) и  $k_p = 2500$  Н/м (---)

периоду при выполнении условия:

$$z_0 + b_p \cos(t + \varphi_p) = 0 \Rightarrow z_0 = -b_p \cos(t + \varphi_p). \quad (14)$$

Рассмотрим два возможных значения начальной фазы  $\varphi_p$  и соответствующие начальные условия, удовлетворяющие условиям (13) и (14):

1.  $\varphi_p = 0$ ,  $g(t) = \cos t$ :  $z_p = -b_p \cos t + z_{0,t}t + (z_0 + b_p)$ . Начальная скорость поршня равна нулю  $z_{0,z} = 0$  и поршень находится в крайнем левом положении  $z_0 = -b_p$ . Данный случай подходит для моделирования движения поршня без ограничений на ход поршня. Учет течения жидкости приведет к изменению амплитуды колебаний поршня.
2.  $\varphi_p = -\pi/2$ ,  $g(t) = \sin t$ :  $z_p = -b_p \sin t + (z_{0,t} + b_p)t + z_0$ . Начальная скорость поршня максимальна, поршень движется влево  $z_{0,t} = -b_p$  и находится в центральной точке  $z_0 = 0$ . Данный случай подходит для моделирования движения поршня с ограничением и без ограничения на ход поршня. Учет течения жидкости приведет к изменению максимальной скорости поршня и при движении без ограничения хода поршня может привести к появлению линейной компоненты скорости движения поршня.

Отметим, что при моделировании движения поршня с пружиной, равновесная точка всегда находится в координате  $z_p = 0$  за счет упругой силы, всегда направленной к этой точке.

## 5. Заключение

В работе было проведено исследование движения поршня в цилиндрической трубе с учетом вяз-

кого и сухого трений, а также жесткости пружины. Было получено, что в рассматриваемых диапазонах материальных параметров системы при учете жесткости пружины возможен резонанс. Совместное воздействие жесткости пружины и сухого трения приводит к тому, что точка равновесия определяется наличием жесткости пружины ( $z_p = 0$ ), а период колебаний — наличием силы сухого трения (колебания происходят на частоте перепада давления, а не на собственной частоте). С ростом как жесткости пружины, так и силы сухого трения, амплитуда колебаний поршня уменьшается. Для малых сил трения (как сухого, так и вязкого) выход на периодический режим движения происходит за большое количество циклов. В системе с пружиной влияние вязкого трения значительно. При больших перепадах давления кривизной трубы можно пренебречь и свести задачу к нестационарному параллельному течению в плоском капилляре.

## Список литературы

- [1] И.Ш. Насибуллаев, Э.Ш. Насибуллаева. Влияние различных видов силы трения на движение поршня в трубе. // Труды Института механики УНЦ РАН. Вып. 8. / Под ред. С.Ф. Урманчеева. Уфа: Нефтегазовое дело, 2011, С. 257–265.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т 6. М.: Наука, 1988. 736 с.

# Применение фильтрации для определения параметров процесса нестационарной электрохимической обработки

Поречный С.С.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Рассматривается задача моделирования процесса электрохимической обработки металла с помощью плоского электрода-инструмента. Моделирование нестационарного процесса образования выступа на металлической заготовке осуществляется с учетом переменной функции выхода по току. Описано применение метода фильтрации для уточнения параметров обработки.

## 1. Введение

В известных работах по моделированию электрохимической обработки (ЭХО) (см. например, [1–3]) решаются задачи различной сложности, учитывающие разные факторы, влияющие на процесс обработки.

При ЭХО поле считается чисто электрическим и при этом потенциальным.

Для задач ЭХО границы, как правило, бывают двух типов: непроницаемые (поверхности изолированных частей электродов) и рабочие поверхности электродов. На непроницаемых границах нормальная составляющая напряженности равна нулю.

На границах, соответствующих поверхности электродов, величина потенциала

$$\Phi_a = 0 + \varphi_a, \quad \Phi_c = -U + \varphi_c, \quad (1)$$

где  $U$  — напряжение на электродах;  $\varphi_a$  и  $\varphi_c$  — анодный и катодный потенциалы соответственно.

Для ЭХО на импульсном токе в качестве основного расчетного соотношения используется закон Фарадея

$$\frac{dh}{dt} = \eta(j) k_I \frac{\alpha_m}{\rho \kappa} j = \eta(j) \frac{k}{\kappa} j, \quad k = \frac{k_I \alpha_m}{\rho}, \quad (2)$$

где  $h$  — толщина растворенного металла;  $t$  — время;  $\eta$  — анодный выход по току;  $\alpha_m$  — массовый электрохимический эквивалент растворяемого металла;  $j$  — плотность тока;  $k_I$  — величина, обратная скважности импульсов;  $\rho$  — плотность материала.

Ранее при решении задач ЭХО принималось, что зависимость выхода по току от плотности тока либо постоянна, либо она аппроксимировалась

гиперболой [2, 4], либо дробно-квадратичной функцией [2].

В данной работе экспериментальная зависимость выхода по току от напряженности аппроксимировалась дробно-линейной функцией

$$\eta(j) = \begin{cases} 0, & j \leq \beta, \\ \eta_0 \frac{j - \beta}{j - \gamma}, & j > \beta, \end{cases} \quad (\gamma < \beta). \quad (3)$$

Однако оказалось, что параметр  $\gamma$  сравнительно мал, и аппроксимация гиперболой имеет практически такую же погрешность. Использование гиперболы позволяет свести задачу исследования различных режимов обработки к расчетам форм при изменении всего лишь одного параметра  $\alpha = E_1/E_0$ , где  $E_0$  — характерное значение напряженности.

## 2. Постановка плоских задач

Рассмотрим в качестве примера задачу ЭХО, схема которой (в сечении) изображена на рис. 1. Плоский электрод-инструмент (ЭИ)  $A'FCGB'$  со щелью  $FG$  движется вертикально вниз со скоростью  $V_n$ . С течением времени поверхность анода  $AB$  изменяется за счет электрохимического растворения согласно закону Фарадея (2). Поверхности ЭИ и обрабатываемой детали считаются эквипотенциальными (потенциал детали равен нулю, потенциал ЭИ равен  $-U$ ).

Таким образом, для задачи, рассмотренной на рис. 1, при эквипотенциальных электродах область, соответствующая МЭП, на плоскости комплексного потенциала имеет форму вертикальной полосы шириной  $U$  (см. рис. 2).

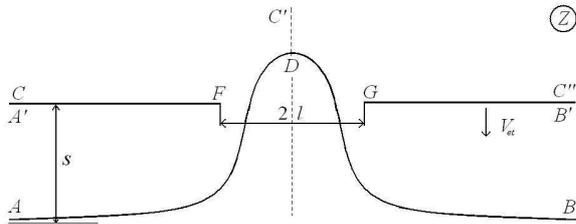


Рис. 1. Схема МЭП

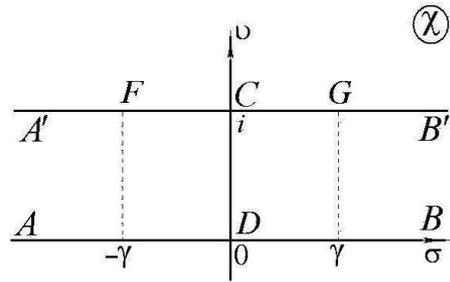


Рис. 3. Форма образа МЭП на параметрической плоскости χ

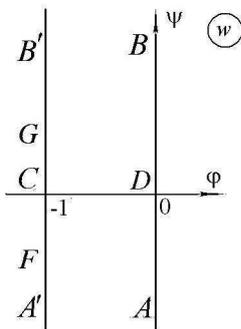


Рис. 2. Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

Известны решения задач Хеле–Шоу, полученные на основе методов конечных разностей, конечных и граничных элементов [4]. Тем не менее, разработанные ранее методы не обладают достаточной устойчивостью к накоплению погрешности при расчете длительных переходных процессов.

Отобразим конформно области, соответствующие МЭП на плоскостях  $Z$  и  $W$ , на полосу  $\chi$  (рис. 3). Тогда задачу определения функции  $W(Z)$ , аналитической на области МЭП и удовлетворяющей условию эквипотенциальности анода и катода, можно решать в параметрическом виде.

Необходимо найти три аналитические внутри полосы  $0 < \Re\chi < 1$  функции  $W(\chi)$ ,  $Z(\chi, t)$  и  $\partial Z/\partial t(\zeta, t)$ , удовлетворяющие определенным краевым условиям. Функция  $W(\chi)$  осуществляет конформное отображение полосы на полосу (и не зависит от времени).

Краевым условием для определения функции  $Z(\chi, t)$  является равенство известной при каждом фиксированном  $t$  функции  $f(\sigma, t)$  мнимой (или действительной) части  $Z(\chi, t)$  на границе  $\chi = \sigma$  ( $-\infty < \sigma < \infty$ ).

Тогда краевым условием для определения производной  $\partial Z/\partial t(\zeta, t)$  на части границы, соответ-

ствующей поверхности анода служит равенство [3]

$$\Im \left( \frac{\partial Z}{\partial t} \overline{\frac{\partial Z}{\partial \sigma}} \right) = -k\eta(\sigma) \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad (4)$$

На участках границы, соответствующих поверхности ЭИ, растворения не происходит, поэтому в точках, расположенных на этих границах, правая часть (4) равна нулю (в системе координат связанной с ЭИ). Уравнение (4) является более общим видом краевого условия по типу уравнения Полубариновой–Галина [3].

### 3. Нестационарная обработка плоским ЭИ со щелью

Рассмотрим плоскую нестационарную задачу электрохимического растворения с помощью ЭИ, представляющего собой фольгу со щелью шириной  $2l$  (рис. 1).

Асимптотическая величина зазора на бесконечности влево  $S$  изменяется и приближается к стационарной величине

$$S_{st} = \frac{kU}{V_{et}} \eta \left( \frac{U}{S_{st}} \right) = \frac{kU}{V_{et}} \eta_0 \left( \frac{\frac{U}{S_{st}} - E}{\frac{U}{S_{st}}} \right) = \frac{kU\eta_0}{V_{et}} (1 - \alpha), \quad \alpha = \frac{E_1 S_{st}}{U}, \quad E_1 = \frac{j_1}{\kappa}. \quad (5)$$

Задачи удобнее решать в безразмерном виде. Сведение к безразмерным величинам для данной задачи проведем следующим образом. В качестве характерного размера  $l$  выберем величину стационарного зазора. Перейдем к безразмерным величинам  $z, x, y, \tau$  и  $w$ , где

$$\begin{aligned} z &= \frac{Z}{S_{st}}, & x &= \frac{X}{S_{st}}, & y &= \frac{Y}{S_{st}}, \\ \tau &= \frac{V_{et}}{S_{st}} t = \frac{k\eta_0(1-\alpha)}{S_{st}^2} t, \\ w &= \frac{W}{U}, & \tilde{\eta}(\sigma) &= \frac{\eta(\kappa E_n)}{\eta_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом согласно (4):

$$\Im \left( \frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) = -\tilde{\eta}(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_{et} &= -\frac{dy'_A}{d\tau} = -\frac{S_{st}}{S_{st}V_{et}} \frac{dY'_A}{dt} = 1, \\ v_{ecm} &= -\frac{dy_A}{d\tau} = \frac{1 - \alpha s(\tau)}{s(\tau)(1 - \alpha)}, \\ s &= \frac{S}{S_{st}}, \quad \frac{ds}{d\tau} = v_{ecm} - v_{et}. \end{aligned} \quad (8)$$

Конформное отображение  $w(\chi)$  (рис. 2) осуществляется формулой

$$w = \varphi + i\psi = i\chi, \quad \frac{dw}{d\chi} = i.$$

Функцию  $z(\chi, \tau)$  представим в виде суммы  $z(\chi, \tau) = z_0(\chi, \tau) + z_\Delta(\chi, \tau)$ , где  $z(\chi, \tau)$  — искомая функция;  $z_0(\chi, \tau)$  — известная функция с особенностями, выбираемая из условия равенства нулю на бесконечности мнимой части  $z_\Delta(\chi, \tau)$ ;  $z_\Delta(\chi, \tau)$  — неизвестная функция. В неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} z(\chi, \tau) &= s(\tau)\chi - i \int_0^\tau v_{ecm}(\tau_1) d\tau_1 + \\ &+ \mu(\tau) th \frac{\pi\chi}{2} + z_\Delta(\chi, \tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $-i \int_0^\tau v_{ecm}(\tau_1) d\tau_1$  — слагаемое, которое определяет движение асимптоты к анодной поверхности вниз;  $\mu(\tau) th \frac{\pi\chi}{2}$  — функция, отображающая полосу на полуплоскость с горизонтальным разрезом, проходящим через бесконечность. Параметр  $\mu(\tau)$  определяется отношением  $l$  к  $s(\tau)$ .

Функция  $z_\Delta(\chi, \tau)$  получается следующим образом. Будем искать решение на границе  $\chi = \sigma$  в узловых точках  $\sigma_m (m = 0, \dots, n)$ . Задаваемыми будут значения  $\Im z_\Delta(\sigma_m, \tau_j) = y_m$ . Примем  $\Im z_\Delta(\sigma_0, \tau) = 0, \Im z_\Delta(\sigma_n, \tau) = 0$ , поскольку  $z_\Delta(\sigma, \tau)$  быстро (как экспонента) убывает при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . Значения  $\Im z_\Delta(\sigma, \tau)$  в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна  $P(\sigma, \tau)$ , имеющего две непрерывные производные

Для восстановления функции  $z_\Delta(\chi, \tau)$  используем формулу Шварца с учетом того, что  $z_\Delta(\chi, \tau)$  аналитическая функция, имеющая, как и  $z_0(\chi, \tau)$ , чисто действительные значения на прямой  $\Im\chi = 1$ :

$$z_\Delta(\chi, \tau) = sh\pi\chi \int_0^\infty P(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi}. \quad (10)$$

Производная равна

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\chi}(\chi, \tau) &= s(\tau) + \frac{\pi}{2} \frac{\mu(\tau)}{ch^2 \frac{\pi\chi}{2}} + \frac{\partial z_\Delta}{\partial \chi}(\chi, \tau), \\ \frac{\partial z_\Delta}{\partial \chi}(\chi, \tau) &= \int_0^\infty \Im \frac{\partial z_\Delta}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{sh\pi\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi} d\sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения  $\mu(\tau)$  запишем уравнение для полуширины щели ЭИ

$$\begin{aligned} l &= s(\tau)\gamma(\tau) + \mu(\tau) ch \frac{\pi\gamma(\tau)}{2} + \\ &+ z_\Delta(\gamma(\tau) + i, \tau). \end{aligned} \quad (12)$$

На плоскости  $\chi$  обозначим  $\gamma(\tau) + i$  образ точки  $G$ , определяемый уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \sigma} &= s(\tau) - \mu(\tau) \frac{\pi}{2sh^2 \frac{\pi\gamma(\tau)}{2}} + \\ &+ \frac{\partial z_\Delta}{\partial \sigma}(\gamma(\tau) + i, \tau) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

так как  $G$  является точкой возврата. Таким образом, параметры  $\mu(\tau)$  и  $\gamma(\tau)$  определяются на каждом временном шаге путем решения системы уравнений (12), (13).

Нестационарная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений численным методом с конечным шагом по времени  $\Delta\tau$ . При этом на каждом временном шаге  $\tau_j$  решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости  $\chi$  на физическую плоскость  $z$ . В полном объеме эта задача решается только при  $\tau = 0$ , так как после каждого шага по времени значения переменных  $y_m(\tau_j)$  являются известными, и остается только подставить их в сплайн и интеграл Шварца (10). После этого остается решить краевую задачу: найти частную производную  $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$  как аналитическую функцию комплексного параметра  $\chi$ , удовлетворяющую краевому условию (7).

Для вычисления производной  $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$  применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения  $z_\Delta(\chi, \tau_j)$ . Искомыми параметрами на каждом временном шаге  $\tau_j = j\Delta\tau$  будут значения  $\Im \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j) = q_m$ . Значения  $\Im \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\sigma, \tau_j)$  в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна  $Q(\sigma, \tau)$ . Для восстановления  $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\chi, \tau)$  используем формулу Шварца (10).

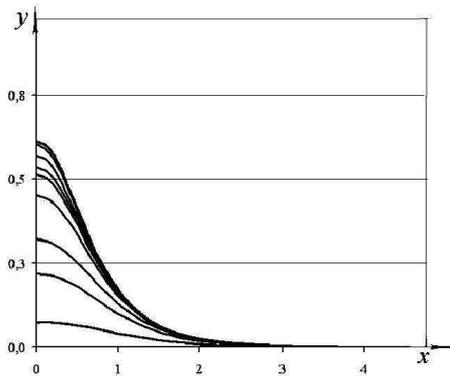


Рис. 4. Формы обрабатываемой поверхности при  $l = 1$  ( $\alpha = 0,25$ )

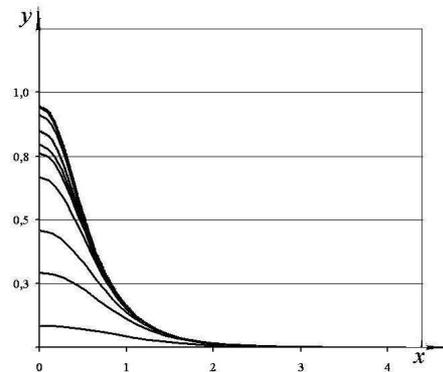


Рис. 5. Формы обрабатываемой поверхности при  $l = 1$  ( $\alpha = 0,5$ )

Определим производную  $\frac{\partial z}{\partial \tau}$  при  $\chi = \sigma + i0$  с учетом (8):

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{ds}{d\tau}\sigma - iv_{ecm} + \frac{d\mu}{d\tau}th\frac{\pi\chi}{2} + \frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}. \quad (14)$$

Значения  $q_m$  определяются методом коллокаций [3] по краевому условию (7) с учетом (11), (14) и того, что  $\psi = \sigma$ . На катоде краевое условие  $\Im z(\sigma + i) = s$  выполняется за счет выбора вида искомой функции (9). Численно задача решается методом предиктор–корректор второго порядка с использованием сплайна и интеграла Шварца на каждом временном шаге.

#### 4. Численные результаты

На рис. 4–7 показаны формы нестационарной обрабатываемой поверхности при различных  $l$ :  $l = 1$  (рис. 4, 5) и  $l = 3$  (рис. 6, 7) для  $\alpha = 0,25$  и  $\alpha = 0,5$ . Видно, что при  $l = 1$  при рассмотренных  $\alpha$  наблюдается установление стационарной формы, однако, при  $l = 3$  стационарное решение не устанавливается, а происходит неограниченный рост высоты выступа. Это объясняется тем, что при  $l = 1$  напряженность в верхней точке выступа имеет значения большие, чем  $E_1$ , а при  $l = 3$  за счет отдаления от кромок ЭИ напряженность становится меньше, чем  $E_1$  (с начала процесса или с некоторого момента времени), и растворения в этих точках не происходит. Устанавливается некоторая «финальная» форма.

В работе было проведено сравнение форм выступов, полученных экспериментально и расчетно. Расхождение МЭЗ порядка 10–20% при расчете с  $\eta = \text{const}$  наблюдается в области, близкой к основанию («прикомлевой»). При расчете формы с помощью предложенного численного метода и использования экспериментальной зависимости  $\eta(j)$  погрешность существенно уменьшается.

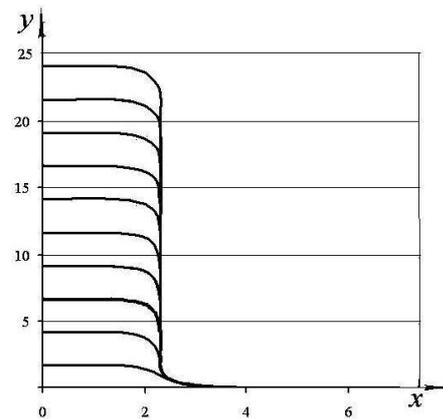


Рис. 6. Формы обрабатываемой поверхности при  $l = 3$  ( $\alpha = 0,25$ )

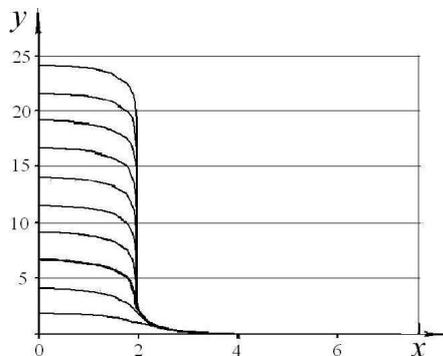


Рис. 7. Формы обрабатываемой поверхности при  $l = 3$  ( $\alpha = 0,5$ )

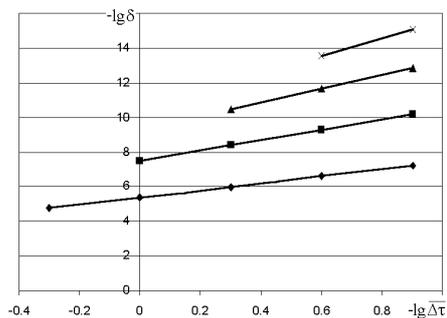


Рис. 8. Результаты фильтрации по  $\Delta \tau$  для оценки погрешности и уточнения результатов

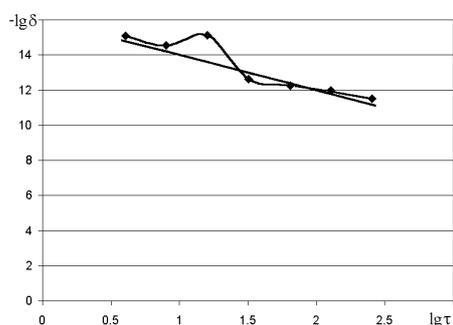


Рис. 9. Зависимость погрешности округления от  $\tau$

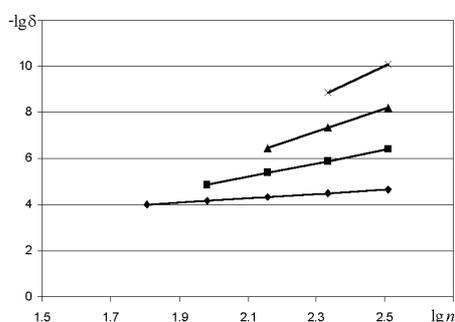


Рис. 10. Результаты фильтрации и оценки погрешности по числу узлов  $n$

Поскольку установление финальной формы происходит значительно медленнее, для исследования этой зависимости применяется многоэтапная фильтрация. На рис. 8 показаны зависимости оценок относительной погрешности от шага по без-

размерному времени  $\Delta \tau$  для  $\lambda = 3$ ;  $n = 144$ ;  $\overline{\Delta \tau} = \Delta \tau / \Delta \tau_0$ ,  $\Delta \tau_0 = 0,01$  с помощью фильтрации [5]. Видно, что фильтрация позволяет существенно уточнить результаты. Однако с увеличением  $\tau$  точность ограничивается наличием погрешности округления. Согласно рис. 9 зависимость этой погрешности от  $\lg \tau$  близка к линейной  $y = 16 - 2 \cdot \lg \tau$ .

Влияние числа узловых точек  $n$  на погрешность проиллюстрирована на рис. 10 для  $\lambda = 3$ ;  $\tau = 32$ ;  $\Delta \tau = 0,01$ . Обнаруживаются степенные составляющие погрешности с  $f_j(n) = n^{-k_j}$ ,  $k_j = 1, 3, 5, \dots$

## 5. Выводы

На основе ТФКП предложена новая двумерная математическая модель нестационарного процесса ЭХО. Найдены формы выступов, возникающих на обрабатываемой поверхности при обработке плоским ЭИ со целью.

Сравнение форм выступов на обрабатываемой поверхности, полученных экспериментально и теоретически, показало их удовлетворительное совпадение.

С помощью методов фильтрации численных результатов найдены закономерности и параметры, характеризующие погрешность финальных форм обрабатываемой поверхности.

## Список литературы

- [1] Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казань: КГУ, 1984. 80 с.
- [2] Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. Методы расчета электрохимического формообразования. Казань: КГУ, 1990. 387 с.
- [3] Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 413 с.
- [4] Миназетдинов Н.М. Об одной задаче размерной электрохимической обработки // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 214–220.
- [5] Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. № 3(80). С. 105–110.

# Течение эмульсий, в подготовке которых исключалось присутствие механических включений<sup>1</sup>

Рахимов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,  
Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», БашГУ, Уфа

Проводились опыты с водоуглеводородными эмульсиями с различными эмульгаторами в капиллярах длиной 2 см, диаметрами 40 и 100 мкм. Чтобы исключить влияние механических примесей, сопоставимых по размеру с диаметром капилляра, в первом случае компоненты эмульсии были профильтрованы через мелкоячеистые фильтры. Во втором случае полученная таким образом эмульсия фильтровалась дополнительно через систему, состоящую из 3-х сетчатых фильтров с размерами ячеек 30–40 мкм. В капилляре 100 мкм такая эмульсия приходила в состояние запираания. Дополнительная фильтрация эмульсии через сетчатые фильтры привела к увеличению вязкости, но при этом в 100 мкм капиллярах время до наступления запираания в 2–3 раза больше, чем у исходной. Реология использованных эмульсий хорошо описывается моделью Оствальда-де-Вааля. Определили, что запираание эмульсии в большей степени обусловлено наличием включений, а не вязкостью эмульсии.

## 1. Введение

Гидродинамика дисперсий жидкость–жидкость в микроканалах сталкивается с обнаруженным ранее свойством — динамическим запираанием, которое не может быть описано в пределах классических реологических представлений. Эффект динамического запираания, обнаруженный в экспериментах с микроканалами, состоит в том, что движение эмульсии через элемент микроканала со временем останавливается, несмотря на постоянно действующий перепад давления [1, 2]. Изучение течения эмульсий в микроканалах с сужениями и их использование в экспериментах с цилиндрическими капиллярами показало большую роль микровключений. Для исключения влияния механических примесей, сопоставимых по размеру с диаметром капилляра, которые могли бы играть определенную роль в процессе динамического запираания, в первом случае компоненты эмульсии были профильтрованы через мелкоячеистые фильтры. Во втором случае полученная таким образом эмульсия фильтровалась дополнительно через систему, состоящую из 3-х сетчатых фильтров с размерами ячеек 30–40 мкм. Состав и способ приготовления использованной эмульсии:

дизтопливо (зимнее) — 39,6% (профильтровали через фильтр Millipore 0,22 мкм); раствор хлорида натрия (26 г соли на 100 мл дистиллированной воды) — 59,4% (в магнитной мешалке мешали более 10 часов, отфильтровали через вату и далее через фильтр Millipore 0,22 мкм); эмульгатор «Композиция 24-09» — 1% (профильтрован через фильтровальную бумагу 2,7 мкм). По прошествии 40 минут после приготовления эмульсии наблюдается образование нескольких небольших (меньше 1 мм) коалесцировавших капель воды и частичное расслоение компонентов эмульсии. При встряхивании капли воды дробятся и эмульсия приобретает однородность, за время порядка часа происходит осаждение микрокапель эмульсии, появляется верхний слой углеводородной фазы (дизельное топливо с эмульгатором).

## 2. Методы и результаты

Несмотря на то, что все компоненты эмульсии были профильтрованы, не исключается возможность появления механических примесей из воздуха при перемешивании или каким-либо другим образом. Чтобы проверить их наличие и исключить влияние на запираание мы пропустили эмульсию через сужения 80 и 40 мкм в трубку, соединенную с микроканалом 100 мкм (рис. 1).

Эмульсия через подводющую полиэтиленовую трубку с внутренним диаметром 2,5 мм подается на

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040), а также Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ «Механика неоднородных жидкостей в полях внешних сил».



Рис. 1. Схема движения эмульсии под действием перепада давления (слева направо): а — через капилляр с сужением, б — течение через капилляр эмульсии, прошедшей через сужение

термоосаждающую трубку с внутренним диаметром 2 мм, соединенную с ней металлической трубкой. Термоосаждающая трубка соединена со стеклянным капилляром с сужением (80 мкм), имеющим во входной и выходной частях внешний диаметр 1,5 мм, внутренний — 700 мкм. После прохождения через сужение эмульсия собирается в соединительной полиэтиленовой трубке, которая в такой же последовательности соединена с капилляром, имеющим внешний диаметр 1,5 мм, внутренний — 100 мкм (рис. 1(а)). После того как в полиэтиленовой трубке накапливается достаточное количество эмульсии, прошедшей через микроканал с сужением, капилляр с сужением убирается и давление подается на ее вход (рис. 1(б)).

Цилиндрический микроканал с сужением можно охарактеризовать длиной 400 мкм, на которой отклонение от диаметра в узкой части 80 мкм не более 10% (в обе стороны).

При перепаде давления 100 кПа эмульсия с большой скоростью около 5 м/с протекает через сужение, это соответствует скоростям деформации сдвига  $1,3 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ , тем не менее визуальная деформация эмульсии не обнаруживается. На 270-ой секунде при течении через сужение течение эмульсии существенно замедляется и наступает закирание. За это время проходит достаточно большое количество эмульсии — 6 мл. Видеоизображения, иллюстрирующие изменения, происходящие в сужении при протекании эмульсии приведены на рис. 2.

На 250-ой секунде появляется неоднородность, когда проходит через нее прозрачная капля воды, в течении одного кадра видно, что эта некая полупрозрачная структура возможно, твердая частица. Далее, на нее начинают нагромождаться другие частицы и с 260-ой секунды по показаниям весов происходит уменьшение скорости потока, на 275-ой секунде расход уменьшается почти на порядок и на 325-ой секунде прекращается. По видеоизображениям видно, что начинается формирова-

ние четочной структуры, которая начинает проявляться через 5 секунд и достаточно отчетливо видна на приведенных кадрах через 15 секунд (340-ая секунда). По перемещению структуры можно оценить скорость в сужении — около 1 мм/с, что соответствует расходу 0,005 мкл/с, это на 3,5 порядка меньше начального расхода. Можно отметить, что при течении чистой эмульсии через плавное сужение эффект динамического закирания не проявляется. Наличие небольших волокнистых, либо других образований, которые застревают в сужении, не приводят к значительным изменениями расхода. Но скопление на них имеющихся, даже в профильтрованной эмульсии, мелких образований приводит к формированию твердой структуры, которая гидродинамически «прозрачна», но на ней происходит формирование структуры из микрокапель, приводящей к закиранию эмульсии.

Эмульсия, прошедшая через сужение в количестве 6 мл, скопилась в подводящей трубке перед капилляром диаметром 100 мкм, длиной 2 см. При подаче перепада давления 100 кПа началось течение эмульсии (рис. 3).

Несколько больший расход в начале видимо

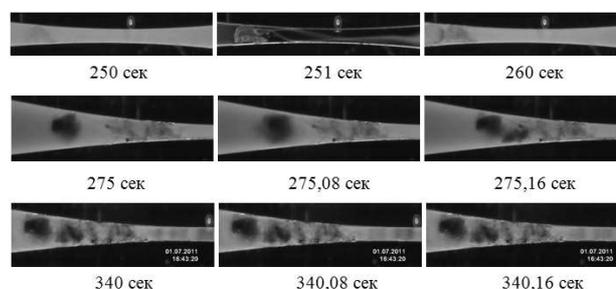


Рис. 2. Кадры, отображающие изменение картины течения эмульсии в сужении, под кадрами приведено время от начала подачи перепада давления 100 кПа

обусловлен частичным осаждением водной фазы в подводящей трубке у входа в капилляр. Величина расхода и скорости на начальном участке (10–50 с)  $Q = 3,7$  мкл/с,  $v = 0,47$  м/с, соответственно  $\dot{\gamma} = 9400$  с<sup>(-1)</sup>; далее (1300–1800 с) они стали равными  $Q = 1,5$  мкл/с,  $v = 0,19$  м/с, соответственно  $\dot{\gamma} = 3800$  с<sup>(-1)</sup>. Величина расхода значительно меньше, по сравнению с течением через сужение, из-за сравнительно большой длины капилляра. Запирание произошло через 15 минут, на кадрах видеозаписи видно образование четочной структуры, скорость течения в состоянии запирания снижается с 710 мкм/с до 9 мкм/с за 7 минут (рис. 4, кадры 1–3). Через полминуты после приведенного кадра давление увеличили до 200 кПа, появилось очень медленное течение, спустя 30 секунд оно стало быстро нарастать. Расход стал равным  $Q = 3,6$  мкл/с, скорость —  $v = 0,46$  м/с, соответственно  $\dot{\gamma} = 9200$  с<sup>(-1)</sup> (в интервале 1700–1800 с); далее (в интервале 2250–2320 с) они стали равными  $Q = 9,1$  мкл/с,  $v = 1,16$  м/с, соответственно  $\dot{\gamma} = 23200$  с<sup>(-1)</sup>.

Соотношение скоростей при начальном перепаде и его удвоении также приблизительно удваивается, что говорит о том, что в этом диапазоне скоростей деформации неньютоновские свойства эмульсии практически не проявляются. Через 13 минут наступает запирание, переход кривой в состояние запирания с изломом возможно свидетельствует о том, что у входа сначала сформировалась твердая «пробка». Образующаяся четочная структура отображена на кадрах видеозаписи (рис. 4, кадр 4), по ним также оценены изменения скорости в состоянии запирания  $v = 9$  мкм/с. При подаче 300 кПа (3012–3569 с) расход судя по графику не меняется, по видеозаписи видно небольшое увеличение скорости до 100 мкм/с (рис. 4, кадр 5). Сброс до нуля и подача давления 300 кПа (12 секунд длительность сброса и подача 3583–3779 с, второй раз сброс — 4 с, подача 3784–3833 с) не оказали влияния на запертую структуру, это по всей видимости свидетельствует о том, что «скелет» запирающей структуры состоит из твердых частиц, один из размеров которых меньше 80 мкм. Тем не менее они сформировали структуру, на которой далее образовалась запирающая структура из водных капель эмульсии.

Параллельно с экспериментом в капилляре провели реологические измерения эмульсии (рис. 5). Линии прямого и обратного хода с хорошей степенью достоверности аппроксимируются зависимостью Оствальда-де-Ваале  $\tau = 0,0532\dot{\gamma}^{0,9034}$  Па. Соответствующая ей зависимость для вязкости имеет вид:  $\eta = 0,053\dot{\gamma}^{(-0,097)}$  Па·с, при этом  $\eta = 0,034$  Па·с для  $\dot{\gamma} = 100$  с<sup>(-1)</sup> и  $\eta = 0,027$  Па·с для

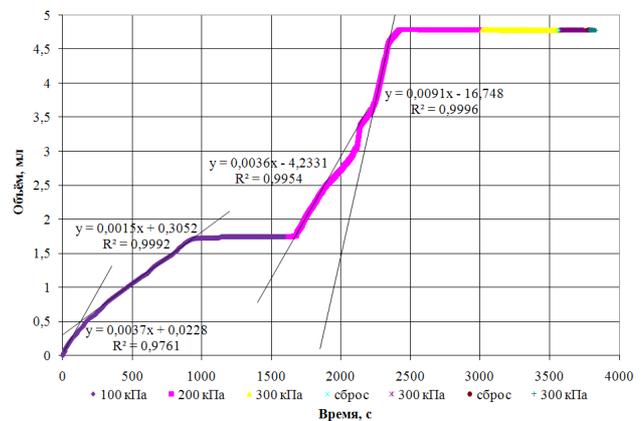


Рис. 3. Зависимость объема (прошедшей через сужение) эмульсии протекающей через капилляр 100 мкм при перепаде давления 100, 200, 300 кПа, сброс и подача давления 300 кПа — 2 раза

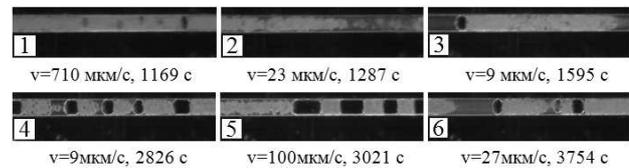


Рис. 4. Структура течения в капилляре после запирания при перепадах давления 100 и 200 кПа

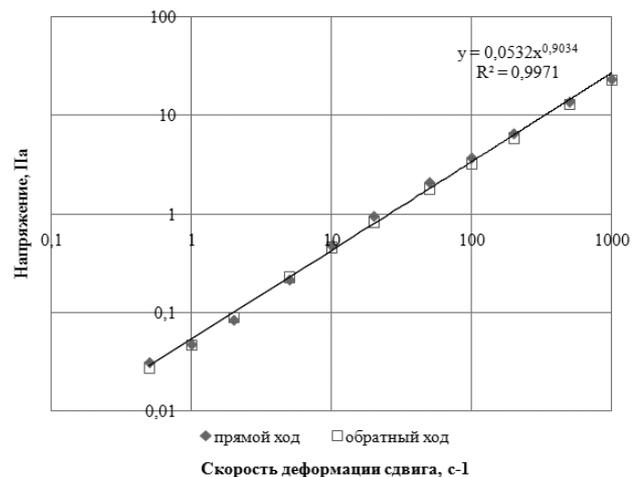


Рис. 5. Реологическая зависимость эмульсии в двойном логарифмическом масштабе

$\dot{\gamma} = 1000 \text{ с}^{-1}$ ). Прямой и обратный ход практически совпадают, что говорит о динамической устойчивости эмульсии.

Была проведена серия экспериментов по течению эмульсии через цилиндрический микроканал с сужением, его можно охарактеризовать длиной 400 мкм, на которой отклонение от диаметра в узкой части 40 мкм не более 10% (в обе стороны). Во всех случаях в течении первых 10–30 секунд в сужении появились соринки.

Чтобы избежать влияния соринки при течении в микроканалах, описанная ранее эмульсия, полученная из фильтрованных компонентов, была дополнительно пропущена через 3 последовательно закрепленные сетки с размерами ячеек не более 30 мкм, используемые в инфузионных системах для внутривенного вливания. Через сетчатые фильтры эмульсия поступала в шприц, из него проводилось заполнение подводящих трубок. Далее, по использованной ранее схеме (рис. 2(а)), эмульсия проходила через сужение 40 мкм и собиралась у входа капилляра диаметром 100 мкм. В течении часа набралось 1,8 мл эмульсии, дополнительная фильтрация существенно изменила влияние включений. Тем не менее, в конце первого часа образовалась некоторая структура, на которой произошло заширение.

Дополнительно профильтрованную эмульсию, прошедшую через сужение 40 мкм, начали прокачивать при перепаде давления 100 кПа через капилляр длиной 2 см диаметром 100 мкм (рис. 6). Предположительно в этой эмульсии никаких включений размером более 40 мкм не может быть. Эмульсия, протекающая через микроканал, по прохождении 450 с переходит в состояние динамического заширения. При подаче перепада давления 200 кПа течение возобновляется практически с удвоенной скоростью и достаточно быстро течение останавливается. Подача давления 300 кПа никаких изменений не вызывает. Соответствующие графику кадры приведены на рис. 7. Можно отметить, что четочная структура проявилась спустя небольшое время после подачи 200 кПа.

Реологические свойства использованных эмульсий с хорошей достоверностью аппроксимируются степенной зависимостью, т.е. моделью Оствальда-де-Ваала (рис. 8, 9). Уменьшение вязкости при последующих измерениях скорее всего связано с оседанием дисперсии в перерывах между измерениями, поэтому в расчетах необходимо использовать результаты первых измерений, полученные при «прямом ходе».

Линии прямого и обратного хода с хорошей степенью достоверности аппроксимируются зависимостью Оствальда-де-Ваала. Для прямого

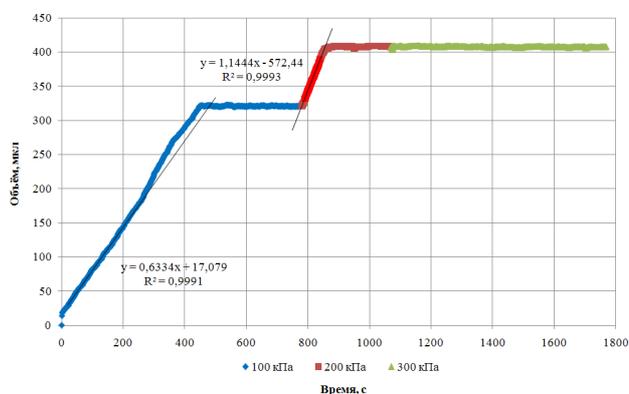


Рис. 6. Зависимость объема от времени протекшей перед этим через сужение эмульсии при пропускании через капилляр длиной 2 см, диаметром 100 мкм при ступенчатом изменении перепада давления

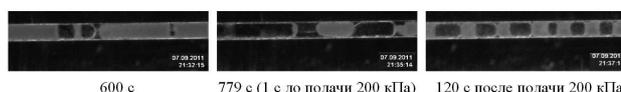


Рис. 7. Визуализация течения в капилляре диаметром 100 мкм, под кадрами время от начала движения

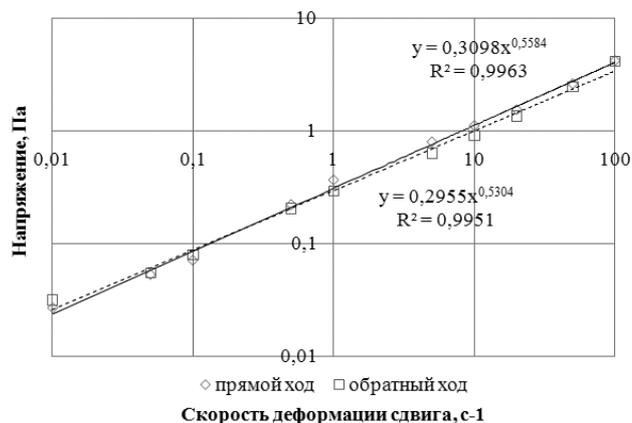


Рис. 8. Реологическая зависимость эмульсии в двойном логарифмическом масштабе

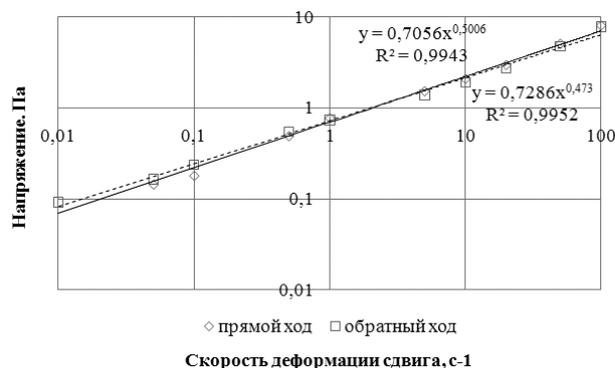


Рис. 9. Реологическая зависимость дополнительно фильтрованной эмульсии в логарифмическом масштабе

хода  $\tau = 0,3098(\dot{\gamma})^{0,5584}$  Па. Соответствующая ей зависимость для вязкости имеет вид:  $\eta = 0,3098\dot{\gamma}^{0,4416}$  Па·с, при этом  $\eta = 0,04204$  Па·с для  $\dot{\gamma} = 100$  с<sup>(-1)</sup>.

Дополнительная фильтрация эмульсии через сетчатые фильтры привела к увеличению вязкости (рис. 9), это, по всей видимости, обусловлено дроблением капель при продавливании эмульсии через 3 слоя сеток. Меньшее изменение вязкости при последующих измерениях можно объяснить уменьшением скорости седиментации при меньших размерах микрокапель эмульсии.

Линии прямого и обратного хода с хорошей степенью достоверности аппроксимируются зависимостью Оствальда-де-Ваале  $\tau = 0,7056\dot{\gamma}^{(0,5006)}$  Па. Соответствующая ей зависимость для вязкости имеет вид:  $\eta = 0,7056\dot{\gamma}^{(0,4994)}$  Па·с, при этом  $\eta = 0,08029$  Па·с для  $\dot{\gamma} = 100$  с<sup>(-1)</sup>.

### 3. Заключение

В результате проведенных экспериментов с эмульсией из отфильтрованных компонентов, с дополнительной фильтрацией самой эмульсии и протеканием через сужения можно отметить:

1. Наблюдающиеся запираания в сужениях всегда обусловлены появлением рыхлой или твердой частицы, застревающей в сужении.

2. Приведенные попытки с изучением течения эмульсии через обычно используемый капилляр, предварительно пропущенной через сужение, диаметр которого меньше капилляра, и в 2,5 раза меньше, дополнительно профильтрованные от включений, показали, что во всех случаях обнаруживается эффект динамического запираания. Не исключается, что включения даже меньшего размера по сравнению с диаметром капилляра способствуют наступлению динамического запираания.

3. Реология использованных эмульсий хорошо

описывается моделью Оствальда-де-Вааля, дополнительная фильтрация приводит к некоторому увеличению вязкости.

### Список литературы

- [1] Ахметов А., Телин А., Глухов В., Мавлетов М., Силян М., Гаевой Е., Магадов Р., Хлобыстов Д., Байкова Е. Особенности течения высококонцентрированных обратных водонефтяных эмульсий в трещинах и пористых средах. Технологии ТЭК. Нефть и капитал, апрель, 2003 С. 54–58.
- [2] Ахметов А.Т., Рахимов А.А., Саметов С.П. Новое свойство эмульсий при течении в микроканалах — важное для технологий извлечения нефти // Материалы VII международной конференции «Химия нефти и газа». Томск, 2009. С. 362–367.

# Топологические превращения в каплях нематохолестерика при развитой электроконвекции<sup>1</sup>

Тимиров Ю.И., Гареева Е.Р., Скалдин О.А.

Институт физики молекул и кристаллов УНЦ РАН, Уфа

Экспериментально изучены динамика и взаимопревращение дефектов в нематохолестерических каплях в зависимости от соотношения радиуса капли  $R$  к шагу спирали  $P$  в электрическом поле. Показано, что в зависимости от соотношения  $R/P$  и приложенного напряжения могут реализованы различные ориентационно-структурные превращения. В частности, когда соотношение  $R/P < 1$  наблюдаются капли с одним разрушенным буджумом. Приложение переменного электрического напряжения приводит к вращению последнего. В случае  $R/P \sim 1$  динамика вращения дисклинационной линии трансформируется в процесс периодического распада буджума (с топологическим индексом  $S = 1$ ) на два поверхностных дефекта. В случае, когда  $R/P > 1$ , наблюдается процесс слияния двух поверхностных дефектов с топологическим индексом  $1/2$  в объемный дефект типа «еж» с  $S = 1$ . Обсуждаются механизмы наблюдаемых процессов.

## 1. Введение

В последние годы значительный интерес исследователей вызывает изучение и использование в электрооптических устройствах анизотропных дисперсных сред, представляющих собой взвеси капель жидких кристаллов в полимерных матрицах (капсулированные полимером жидкие кристаллы — КПЖК) [1–5]. Это связано с рядом нетривиальных физических свойств жидких кристаллов (ЖК) в малых объемах с замкнутой геометрией, что позволяет, например, уменьшить времена отклика КПЖК ячеек на воздействие электрического поля, упрощать оптические схемы считывания (без применения поляризаторов), создавать гибкие ЖК устройства большой площади и т.д. Кроме того, в КПЖК проявляются более сложные и разнообразные ориентационные процессы, чем в электрооптических ячейках на основе однородных слоев ЖК; наблюдаются различные топологические дефекты [2, 6, 7], которые играют важную роль в протекании различных процессов (фазовые превращения, пластические деформации и т.п.). Многообразие неоднородных распределений в КПЖК чрезвычайно велико и их природа тесно связана с характером упорядочения ЖК. Свойство, дающее возможность создавать требуемую ориентационную структуру КПЖК посредством формирования соответствующих граничных условий, служит

основой для функционирования всех современных электрооптических ЖК устройств. Исследования локальных переходов Фредерикса [8] заложили основу для формирования нового подхода к управлению ЖК. Так в работе [9] впервые наблюдался локальный переход Фредерикса для плоского слоя нематика, где в качестве возмущающего внешнего фактора выступало изменение температуры. Капли нематика с изменяющимися граничными условиями за счет вариации температуры рассматривались в работах [6, 7, 10]. В работах [11–14] изучены неравновесные ориентационные структуры КПЖК, возникающие при модификации граничных условий за счет добавки гомеотропного сурфактанта в каплях нематика, диспергированного в полимерной матрице. В [6] теоретически предсказан и экспериментально продемонстрирован сценарий трансформации директора сферических капель нематика, диспергированных в изотропной жидкости. В работе [15] был предложен и реализован новый метод управления ориентационной структурой капель ЖК, основанный на модификации поверхностного сцепления ионообразующих сурфактантами под действием электрического поля, который наиболее актуален для практических приложений.

Таким образом, дисперсные системы на основе ЖК активно исследуются. Однако, в основном изучаются равновесные ориентационные переходы, в то время, как динамика структурных превращений и дефектообразования в закритичной области неустойчивости капель представлена незначитель-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-02-97039) и финансовой поддержке компании ОПТЭК.

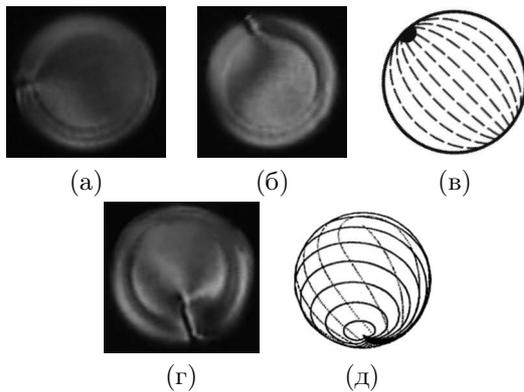


Рис. 1. Изображения капль с одним разрушенным буджом— (а), (б), где (в) схематическое изображение распределения поля директора, (г) вращающаяся линия и (д) схема распределение поля директора для нее ( $R = 50$  мкм)

но. В связи с этим, целью данной работы является исследование динамики циклических процессов распада и слияния дефектов в каплях нематохолестерика, инициируемых переменным электрическим полем.

## 2. Методика эксперимента

Исследуемые образцы представляют собой смесь на основе нематического ЖК — *n*-(4-метоксибензилиден)-4-бутиланилин и холестерического ЖК — холестерилхлорид в пропорции 1 : 0.0017 и 1 : 0.0022 весовых долей. Для определения шага спирали полученных смесей был использован метод, представленный в [16], со значениями равновесных шагов  $P = 72$  мкм и  $P = 54$  мкм соответственно. ЖК-ячейка размещалась на термостолке HCS250 (Instec, США) с термостабилизацией лучше  $0.01^\circ$  C. Термостолк располагался на вращающемся предметном столике поляризационно-оптического микроскопа AxioImager A1.m (Carl Zeiss, Германия). Для получения капль в изотропном окружении, расположенная в термостолке ЖК-ячейка перегревалась для полного перехода ЖК в изотропное состояние. Затем ячейка медленно остужалась до появления зародышей мезофазы, которые далее укрупнялись до образования ЖК-капль нужного размера. Величина получаемых капль регулировалась либо охлаждением — для увеличения размеров, либо нагреванием для их уменьшения. Измерения размеров капль проводились в программном пакете AxioVision Rel.4.7 (Carl Zeiss, Германия) со встроенной системой определения размеров объекта. Точность определения размеров капль была

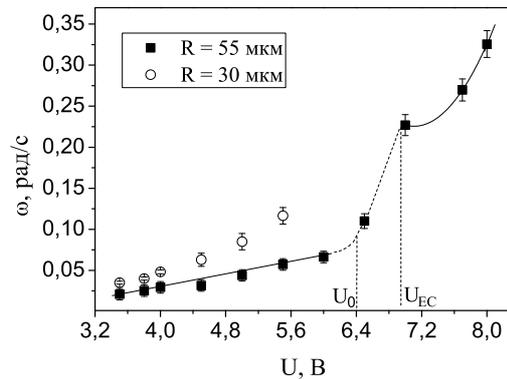


Рис. 2. Зависимость угловой скорости вращения буджума от приложенного напряжения  $U$  для  $P = 72$  мкм

порядка  $\sim 1$  мкм. Полученные с помощью видеокамеры PCO VX-440 (Instec, Германия) экспериментальные изображения и последовательности видеозаписей оцифровывались с помощью фрейм-граббера Pinnacle USB-700 (Pinnacle System, Германия) с разрешением  $720 \div 576$  пикселей и записывались на жесткий диск для дальнейшей обработки. К ЖК-слою прикладывалось переменное электрическое напряжение  $U_c$  частотой  $f = 50$  Гц.

## 3. Циклические процессы распада буджума

Рассмотрим структурные превращения в каплях с шагом  $P$  равновесного геликоида в диапазоне  $54 \leq P \leq 72$  мкм и  $R > 25$  мкм, где образуются капль с одним разрушенным буджом (рис. 1(а), 1(б)). Состояния этих капль становятся нестационарными, т.е. они начинают вращаться при достижении порогового значения  $U \sim 1.5$  В. При напряжении выше 7 В оптическая картина становится более сложной — появляется дисклинационная линия (рис. 1(г)), которая продолжает вращаться.

Для этих капль (рис. 1) были определены угловые скорости вращения  $\omega$  как функции приложенного напряжения  $U$  с учетом их радиусов  $R$ . Как видно из графиков (рис. 2), угловая скорость вращения дефекта растет с напряжением, причем, в каплях с меньшим радиусом скорость вращения выше. Кроме того, можно выделить две области на кривой зависимости  $\omega(U)$  (рис. 2) для капль с  $R \gtrsim 50$  мкм, которые разделены точкой перегиба  $U_0 \approx 6.4$  В. При напряжении  $U_{EC} \lesssim 6.8$  В вращение капль может быть связано с электромеханическим эффектом [17], когда угловая скорость  $\omega \sim E$ ,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\nu_e E}{3\gamma_1} \sim U, \quad (1)$$

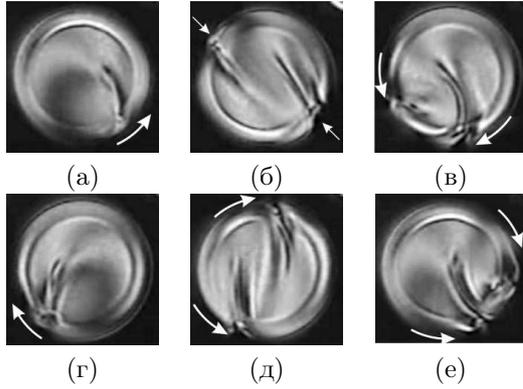


Рис. 3. Изображения циклического движения капель при напряжении  $U = 5.5$  В (а)–(е). Стрелками показаны поверхностные дефекты и направления их движения ( $R = 50$  мкм)

где  $\nu_e$  — коэффициент электромеханического сцепления;  $\gamma_1$  — динамический коэффициент вязкости НХЖК. Как видно из выражения (1), угловая скорость  $\omega \sim E$ , а значит также  $\omega \sim U$ , что достаточно хорошо согласуется с экспериментом (рис. 2). При значениях  $6.4 \leq U \leq 6.8$  имеет место переходная область включения электроконвективного механизма, а далее угловая скорость  $\omega \propto U^2$ . Из уравнения Навье–Стокса с учетом электрических сил получаем следующее [18]

$$\eta \Delta v = E \delta q, \quad (2)$$

где  $\eta$  — обычный коэффициент вязкости;  $v$  — конвективная скорость;  $\delta q$  — аккумулярованный связанный объемный заряд в ЖК за счет анизотропии проводимости. С учетом уравнения Пуассона

$$\text{div } \tilde{E} = \frac{1}{\varepsilon} \delta q, \quad (3)$$

из (2) следует

$$v \sim E^2 \sim U^2. \quad (4)$$

А поскольку в циклическую частоту  $\omega$  имеется вклад скорости электроконвективного движения, то для нее из выражения (4) качественно получаем

$$\omega \sim v \sim U^2. \quad (5)$$

Последнее также хорошо согласуется с экспериментальной зависимостью (рис. 2). Как было сказано выше, в этом случае трансформация структуры капли приводит к вращению уже дисклинационной линии (рис. 1(г)), при этом равновесный шаг холестерической спирали  $P = 72$  мкм, а радиус капли  $R \approx 25$  мкм.

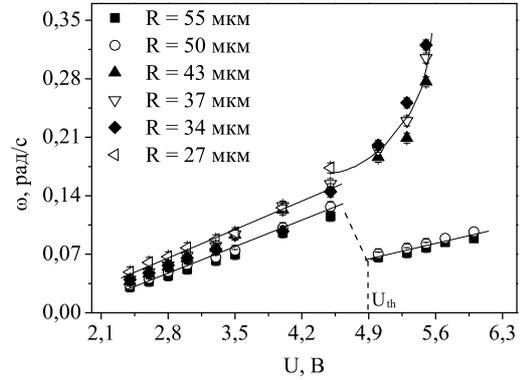


Рис. 4. Зависимость периода циклического распада буджума от приложенного напряжения  $U$  для капель с различными радиусами  $R$  и шага спирали  $P = 54$  мкм

Если уменьшить шаг спирали до 54 мкм, то в каплях размером  $R \gtrsim 50$  мкм начинается процесс периодического распада буджума на два поверхностных дефекта (рис. 3(б)). Здесь же (рис. 3) приводится последовательность фаз движения поверхностных дефектов от распада (рис. 3(б, д)) до слияния (рис. 3(в, е)), которое завершает цикл превращений (рис. 3(а–е)). Порог начала этого процесса приблизительно  $U_{th} \approx 5$  В (рис. 4). Следует отметить, что в отличие от схемы перехода от «ежа» к биполярной капле в чистом нематике, в случае капель слабого нематохолестерика (рис. 3(а–е)) итоговая конфигурация биполярной капли является скрученной.

Именно благодаря этой скрученности в исследуемых каплях, вероятнее всего, и образуется пара стенок, изображенных на рис. 3(б, д). Для этого случая, а именно, процесса периодического распада буджума на два поверхностных дефекта, были определены зависимости угловой скорости от величины приложенного напряжения (рис. 4), которые коррелируют с зависимостями, изображенными на рис. 2. А именно, в области напряжений  $U \lesssim U_{th}$  (рис. 4), где циклическое движение структурой особенности — дефектов, стенок, дисклинационных линий и т. д. предположительно обусловлены электромеханическим эффектом, эти зависимости подобны. По мере приближения к пороговым значениям электрического поля, развитие электроконвекции в каплях  $R/P \simeq 1$  инициирует процесс периодического распада и разрушения буджума на два поверхностных дефекта с последующим их слиянием. На рис. 4 этому соответствует скачок  $\omega$  ( $R \gtrsim 50$  мкм), в сторону ее уменьшения, для более же мелких капель при  $U \gtrsim U_{th}$  характерен нелинейный рост скорости вращения дисклинационной линии и отсут-

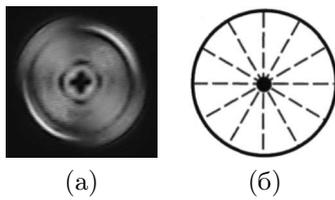


Рис. 5. Изображение равновесного состояния капли НХЖК с шагом  $P = 54$  мкм при  $U = 5.5$  В; в центре находится «еж» — (а); схема распределения поля директора в капле с «ежом» — (б)

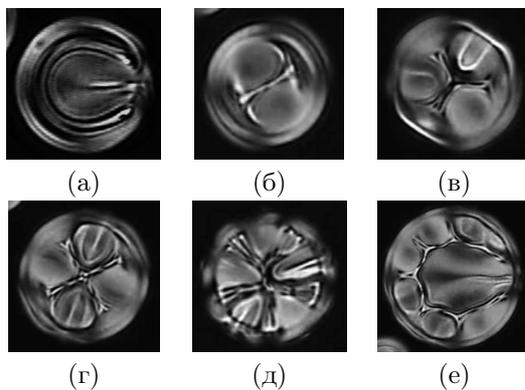


Рис. 6. Наблюдаемые структуры в каплях НХЖК в смесях с шагом  $54 \div 25$  мкм, для капель с диаметром  $94 \div 224$  мкм

ствии процессов деления объемного дефекта.

#### 4. Экспериментальное моделирование распада «ежа» на два поверхностных дефекта

По сравнению со статическими равновесными переходами в каплях НХЖК спектр динамических нестационарных структур значительно шире. Здесь существенное значение имеет соотношение толщины слоя, размера капель и величины равновесного шага спирали, индуцированного холестерическим допантом. В частности, соотношение  $R/P$  было значительно больше 1. В данном разделе рассматривается динамика структурных превращений капель, в которых восстановление временной динамики ориентационных превращений крайне затруднено, что связано с появлением в объеме капли электроконвективных вихрей. Однако, в этой ситуации возможно изучение циклических процессов рождения и схлопывания линий, дисклинаций, дефектов.

Изображение равновесного состояния капли до начала развития динамических процессов приведено на рис. 5(а). Дальнейшее увеличение приложен-

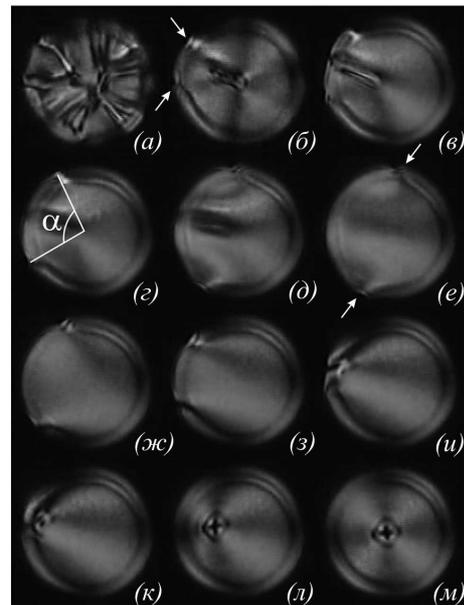


Рис. 7. Изображения последовательности промежуточных структур при скачкообразном изменении приложенного напряжения от 9.5 В до 5.5 В в разные моменты времени для капли с радиусом  $R = 62$  мкм. (а) полиструктура соответствующая напряжению 9.5 В; (б) структура капли после переключения напряжения до 5.5 В, где стрелками показаны формирующиеся дефекты на границе цилиндрической капли; (б–е) расхождение пары дефектов (стрелками указано крайнее положение пары дефектов); (ж–и) слияние; (к–м) переход «ежа» в центр капли

ного напряжения инициирует образование различных полиструктур в зависимости от диаметра капли. На рис. 6 изображены характерные виды полиструктур с различным количеством стенок и дефектов. В частности, наблюдаются полиструктуры с одним и более лучами, в том числе, и нестационарные (рис. 6(б, г, е)). Причем, наличие определенного количества лучей связано с устойчивой и неустойчивой конфигурациями электроконвективных вихрей, развивающихся в теле капли, и их размерами по отношению к диаметру капель.

Для более детального понимания изучаемых периодических превращений и экспериментального моделирования процесса была исследована релаксация поля директора от сложных конфигураций его распределения (рис. 6(д)) до равновесного состояния ориентационного поля капли (рис. 5(а)). Это делалось следующим образом: выбиралась, например, пятилучевая структура (рис. 6(д)), которой соответствовало напряжение 9.5 В, затем

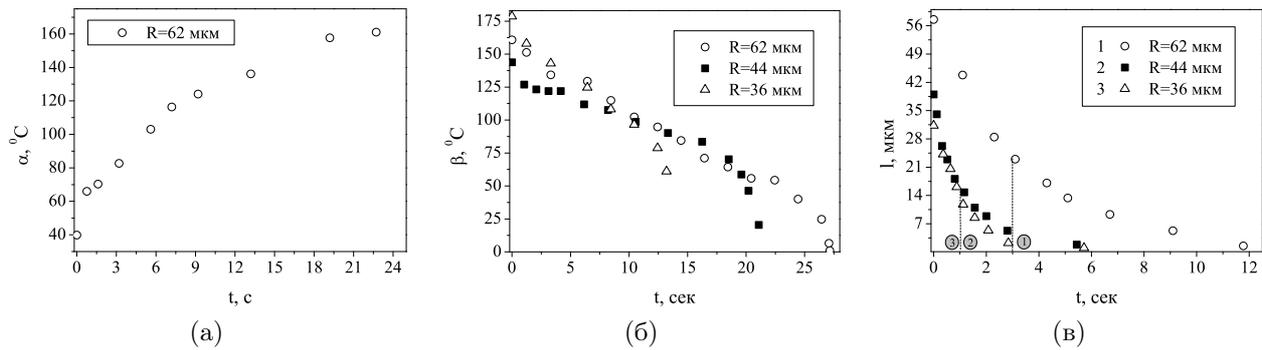


Рис. 8. Временная динамика расхождения, слияния поверхностных дефектов и переход «ежа» к центральному расположению. (а) зависимость угла расхождения дефектов от времени для случая рис. 7(б–е); (б) обратный процесс — зависимость угла начала схождения до момента слияния от времени (рис. 7(е–и)); (в) зависимости расстояния локализации дефекта относительно центра в различные моменты времени для случая представленного на рис. 7(и–м)

напряжение изменялось скачком типа ступеньки до 5.5 В (конечное равновесное состояние капли (рис. 5)). Переход к этому квазиравновесному состоянию занимает определенное время, за которое происходит ряд структурных превращений в каплях. В частности, наличие стенок и дефектов в каплях инициирует процесс релаксации и аннигиляции, так что сумма топологических индексов всех дефектов

$$\sum_{i=1}^N S_i \Rightarrow 1,$$

и в конце процесса итоговая конфигурация с  $S = 1$  соответствует наличию в центре капли «ежа».

На рис. 7 показана последовательность промежуточных структур, зафиксированных через определенный временной интервал. В момент изменения скачком напряжения, лучевая структура быстро релаксирует до состояния одной дисклинационной линии (рис. 7(б, в)), которая диссипируя формирует на границе капли пару дефектов (рис. 7(б)),двигающихся в противоположные стороны по поверхности до диаметрального расположения (рис. 7(б–е)). В течение этого времени идет релаксация внутреннего упругого напряжения капли, которая и приводит к разбеганию этой пары дефектов. Состояние капли на рис. 7(е) (стрелками указано это положение) является началом обратного движения дефектов до их слияния рис. 7(и). После чего дефект, двигаясь к центру, занимает равновесносимметричное положение.

Для описания распада объемного и слияния поверхностных дефектов была изучена временная динамика их движения для трех процессов: расхождение (рис. 7(б–е)), слияние (рис. 7(е–и)) и переход к объемному расположению дефекта (рис. 7(к–м)). На рис. 8 изображены соответствующие временные

зависимости, отражающие выше означенные процессы. Для первого случая — процесса расхождения дефектов (рис. 8(а)), построена зависимость центрального угла  $\alpha$  от времени  $t$ , которая описывает процесс торможения дефектов при стремлении  $\alpha \simeq 180^\circ$  С. После достижения точки разворота  $\alpha \simeq 180^\circ$  С процесс начинает идти в обратную сторону до их слияния. Этому соответствуют зависимости углов  $\beta(t)$  для различных размеров капель (рис. 8(б)). В целом, зависимости рис. 8(а) и рис. 8(б) являются взаимодополняемыми в релаксационном смысле.

Проанализируем влияние процесса релаксации поля директора в фазах разбегания и слияния дефектов (рис. 7(б–и)). Для этого оценим характерные времена релаксации поля директора, связанные с упругими напряжениями. Это можно сделать по известной формуле [19]:

$$\tau_d = \frac{\gamma_1 \cdot d^2}{\pi^2 \cdot K}, \quad (6)$$

где  $\gamma_1 = 0.077$  Нс/м<sup>2</sup> — динамическая вязкость ЖК;  $K = 5.5 \cdot 10^{-12}$  Н — среднее значение константы упругости (значения параметров приведены из [18]);  $d = 25$  мкм — толщина слоя. Для данных значений параметров получим  $\tau_d \approx 1$  с время релаксации. Тогда как, согласно зависимости (рис. 8(б)) эти характерные времена динамики движения дефектов зависят от размера капель, а не от толщины слоя  $d$ . Это подтверждается качественными расчетами  $\tau_D$  с использованием того же самого выражения (6), где вместо толщины слоя  $d$  подставляем значения диаметров  $R$  капель и, соответственно, получаем:  $\tau_{D=122 \text{ мкм}} \approx 21$  с,  $\tau_{D=88 \text{ мкм}} \approx 11$  с,  $\tau_{D=72 \text{ мкм}} \approx 8$  с, что вполне соотносится с зависимостями рис. 8(б). Теперь рассмотрим последнюю фазу — движение дефекта к

центру капли (рис. 7(и-м)), которой соответствует ряд зависимостей расстояния локализации дефекта относительно центра в различные моменты времени (рис. 8(в)). Эти зависимости по своему характеру являются релаксационными  $e^{-t/\tau_d}$  и связаны с нивелированием упругих напряжений, образовавшихся вследствие смещения «ежа» из центра. Оценки времен для случая экспоненциальной релаксации из рис. 8(в) дают: (1)  $\tau_{R=62 \text{ мкм}} \approx 3 \text{ с}$ , (2)  $\tau_{R=44 \text{ мкм}} \approx 1 \text{ с}$ , (3)  $\tau_{R=36 \text{ мкм}} \approx 1 \text{ с}$ , что говорит в пользу релаксации обычного типа, определяемой толщиной слоя ЖК.

## 5. Заключение

Таким образом, из полученных данных следует, что для капель нематохолестерика в зависимости от размера выше порога динамической неустойчивости характерны периодические процессы зарождения и схлопывания структурных стенок. Этот процесс связан с распадом разрушенного буджума на два поверхностных дефекта с последующим их слиянием, что завершает период превращений.

Также установлено, что в каплях с размерами много больше толщины слоя, в так называемых перетяжках, при воздействии переменного поля сначала возникает осцилляция линейного дефекта, затем образование структурной стенки и его периодического движения, дальнейшее увеличение напряжения приводит к появлению осциллирующих двух-, трех-, четырех-, пяти-, шестилучевых полиструктур.

Показано, что при переключении от напряжений, когда образуются полиструктуры, до напряжений выше порога динамической устойчивости возникает деление объемного дефекта-ежа на два поверхностных с последующим слиянием этих дефектов в один, который вновь переходит в объем. Весь сложный процесс релаксации можно разбить на два этапа: 1) деление объемного заряда на два поверхностных и, соответственно, обратный ему процесс — слияние; 2) возвращение объемного дефекта в равновесное состояние — в центр капли. Времена распада и слияния (процесс 1) существенно зависят от размера капель и не вписываются, по порядку величины, в обычную схему процесса ориентационной релаксации поля директора, время которой составляет порядка 1 с. Случай 2 — возвращение объемного дефекта в центр, достаточно хорошо согласуется с представлениями об ориентационной релаксации поля директора определяемой толщиной образца.

## Список литературы

[1] Жарков Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты. Новосибирск: Наука, 1994. 224 с.

- [2] Crawford G.P. and Zumer S. Liquid Crystals in Complex Geometries. London, Taylor & Francis Publ. 1996. P. 584.
- [3] Ковальчук А.В., Курик М.В., Лаврентович О.Д. Капсулированные нематические жидкие кристаллы: новый класс устройств отображения информации // Зарубежная радиоэлектроника. 1989. № 5. С. 44.
- [4] Жаркова Г.М., Сонин А.С. Электрооптические полимерные ЖК-композиты // Высокомолекулярные соединения. Серия Б. 1993. Т. 35, № 10. С. 17.
- [5] Klosowicz S.J., Zmija J. Optics and electrooptics of polymer-dispersed liquid crystals: physics, technology, and application // Optical Engineering. 1995. V. 34, № 12. P. 3440.
- [6] Воловик Г.Е., Лаврентович О.Д. Топологическая динамика дефектов: буджумы в каплях нематика // ЖЭТФ. 1983. Т. 85, Вып. 6. С. 1997.
- [7] Курик М.В., Лаврентович О.Д. Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования // УФН. 1988. Т. 154, Вып. 3. С. 381.
- [8] Dubois-Violette E. and De Gennes P.G. Local Frederiks transitions near a solid/nematic interface // J. de Phys. Lett. 1975. V. 36. L-255.
- [9] Ryschenkow G., Kleman M. Surface defects and structural transitions in very low anchoring energy nematic thin films // J.Chem.Phys. 1976. V. 64, № 1. P. 404.
- [10] Сутормин В.С., Крахалев М.Н., Прищепа О.О. Температурно индуцированные изменения конфигурации директора в каплях нематика, диспергированного в поливинилпирролидоне // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2009. Т. 2, № 3. С. 352–359.
- [11] Прищепа О.О., Зырянов В.Я. Исследование неравновесных ориентационных структур в каплях НЖК с варьируемым поверхностным сцеплением // Вестник Краснодарского государственного университета. 2005. Вып. 4. С. 82–88.
- [12] Прищепа О.О., Шабанов А.В., Зырянов В.Я. Трансформация конфигурации директора в каплях нематического ЖК при изменении граничных условий // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. С. 315–319.
- [13] Prischepa O.O., Shabanov A.V., Zyryanov V.Ya. Director configurations within nematic droplets doped by lecithin // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 2005. V. 438. P. 141–150.

- [14] Prischepa O.O., Shabanov A.V., Zyryanov V.Ya. Director configurations in nematic droplets with inhomogeneous boundary conditions // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 72. P. 031712.
- [15] Зырянов В.Я., Крахалев М.Н., Прищепа О.О. Шабанов А.В. Ориентационно-структурные превращения в каплях нематика, обусловленные ионной модификацией межфазной границы под действием электрического поля // *Письма в ЖЭТФ*. 2007. Т. 86, вып. 6. С. 440–445.
- [16] Скалдин О.А., Тимиров Ю.И., Лебедев Ю.А. О влиянии поверхностной энергии сцепления немато-холестерика на определение шага спирали // *Письма в ЖТФ*. 2010. Т. 36, вып. 19. С. 23–30.
- [17] Madhusudana N.V. & Pratibha R. An experimental investigation of electromechanical coupling in cholesteric liquid crystals // *Liquid Crystals*. 1989. V. 5. P. 1827–1840.
- [18] Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. С. 384.
- [19] де Жен П.Ж. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. С. 400.

## Идентификация повреждения трубопровода с использованием тензодатчиков

Утяшев И.М.<sup>\*,\*\*</sup>, Ахтямов А.М.<sup>\*,\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

<sup>\*\*</sup>Башкирский государственный университет, Уфа

Возникают ситуации, когда происходит прорыв трубопровода с нефтепродуктами, находящегося под водой. В результате нефть разливается на поверхности, загрязняя окружающую среду. Подводные течения и ветер могут унести нефтяное пятно далеко от места утечки. Поэтому визуально определить место прорыва трубопровода по пятну нефти на поверхности не всегда представляется возможным.

Для решения подобных задач предлагается установка вдоль трубопровода тензодатчиков, которые снимают значения производной смещения  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  (деформации) в различные моменты времени, а также использование простейшей модели трубопровода, в основе которой лежат уравнения продольных колебаний однородного стержня.

Получены формулы определения момента и места разрыва трубопровода по данным тензодатчика и предложена схема взаимодействия с ГЛОНАСС, которая позволяет мгновенно обнаруживать места утечек и повреждений трубопроводов, проложенных под водой, и своевременно ликвидировать последствия аварии. Применение предложенной схемы минимизирует последствия аварии для окружающей среды и финансовые издержки.

### 1. Введение

Возникают ситуации, когда происходит прорыв трубопровода с нефтепродуктами, находящегося под водой. В результате нефть разливается на поверхности, загрязняя окружающую среду. Подводные течения и ветер могут унести нефтяное пятно далеко от места утечки. Поэтому визуально определить место прорыва трубопровода по пятну нефти на поверхности не всегда представляется возможным. Место прорыва может быть определено с помощью определенных датчиков, встроенных в трубопровод изначально.

### 2. Цели и задачи

На рис. 1 предложена схема поиска повреждения трубопровода, находящегося на дне моря. Основной принцип заключается в том, что при разрыве трубы (на схеме точка «а») возникают продольные волны, которые распространяются вдоль трубопровода. В некоторый момент эти волны достигают тензодатчиков «b», которые расположены вдоль всего трубопровода с некоторым периодом. Эти датчики регистрируют возмущение, определяют свое текущее положение через систему глобального позиционирования ГЛОНАСС (на схеме точка

«с») и подают сигнал на пульт управления. Данный сигнал состоит из координат датчика, времени прихода первой волны и графика возмущений. Автоматизированная система управления (компьютер), после обработки полученного графика, выдает характер возможных повреждений, его местоположение и время возникновения. Возможная утечка нефти перепроверяется с помощью датчиков давления. Если подтверждается падение давления на данном участке, подается команда на закрытие соответствующих автоматических задвижек в трубопроводе. Через систему ГЛОНАСС подается предупреждающий сигнал кораблям, находящимся поблизости от места аварии. Кроме того, тут же дается указание к выдвигению к найденному месту происшествия (координаты которого определены по найденным формулам) команды специалистов для устранения последствий аварии и сбора разлившихся нефтепродуктов.

Разрыв трубопровода можно рассматривать как одиночный удар, либо взрыв, или как развивающуюся трещину, тогда возмущения будут слабыми по мощности, но более продолжительными. Признаками того, что имеются повреждения, может также служить и падение давления на линии.

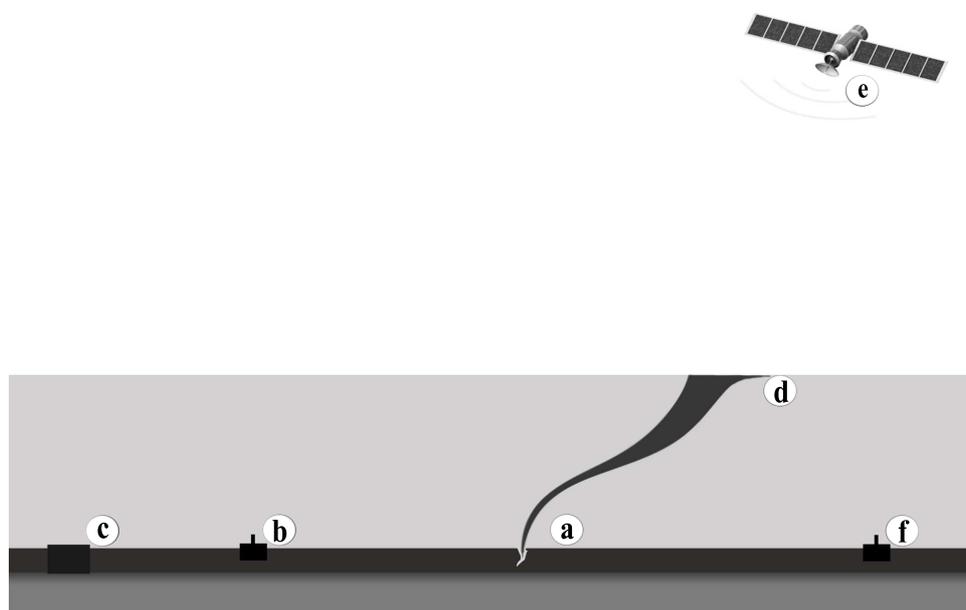


Рис. 1. Схема разрыва трубопровода на дне моря: *a* — место утечки; *b* — тензодатчик; *c* — система ГЛОНАСС, *d* — разлив нефтепродуктов на поверхности

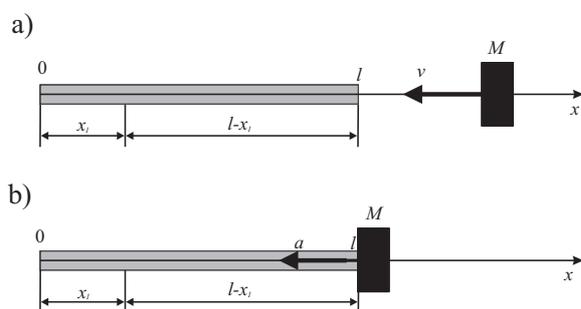


Рис. 2. Схема удара груза массой  $M$  по стержню в момент времени  $t_0$ : *a* — состояние до удара; *b* — после удара

### 3. Методы исследования

Вопрос о месте разрыва трубопровода решается с помощью упрощения на основе математической модели о продольных колебаниях стержня. Более точно рассматривается цилиндрический стержень, оба конца которого свободны (см. рис. 2(а)).

В какой-то момент времени  $t_0$  свободный конец подвергается удару груза массы  $M$ , движущегося вдоль оси со скоростью  $v$ . Решается задача определения момента времени  $t_0$  удара, длины стержня  $l$ , массы груза  $M$  и скорости  $v$  по данным датчика, который снимает значения деформации  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  се-

чения стержня с абсциссой  $x_1$  в различные моменты времени  $t$  (см. рис. 2(б)). Модуль упругости стержня, площадь его поперечного сечения  $S$  и объемная плотность  $\rho$  считаются известными.

Данная задача принадлежит к классу обратных ретроспективных задач [1]. Близкие по постановке задачи рассмотрены в работах [2–6]. В [2] рассматривается аналогичная задача для стержня с встроенным сейсмодатчиком, а не тензодатчиком, как в настоящей работе. В работе [3] установлена аналитическая зависимость между характерами трещиноподобного дефекта и показателями прочностных и гидравлических свойств трубопроводов в виде математических моделей. В [4] предложен метод диагностики подземных трубопроводов, в [5] рассмотрены обратные динамические задачи для дифференциальных уравнений теории упругости, в [6] решена задача для струны с двумя датчиками. В [7] предложено использование спутниковой связи в автоматизированной навигационной системе диспетчерского контроля и учета работы транспорта нефтедобывающих предприятий. Однако поставленная здесь задача отличается от перечисленных как по постановке, так и по методу решения.

Как известно, уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид [8, 9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right). \quad (1)$$

Граничное условие на левом конце ( $x = 0$ ) будет, очевидно,

$$u_x(0, t) = 0. \quad (2)$$

Далее, уравнение движения груза под действием силы реакции стержня, которая равна по величине усилию в сечении  $x = l$  стержня и направлена в противоположную сторону, имеет вид:

$$ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad (3)$$

где через  $m = \frac{M}{\rho Sl}$  обозначено отношение массы движущегося груза к массе стержня.

Начальные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u|_{t=t_0} &= 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -v \text{ при } t = t_0, x = l. \end{aligned} \quad (4)$$

Второе начальное условие означает, что в момент удара движущегося груза все промежуточные сечения стержня имеют скорость равную нулю, а скорость конца стержня равна скорости груза.

Решение начально-краевой задачи (1), (2), (3), (4) известно (см., например, [9]). Нас же интересует обратная к (1), (2), (3), (4) задача.

В терминах начально-краевой задачи (1), (2), (3), (4) интересующую нас обратную задачу можно сформулировать так: известна величина  $a$  и значения  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $x_1$  при изменении временного параметра  $t$ . Требуется определить  $l$ ,  $t_0$ ,  $m$ ,  $v$ .

#### 4. Результаты

Определим сначала момент  $t_0$  удара груза и длину стержня  $l$ . Для этого воспользуемся тем, что скорость распространения продольных волн стержня постоянна и равна  $a$  (см., например, [8]). До удара груза стержень находился в состоянии покоя. При ударе по стержню возникают продольные колебания. Первоначально по стержню распространяется только обратная волна ( $u(x, t) = -\varphi(at - at_0 + x)$ ). В какой-то момент времени  $t_1$  она достигнет точки  $x = x_1$  и будет зафиксирована датчиком. Момент  $t_1$  — это момент перехода с  $u(x_1, t) = 0$  к  $u(x_1, t) < 0$ . При  $t = t_0 + l/a$  обратная волна достигнет закрепленного конца и при  $t_0 + l/a < t < t_0 + 2l/a$  к ней прибавится отраженная волна  $\varphi(at - at_0 - x)$ , т. е. решение будет иметь вид  $u(x, t) = \varphi(at - at_0 - x) - \varphi(at - at_0 + x)$ . В некоторый момент  $t_2$  датчиком будет зафиксирован минимум

функции  $u(x_1, t)$  в интервале  $t_0 + l/a < t < t_0 + 2l/a$ . При  $t = t_0 + 2l/a$  волна  $\varphi(at - at_0 - x)$  отразится от конца  $x = l$ , так что слагаемое  $\varphi(at - at_0 + x)$  в представлении  $u(x, t)$  в интервале  $t_0 + 2l/a < t < t_0 + 3l/a$  будет иметь уже другое выражение. В какой-то момент  $t_3$  датчиком будет зафиксирован максимум функции  $u(x_1, t)$  в интервале  $t_0 + 2l/a < t < t_0 + 3l/a$ .

За время  $T = t_3 - t_2$  волна пройдет расстояние  $S = 2(l - x_1)$ . Поскольку она движется со скоростью  $a$ , имеем  $a = S/T$ . Откуда

$$l = x_1 + a(t_3 - t_2)/2. \quad (5)$$

Зная  $l$  легко найти  $t_0$ . После момента удара по стержню ( $t = t_0$ ) распространяется только обратная волна ( $u(x, t) = -\varphi(at - at_0 + x)$ ). Она достигнет точки  $x = x_1$  в момент времени  $t_1$ . За время  $t_1 - t_0$  волна со скоростью  $a$  пройдет расстояние  $l - x_1$ . Следовательно,

$$t_0 = t_1 - (l - x_1)/a. \quad (6)$$

Как известно [9],  $u(x_1, t) = \varphi(a(t - t_0) + x_1) = -\frac{mlv}{a} (1 - \exp(-\frac{at - at_0 + x_1 - l}{ml}))$  при  $t_0 < t < t_0 + l/a$ ,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(a(t - t_0) + x)) \Big|_{x=x_1} = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at - at_0 + x_1 - l}{ml}\right)$  при  $t_0 < t < t_0 + l/a$ .

Выбрав два известных значения  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  в точке  $x = x_1$  при различных значениях  $t = t_1^*$  и  $t = t_2^*$  ( $t_1^*, t_2^* \in (t_0, t_0 + l/a)$ ), получим систему двух уравнений от двух неизвестных  $m$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} &= -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at_1^* - at_0 + x_1 - l}{ml}\right), \\ \frac{\partial u(x, t_2^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} &= -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at_2^* - at_0 + x_1 - l}{ml}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве  $t_1^*$  и  $t_2^*$  можно выбрать, например, следующие значения:

$$t_1^* = \frac{4l - 3x_1}{4a} + t_0, \quad t_2^* = \frac{2l - x_1}{2a} + t_0. \quad (8)$$

Обозначим  $\frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$  через  $k_1$  и  $\frac{\partial u(x, t_2^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$  через  $k_2$ .

Подставив эти значения в (7), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right), \\ k_2 &= -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{2ml}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим  $\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right)$  через  $y$ . Тогда система (9) запишется в виде:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{v}{a}y, \\ vk_2 &= \frac{v}{a}y^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Из системы (10) видно, что  $y = \frac{k_2}{k_1}$ . Следовательно,  $\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) = \frac{k_2}{k_1}$ . Откуда  $-\frac{x_1}{4ml} = \ln \frac{k_2}{k_1}$  и

$$m = -\frac{x_1}{4l \ln \frac{k_2}{k_1}}. \quad (11)$$

Из первой формулы системы (9) получим:  $-\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) = \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$  и, следовательно:

$$v = -\frac{a \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}}{e^{-\frac{x_1}{4ml}}}. \quad (12)$$

Таким образом, поставленная обратная задача решена. Неизвестные  $l$ ,  $t_0$ ,  $m$ ,  $v$  последовательно находятся по формулам (5), (6), (11), (12).

## 5. Заключение

Применение ГЛОНАСС в комплексе с встроенными в трубопровод тензодатчиками, а также автоматизированной системой управления, использующей полученные формулы и программу, может своевременно обнаруживать места утечек и повреждений трубопроводов, определять время и место разрыва трубопровода и тем самым минимизировать последствия аварии для природы и финансовые издержки для компании. Эта же модель также применима для поиска и предотвращения незаконной врезки в трубопровод, так как в процессе сверления будут возникать акустические волны, которые могут быть зарегистрированы тензодатчиками.

## Список литературы

- [1] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
- [2] Ахтямов А.М. Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня // Контроль. Диагностика. 2007. № 11. С. 59-60.
- [3] Лютикова М.Н. Модель влияния оценки трещиноподобных дефектов на прочностные и гидравлические свойства трубопроводов // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2012. № 2. С. 38-40.
- [4] Сидоров Б.В., Мартынов С.А. Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. С. 18-19.
- [5] Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.
- [6] Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Ретроспективная задача распространения поперечных волн // Контроль. Диагностика 2010. № 4. С. 36-38.
- [7] Губанов А.И., Николаев А.Б., Остроух А.В., Ефименко Д.Б. Концепция автоматизированной навигационной системы диспетчерского контроля и учета работы транспорта нефтедобывающих и нефтеперерабатывающих предприятий // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2011. № 11. С. 12-14.
- [8] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 768 с.
- [9] Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике: учеб. Пособие. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 688 с.

# Отражение короткой изгибной бегущей волны от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу<sup>1</sup>

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Исследуется отражение от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу, и прохождение короткой изгибной бегущей волны. Получена зависимость решения от начальной координаты распределенной массы и ее величины. Решение обратной задачи позволяет определить начальную координату распределенной массы и ее величину по данным отраженной волны в точке наблюдения.

## 1. Введение

В протяженных объектах типа магистральных трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования [1]. В статье [2] предлагается метод, позволяющий вычислить местоположение и объем двух полостей в стержне по собственным частотам изгибных колебаний. Рассматривается случай шарнирного закрепления концов стержня. Пустота моделируется отрицательной сосредоточенной массой. В работе [3] предложен метод отрицательной массы, на основе которого получены новые результаты определения местоположения и объема дефекта стержня в виде малой полости по собственным частотам изгибных колебаний. Применение метода не зависит от формы полости. Величина объема полости моделируется абсолютной величиной отрицательной сосредоточенной массы стержня. В связи с этим сочетание приборного диагностирования в доступном месте (точке наблюдения) и моделирования отраженных волн от удаленной точечной воздушной полости представляет определенный интерес.

## 2. Постановка задачи

Предполагается, что из удаленной точки трубопровода круглого поперечного сечения радиусом  $R$  слева направо распространяется короткая изгибная волна смещения, амплитуда и круговая частота которой в точке наблюдения  $O$  с координатой  $x = 0$

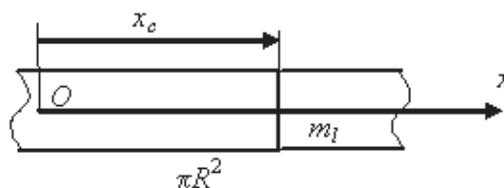


Рис. 1. Расчетная схема

равны  $W$  и  $\omega$ . Принято, что затухающая часть волны равна нулю. В трубопроводе с жидкостью в точке с координатой  $x_c$  прикрепляется распределенная масса  $m_l$  (рис. 1). Требуется определить отраженную и проходящую волны по известной распределенной массе и ее начальной координате, а также начальную координату распределенной массы и ее величину по отраженной волне в точке наблюдения.

Уравнения Тимошенко, учитывающие инерцию вращения и сдвиг, имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} - Q - \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + (\rho F + \rho_i F_i) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \quad F = \pi(R^2 - R_i^2), \\ F_i &= \pi R_i^2, \quad J = \pi(R^4 - R_i^4)/4, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $M$  и  $Q$  — изгибающий момент и перерезывающая сила;  $\rho$ ,  $F$ ,  $R$ ,  $J$  — плотность, площадь, наружный радиус и момент инерции поперечного сечения трубопровода;  $\rho_i$ ,  $F_i$ ,  $R_i$  — плотность жидкости, площадь сечения «в свету» и внутренний радиус трубопровода;  $w$  — прогиб;  $\psi$  — угол поворота сечения при изгибе. Из закона Гука следуют выражения:

$$M = EJ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Q = -GF \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-97003\_р\_поволжье).

причем выше и здесь под  $G$  подразумевается значение модуля сдвига, умноженное на коэффициент  $k'$  распределения напряжения в поперечном сечении,  $E$  — модуль упругости.

Уравнения (1) с учетом соотношений (2) можно записать относительно функции прогиба:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{F\eta_k}{Jc_l^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1+\gamma_k}{c_l^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma_k}{c_l^4} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= 0, \\ \gamma_k &= \frac{c_l^2}{c_s^2} \eta_k, \quad \eta_1 = 1 + \frac{\rho_i F_i}{\rho F}, \\ \eta_2 &= 1 + \frac{\rho_i F_i + m_l}{\rho F}. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_l = \sqrt{E/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{G/\rho}$  — скорости распространения волн растяжения-сжатия и волн сдвига. При этом выражения (2) приобретают вид:

$$\begin{aligned} M &= EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \\ Q &= EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{EJ(\rho F + \rho_i F)}{GF} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая функцию  $w$  в виде  $\exp(i\omega t + \tilde{\alpha}_k x)$ , из (3) получаем характеристическое уравнение относительно  $\tilde{\alpha}_k$ , корни которого равны  $\pm i\alpha_k$ ,  $\pm\beta_k$ , причем

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \omega \left[ \frac{1+\gamma_k}{2c_l^2} + \left( \frac{(1-\gamma_k)^2}{4c_l^4} + \frac{F\eta_k}{J\omega^2 c_l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{L}, \\ \beta_k &= \omega \left[ \left( \frac{(1-\gamma_k)^2}{4c_l^4} + \frac{F\eta_k}{J\omega^2 c_l^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1+\gamma_k}{2c_l^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (3) принимает вид для участков 1 и 2:

$$w_k = e^{i\omega t} (A_k e^{i\alpha_k x} + B_k e^{-i\alpha_k x} + C_k e^{\beta_k x} + D_k e^{-\beta_k x}), \quad k = 1, 2...$$

Ограниченное решение, удовлетворяющее условию отсутствия отраженных волн ( $A = C = 0$ ), записывается

$$w_k = B_k e^{+i(\omega t - \alpha_k x)} + D_k e^{i\omega t - \beta_k x}.$$

Условия стыкования решений при  $x = x_c$  (условия равенства перемещений, углов поворота  $\psi$ , изгибающих моментов  $M$ , перерезывающих сил  $Q$ ):

$$w_2 = w_1, \quad \psi_2 = \psi_1, \quad M_2 = M_1, \quad Q_2 = Q_1. \quad (5)$$

Условия (5) с учетом (2), (4) записываются в виде:

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial w_2^3}{\partial x^3} - \frac{(\rho F + \rho_i F + m_l)}{GF} \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial t^2} &= \\ = \frac{\partial w_1^3}{\partial x^3} - \frac{(\rho F + \rho_i F)}{GF} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial t^2}, \quad x &= x_c, \end{aligned} \quad (6)$$

Поперечное перемещение в трубопроводе задается в виде незатухающей бегущей изгибной волны

$$w = W \sin(\omega t - \alpha_1 x). \quad (7)$$

### 3. Прямая задача

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t, \quad \xi = \frac{2\pi x}{L}, \quad \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L}, \quad \eta_{22} = \frac{L^2 \omega^2}{c_s^2}, \\ \eta_{31} &= \frac{(\rho F + \rho_i F) L^2 \omega^2}{GF}, \quad \eta_{32} = \eta_{31} + \chi, \\ \chi &= \frac{m_l L^2 \omega^2}{GF}, \quad \tilde{w}_k = \frac{w_k}{W}, \end{aligned}$$

представим (6) в виде (в дальнейшем тильда над  $w$  опускается):

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} - \eta_{22} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} - (\eta_{31} + \chi) \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi \partial \tau^2} &= \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} - \eta_{31} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi \partial \tau^2}, \quad \xi &= \xi_c. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели трубопровода с присоединенной массой фигурируют ее координата  $\xi_c$  и параметр  $\chi$  для распределенной массы.

Представим (7) в виде

$$w_i = \sin(\tau - \xi), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c. \quad (9)$$

Решение (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} w_r &= A_r \cos(\tau + \xi) + B_r \sin(\tau + \xi) + \\ &+ e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1} (C_r \cos \tau + D_r \sin \tau), \\ -\infty &\leq \xi \leq \xi_c, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w_{i1} &= A_{i1} \cos(\tau - \alpha_2 \xi / \alpha_1) + B_{i1} \sin(\tau - \xi) + \\ &+ e^{-\beta_2(\xi - \xi_c)/\alpha_1} (C_{i1} \cos \tau + D_{i1} \sin \tau), \\ \xi_c &< \xi \leq \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как при  $\xi \leq \xi_c$  выполняются равенства  $w_1 = w_i + w_r$ , а при  $\xi > \xi_c$  — равенства  $w_2 = w_{i1}$ ,

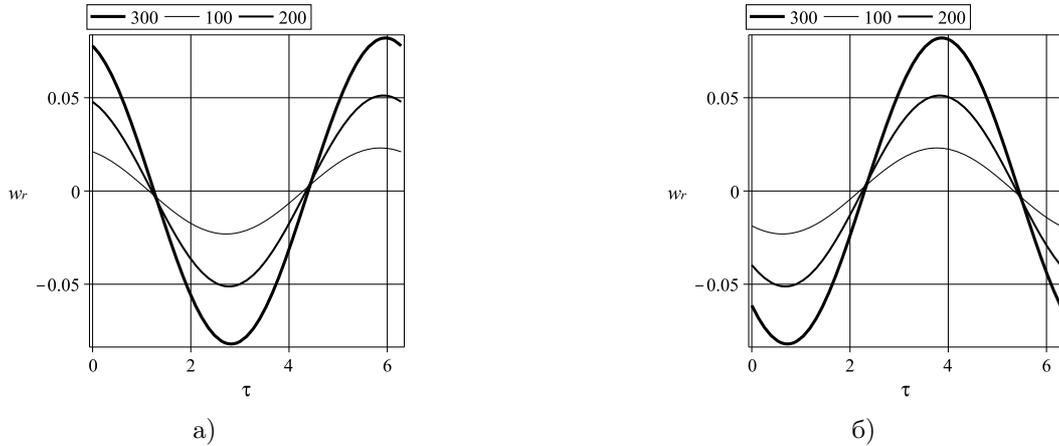


Рис. 2. Перемещения стержня в отраженной волне для начальной координаты распределенной массы  $\xi_c = 20\pi/3$  (а),  $\xi_c = 40\pi/3$  (б) при различных  $m_l$

из условий (8) с учетом соотношений (9)–(11) следует система уравнений, решение которой здесь не приводится. При  $\chi = 0$  волна, не отражаясь, проходит далее. Решения (10), (11) можно представить также в виде:

$$w_r = k_r \sin((\tau + \xi) - \phi_r) + k_{r1} e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1} \times \sin(\tau - \phi_{r1}), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c,$$

$$w_{i1} = k_{i1} \sin((\tau - \xi) - \phi_{i1}) + k_{i2} e^{-\beta_2(\xi - \xi_c)/\alpha_1} \times \sin(\tau - \phi_{i2}), \quad \xi_c < \xi \leq \infty,$$

где  $k_r$ ,  $k_{r1}$  и  $k_{i1}$ ,  $k_{i2}$  — коэффициенты отражения и прохождения;  $\phi_r$ ,  $\phi_{r1}$  и  $\phi_{i1}$ ,  $\phi_{i2}$  — соответствующие фазы:

$$k_r = \sqrt{A_r^2 + B_r^2}, \quad k_{r1} = \sqrt{C_r^2 + D_r^2},$$

$$k_{i1} = \sqrt{A_{i1}^2 + B_{i1}^2}, \quad k_{i2} = \sqrt{C_{i1}^2 + D_{i1}^2},$$

$$\phi_r = \arctan(-A_r/B_r), \quad \phi_{r1} = \arctan(-C_r/D_r),$$

$$\phi_{i1} = \arctan(-A_{i1}/B_{i1}), \quad \phi_{i2} = \arctan(-C_{i1}/D_{i1}).$$

Перемещение  $w_r$  элемента стержня в точке наблюдения ( $\xi = 0$ ), выраженное через амплитуду и фазу  $\delta$  волны, имеет вид:

$$w_r = A_r \cos \tau + B_r \sin \tau + e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1} \times (C_r \cos \tau + D_r \sin \tau) = C \sin(\tau - \delta),$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \delta = -C_1/C_2,$$

где обозначено

$$C_1 = A_r + C_r e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1}, \quad C_2 = B_r + D_r e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1}.$$

Суммарное перемещение  $w_s$  элемента стержня в точке наблюдения ( $\xi = 0$ ), выраженное через амплитуду  $*$  и фазу  $\delta^*$  волны:

$$w_s = w_i + w_r = \sin \tau + A_r \cos \tau + B_r \sin \tau + e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1} (C_r \cos \tau + D_r \sin \tau) = C^* \sin(\tau - \delta^*),$$

$$C^* = \sqrt{C_1^{*2} + C_2^{*2}}, \quad \tan \delta^* = -C_1/C_2^*,$$

где  $C_2^* = 1 + B_r + D_r e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1}$ .

Решение проведено численно для следующих параметров системы:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0.77 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_i = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $R_i = 0.259$  м,  $R = 0.265$  м,  $m_l = 100$  кг/м,  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>,  $x_c = 20\pi/3$  м. Параметры отраженной волны следующие:  $A_r = 0.021029$ ,  $B_r = 0.009465$ ,  $C_r = 0.046190$ ,  $D_r = 0.002168$ .

На рис. 2 даются зависимости перемещения элемента стержня в отраженной волне от безразмерного времени  $\tau$  для двух значений начальной координаты распределенной массы:  $\xi_c = 20\pi/3$  (фрагмент а),  $\xi_c = 40\pi/3$  (фрагмент б)  $\xi = 0$  и различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м). Видно, что отраженные волны зависят от величины распределенной массы  $m_l$  и ее начальной координаты  $\xi_c$ . Чем больше величина распределенной массы  $m_l$ , тем больше величина сигнала в отраженной волне.

Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  при различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) представлены на рис. 3(а), а от интенсивности распределенной массы  $m_l$  для различных значений  $\xi_c$  даются на рис. 3(б). Анализ показывает, что сдвиг фазы в отраженной волне зависит от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивности. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения начальной координаты распределенной массы и ее величины.

Рис. 4 содержит зависимости коэффициента отражения  $C$  от интенсивности распределенной массы  $m_l$  для различных значений  $\xi_c$  (фрагмент а) и от координаты  $\xi_c$  для интенсивностей распределенной массы  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) (фрагмент б). С ростом интенсивности распределенной массы  $m_l$  происходит увеличение коэффициента отражения  $C$ .

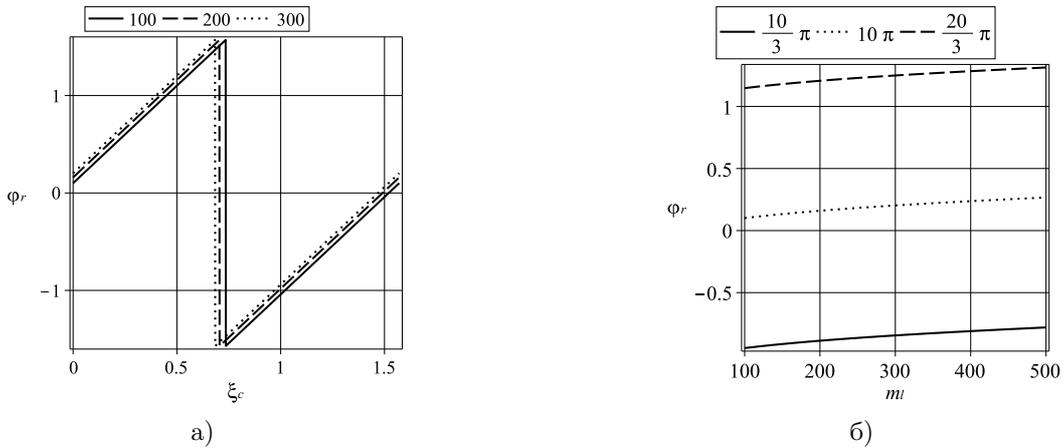


Рис. 3. Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) при различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) и от интенсивности распределенной массы  $m_l$  (б) для различных значений  $\xi_c$

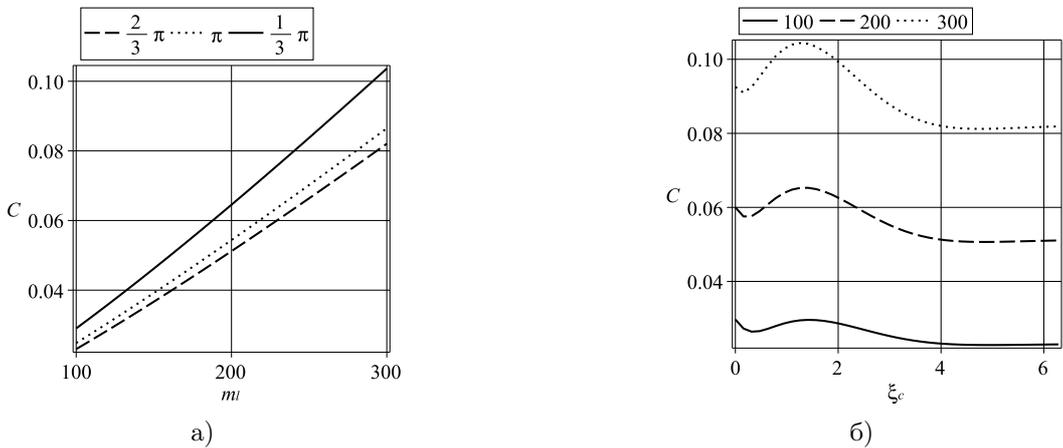


Рис. 4. Зависимости коэффициента отражения  $C$  от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) при различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) и от интенсивности распределенной массы  $m_l$  (б) для различных значений  $\xi_c$

### 4. Обратная задача

Могут быть использованы различные способы [5] определения начальной координаты распределенной массы и ее интенсивности в зависимости от измеряемых характеристик волны с помощью приборных средств. Рассмотрим только один способ: выделение отраженной волны и использование данных измерений перемещений в два момента времени. Могут быть и другие способы выделения отраженных волн. Если обозначить через  $(w_r)_1$  и  $(w_r)_2$  замеренные значения перемещения в отраженной волне в точке  $\xi = 0$  в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в пределах полупериода колебания, причем, для простоты принять  $\tau_1 = 0, \tau_2 = \pi/2$ , то из (10) последует система уравнений:

$$\begin{aligned} (w_r)_1 &= A_r + C_r e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1}, \\ (w_r)_2 &= B_r + D_r e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Например, решение прямой задачи для вышеприведенных данных и  $\xi_c = 2\pi/3, m_l = 100$  кг/м дает, что  $(w_r)_1 = 0.0268385071, (w_r)_2 = -0.009193060821$ .

Параметры  $\xi_c, m_l$  определяются из (12) при заданных значениях  $(w_r)_1, (w_r)_2$ . Система (12) может быть решена численно. Например, для  $(w_r)_1 = 0.0268, (w_r)_2 = -0.0091$  решение системы уравнений дает, что  $\xi_c = 2.096; m_l = 99.805$ .

На рис. 5 приводятся зависимости начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) и ее интенсивности  $m_l$  (б) от  $(w_r)_1$  для различных значений  $(w_r)_2$ . Вычисления показывают, что по двум замеренным значениям  $(w_r)_1, (w_r)_2$  определяются начальная координата распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивность  $m_l$ .

Возможно использование и других измерений параметров падающей, отраженной от воздушной

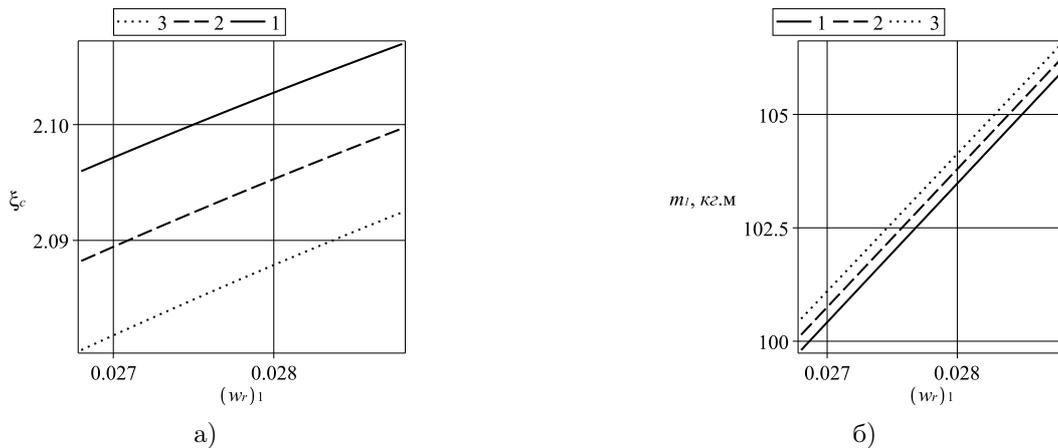


Рис. 5. Зависимости начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) и интенсивности распределенной массы  $m_l$  (б) от  $(w_r)_1$  для различных значений  $(w_r)_2$ :  $-0.0091$  (1);  $-0.0095$  (2);  $-0.0099$  (3)

полости волн и проходящей волны.

Анализ отраженных волн в стержне позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и сдвиг фазы зависят от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивности  $m_l$ . Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивности  $m_l$ .

Полученная методика может использоваться при разработке системы диагностирования длинных трубопроводных систем.

### Список литературы

- [1] Сидоров Б.В., Мартынов С.А. Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. С. 18–19.
- [2] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 3. С. 37–42.
- [3] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. № 5. С. 29–35.
- [4] Timoshenko S., Young D.H., Weaver. W. Vibration problems in engineering. John Wiley & Sons. 1974. 472 p. (Русск. пер. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.)
- [5] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Отражение продольной волны от надреза в стержне, погруженном в вязкую жидкость // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 3. С. 58–67.

# Математическая модель динамики неньютоновской аномально термовязкой жидкости в круглой трубе<sup>1</sup>

Хизбуллина С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

На основе уравнений динамики сплошной среды разработана математическая модель эволюции течения несжимаемой жидкости в круглой трубе с учетом неньютоновских свойств жидкости и немонотонной зависимости вязкости от температуры. Качественная картина движения подобна картине движения ньютоновской аномально термовязкой жидкости. Существование аномалии вязкости приводит к уменьшению гидравлического сопротивления потока.

## 1. Введение

Высокие темпы развития химической и перерабатывающей отраслей промышленности открывают широкие перспективы использования аномально термовязких жидкостей, существенно отличающихся по своим физическим свойствам от обычных ньютоновских жидкостей и проявляющие ярко выраженную зависимость своих теплофизических и физико-химических параметров от температуры. Знание закономерностей течения рабочих сред с переменными параметрами, обеспечивающих контроль за качественными показателями, — важное условие создания эффективных технологий.

При решении классических задач гидродинамики физические параметры, такие как вязкость, теплоемкость и теплопроводность, как правило, считаются постоянными. Но в реальных физических системах процессы переноса в жидкостях зависят от изменения упомянутых параметров от температуры. Одним из определяющих параметров при течении жидкостей, представляющих собой растворы или расплавы полимеров, является вязкость, которая, как оказалось, существенно влияет на структуру самого течения. Вязкость большинства жидких сред представляет собой монотонно убывающие функции температуры, и такие течения уже достаточно хорошо изучены (например, [1]). Но в природе встречаются вещества, в которых в определенном диапазоне температур могут проис-

ходить процессы полимеризации и деполимеризации молекул, а вязкость в этом случае имеет немонотонную зависимость от температуры. Под аномально термовязкой жидкостью понимается жидкость, у которой вязкость немонотонно зависит от температуры. Учет эффектов течения жидкостей, обусловленных зависимостью вязкости от температуры, представляет сложную задачу, сопряженную с необходимостью применения современных вычислительных средств и методов математического моделирования.

Ранее, в работах [2–4] были проведены численные исследования течения аномально термовязких жидкостей в плоском канале и цилиндрической трубе с неоднородным температурным полем. В них были установлены основные закономерности течения, связанные с влиянием распределения полей температуры и вязкости на гидродинамические параметры потока.

Цель данной работы состоит в создании математической модели динамики неньютоновской жидкости, реологические свойства которой описываются степенным законом Оствальда де Вилла в предположении, что вязкость жидкости зависит от температуры немонотонным образом.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим неизотермическое течение жидкости в круглой трубе диаметром  $D$  и длиной  $L$  с осевой симметрией, возникающее под действием постоянного перепада давления  $\Delta p$ . В начальный момент времени жидкость в трубе покоится и имеет температуру, равную температуре стенке канала  $T_w$ . Температура втекающей в канал жидкости постоянна

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фонда фундаментальных исследований ОЭ–13 ОЭМПУ РАН «Вихри и волны в сложных средах» и Программы поддержки молодых ученых Президиума РАН

и равна  $T_{in}$ . Будем считать, что массовые силы отсутствуют, а теплофизические константы жидкости не зависят от температуры.

Основными уравнениями, описывающими неизотермическое течение неньютоновской аномально термовязкой жидкости, являются уравнения количества движения, уравнение сохранения массы, уравнение сохранения энергии и уравнения, связывающие девиаторы напряжений и скоростей деформаций:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}, \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \kappa \Delta T + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\tau}}, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{u} = (u, w)$  — вектор скорости жидкости;  $p$  — давление жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $T$  — температура жидкости;  $\underline{\underline{\tau}}$  — девиатор напряжения;  $c_p$  — теплоемкость жидкости при постоянном давлении;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $\underline{\underline{D}}$  — тензор скоростей деформации.

Реологические свойства жидкости описываются обобщенным степенным законом Оствальда де Вилла [5], а также учитывают немонотонную зависимость вязкости от температуры в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2B(I_2, T) \dot{e}_{ij}, \\ B(I_2, T) &= \mu_{min} \left[ 1 + A_1 e^{-A_2(T-T_*)^2} \right] (I_2)^{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $B$  — эффективная вязкость;  $\tau_{ij}$  — компоненты девиатора тензора напряжений;  $\dot{e}_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $I_2$  — второй инвариант тензора скоростей деформации;  $n$  — индекс течения (показатель нелинейности);  $A_1 = (\mu_{max}/\mu_{min} - 1)$  — параметр аномалии вязкости, характеризующий отношение максимального и минимального значений вязкости в диапазоне температур  $(T_w, T_{in})$ ;  $A_2 > 0$  — параметр аномалии вязкости, характеризующий степень заполненности данного температурного диапазона аномалией вязкости (его увеличение свидетельствует о сужении диапазона температур, на котором происходит немонотонное изменение вязкости);  $T_* = 0.5(T_{in} + T_w)$  — температура, при которой жидкость имеет максимальную вязкость.

Уравнение (2) описывает поведение как псевдопластичных ( $n < 1$ ), так и дилатантных ( $n > 1$ ) жидкостей. При  $n = 1$  и  $A_1 = 0$  имеем обычную ньютоновскую жидкость с постоянным коэффициентом динамической вязкости.

Для удобства последующего численного решения проведем обезразмеривание системы уравнений (1)–(2):

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r}{D}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tu_0}{L}, \quad \varepsilon = \frac{D}{L}, \\ \tilde{u} &= \frac{u}{\varepsilon u_0}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{u_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}, \\ \tilde{T} &= \frac{T - T_{min}}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_{max} - T_{min}, \\ \text{Re} &= \frac{\rho D^n u_0^{2-n} \varepsilon^{1-n}}{\mu_{min}}, \quad \text{Pe} = \frac{\rho c_p u_0 D}{\kappa}, \\ \text{Ec} &= \frac{u_0^2}{c_p \Delta T}, \quad u_0 = \frac{nD}{2(n+1)} \left( \frac{D \Delta p}{4L \mu_{min}} \right)^{1/n}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу осесимметричности постановки задачи удобно использовать цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , начало которой лежит в центре входного сечения трубы, ось  $z$  совпадает с осью трубы, ось  $r$  направлена от оси трубы к стенке. С учетом (3) выпишем систему уравнений (1)–(2) в безразмерном виде и для облегчения записи опустим значки тильда над безразмерными переменными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r u^2 - \frac{2r B_0}{\varepsilon \text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2B_0}{\varepsilon \text{Re}} \frac{u}{r^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( w u - \frac{B_0}{\text{Re}} \left[ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial p}{\partial r}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r u w - \frac{r B_0}{\text{Re}} \left[ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( w^2 - \frac{2B_0 \varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r u T - \frac{r}{\varepsilon \text{Pe}} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( w T - \frac{\varepsilon}{\text{Pe}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\varepsilon \text{Ec}}{\text{Re}} B_0 T_2^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $B_0 = \left[ 1 + A_1 e^{-A_2(\Delta T)^2(T-0.5)^2} \right] (I_2)^{n-1}$ ,

$$I_2 = \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Начальные и граничные условия для скорости, давления и температуры в безразмерном виде запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad \vec{u} = 0, \quad p = 0, \quad T = 0, \\ z = 0 : \quad p = \frac{\Delta p}{\rho u_0^2}, \quad T = 1, \\ z = 1 : \quad p = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ r = 0.5 : \quad \vec{u} = 0, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

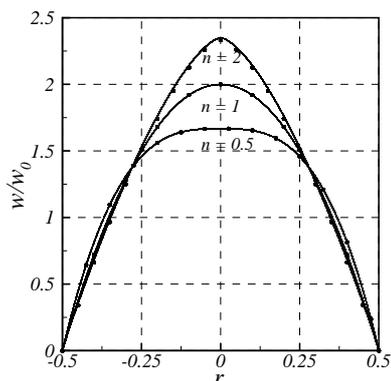


Рис. 1. Характерные профили осевой скорости неньютоновских жидкостей при течении в круглой трубе для численного (точками) и аналитического (сплошная линия) решений

Уравнения (4)–(6), дополненные начальными и граничными условиями (7), полностью описывают течение неньютоновской аномально термовязкой жидкости в круглой трубе. Построенная математическая модель может использоваться как для псевдопластичных, так и дилатантных жидкостей.

### 3. Результаты моделирования

Численное интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений (4)–(6) выполнялось с помощью метода контрольного объема с использованием алгоритма Simple [6], модифицированного для учета переменного коэффициента вязкости. Для решения полученных систем алгебраических уравнений использовался метод переменных направлений. В качестве тестовой задачи рассматривалось стационарное течение степенной жидкости с постоянным коэффициентом вязкости в круглой трубе. В этом случае задача имеет аналитическое решение, и осевая скорость определяется по формуле:

$$w(r) = \frac{nR}{n+1} \left( \frac{R\Delta p}{2L\mu_{min}} \right)^{1/n} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right], \quad (8)$$

где  $R = D/2$  — радиус трубы. Для ньютоновской жидкости  $n = 1$ ,  $B = \mu$ , и уравнение превращается в известную формулу Пуизейля [7].

На рис. 1 приведены типичные профили осевой скорости при течении неньютоновской жидкости в круглой трубе при различных значениях индекса течения  $n$ . Точками показано численное решение системы (1)–(2), а сплошной линией — аналитическое решение, определяемое по формуле (8).

Проведенные численные исследования течения неньютоновской аномально термовязкой жидкости

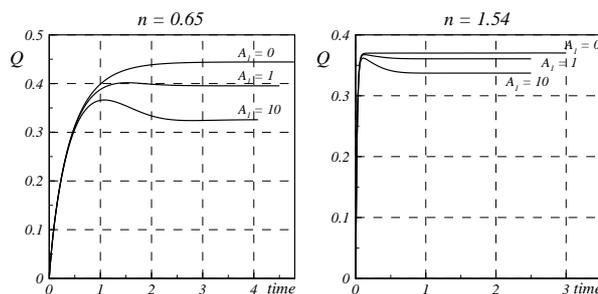


Рис. 2. Зависимость расхода от времени для различных значений параметра аномалии  $A_1$

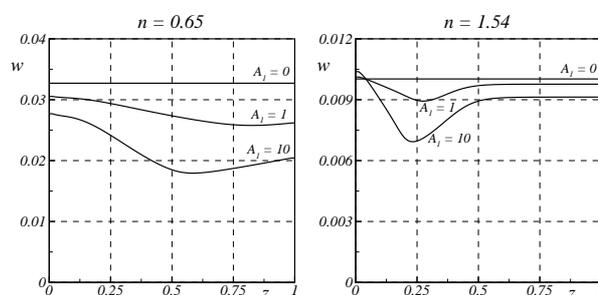


Рис. 3. Распределение значений осевой скорости вдоль оси трубы для различных значений параметра аномалии  $A_1$

в круглой трубе с осевой симметрией показали, что распределения полей физических величин (вязкости, температуры, компонент вектора скорости и давления) имеют структуру аналогичную течению ньютоновской аномально термовязкой жидкости. Как и ранее [2–4], оказалось, что процесс втекания аномально термовязкой жидкости сопровождается образованием термовязкой структуры — «вязкого барьера», создающего значительное гидравлическое сопротивление потоку. Развитие течения до его установления приводит к существенному вытягиванию вязкого барьера по потоку и возникновению кольцевых пристеночных областей изменения вязкости, отражающих зависимость динамической вязкости от температуры.

Рассмотрим, как изменяются значения расхода, осевой скорости, температуры и вязкости вдоль оси трубы при течении псевдопластичной ( $n = 0.65$ ) и дилатантной ( $n = 1.54$ ) жидкостей для различных значений амплитудного значения вязкости  $A_1$  (рис. 2–4). Для наглядности на рисунках приведены кривые для жидкости с постоянной вязкостью, характеризуемой значением параметра аномалии  $A_1 = 0$ . Значение параметра аномалии  $A_2$  полагалось равным 0.01.

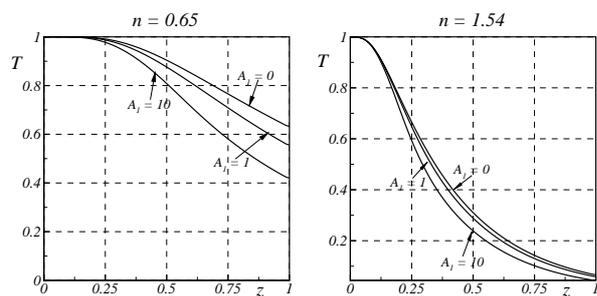


Рис. 4. Распределение значений температуры вдоль оси трубы для различных значений параметра аномалии  $A_1$

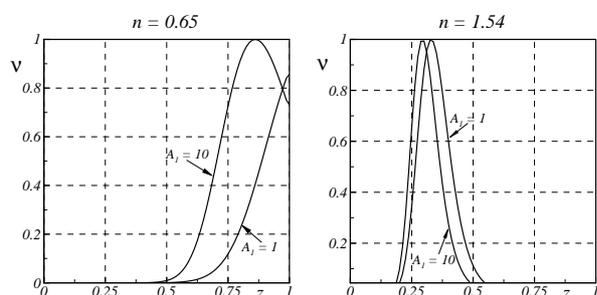


Рис. 5. Распределение значений вязкости вдоль оси трубы для различных значений параметра аномалии  $A_1$

На основании численных расчетов было установлено, что величина расхода существенно образом зависит от параметра аномалии  $A_1$ . При этом увеличение максимального значения вязкости, характеризуемого параметром  $A_1$ , способствует уменьшению расхода (рис. 2).

Интересным представляется тот факт, что с увеличением параметра аномалии  $A_1$  разница между максимальным и минимальным значениями осе-

вой скорости начинает расти (рис. 3). Несмотря на то, что теплоемкость и теплопроводность рассматриваемой жидкости не зависят от температуры, распределение температуры вдоль оси трубы зависит от амплитуды вязкости (рис. 4). С увеличением аномалии вязкости  $A_1$  зона аномально высоких значений вязкости располагается ближе ко входу в трубу (рис. 5), что связано с уменьшением расхода жидкости, а именно с замедлением течения. В связи с чем с возрастанием параметра  $A_1$  жидкость охлаждается больше.

### Список литературы

- [1] Аристов С.Н. Стационарное течение жидкости с переменной вязкостью // Доклады академии наук. 1998. Т. 359, № 5. С. 625–628.
- [2] Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.
- [3] Хизбуллина С.Ф. Численное исследование течения жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры // Вестник Башкирского университета. 2006. № 2. С. 22–25.
- [4] Хизбуллина С.Ф., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф., Кутуков С.Е. Моделирование течения реологически сложной нефти на начальном участке «горячего» трубопровода // Нефтегазовое дело. 2006. № 4. С. 259–262.
- [5] Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М.: «Химия», 1977. 439 с.
- [6] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
- [7] Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964. 216 с.

# Выпрямляющийся разлет газа из вихря<sup>1</sup>

Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН

В работе рассмотрена одна подмодель движения газа с линейным полем скоростей. Ее образует система нелинейных дифференциальных уравнений с начальными данными. Найдено несколько первых интегралов такой системы. Для специальных начальных данных задачи найдено приближенное решение дифференциальных уравнений подмодели. Такому решению соответствуют мировые линии, описывающие выпрямляющийся разлет частиц газа из вихря. Построены траектории движения частиц газа.

## 1. Введение

Решение в виде линейного поля скоростей является фундаментальным для любых уравнений механики сплошной среды. Такие модели в газовой динамике были получены еще Дирихле и Риманом [1,2] при изучении динамики эллипсоидальных фигур идеальной несжимаемой жидкости. Для политропного газа такая модель в лагранжевых переменных получена Овсянниковым Л.В. [3], Дайсоном [4]. В этом случае найдены некоторые интегралы полученной системы. Лаврентьевой О.В. в работе [5], была рассмотрена математическая модель движения несжимаемого жидкого эллипсоида со свободной границей, в которой скорости частиц жидкости являются линейными функциями координат, изучено качественное поведение решения такой модели при больших временах. Пухначевым В.В. в [6] рассмотрено плоское движение идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей. Получено решение, описывающее вращение жидкого круга вокруг центра с постоянной угловой скоростью.

В данной статье будет рассмотрена модель движения газа с линейным полем скоростей, одна из перечисленных в [7], а именно ПОДМОДЕЛЬ 1. Найдено приближенное решение подмодели. В результате построены мировые линии частиц газа для данного решения, описывающие выпрямляющийся разлет частиц газа из вихря.

## 2. Уравнения ПОДМОДЕЛИ 1

В ПОДМОДЕЛИ 1 для решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad (1)$$

где  $A = \|a_{ij}(t)\|$  — матрица;  $\vec{u}_0(t) = \|u_{01}, u_{02}, u_{03}\|^T$ ,  $\vec{x} = \|x^1, x^2, x^3\|^T$  — векторы, введены дополнительные переменные по формулам

$$B = A' + A^2, \quad \vec{v} = \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0, \quad \tau' = \tau \text{tr} A, \quad (2)$$

а уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h(S) \pm \frac{a_0}{2} \ln \rho, \quad (3)$$

где  $\gamma, a_0$  — постоянные;  $h(S)$  — функция энтропии  $S$ . Плотность и давление задаются формулами:

$$\rho = \frac{a_0 + \tau^{-\gamma}}{\vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{\xi} \cdot \vec{x} + \phi(t)},$$

$$p = -\frac{a_0 + \tau^{-\gamma}}{2} \ln |\vec{x} \cdot S\vec{x}| -$$

$$-\omega^1(a_0 + \tau^{-\gamma}) \int \frac{dI}{|P(t, I)|} + p_0(t), \quad (4)$$

$$p'_0 + (\ln \tau)' \gamma p_0 = (\ln \tau)' \gamma a_0 \ln(a_0 + \tau^{-\gamma}),$$

$$P(t, I) = I^2 s_{33} + 2I s_{23} + s_{22}, \quad I = \alpha \beta^{-1},$$

$$\alpha = x^2 - x^1 \omega^2 (\omega^1)^{-1}, \quad \beta = x^3 - x^1 \omega^3 (\omega^1)^{-1},$$

так что энтропия определяется из (3),  $S = \|s_{ij}\|$  — симметричная часть матрицы  $B$ . Вектор  $\vec{\xi}(t)$  определяется из равенства:

$$\Delta \vec{\xi}(t) = (s_{33}s_{22} - s_{23}^2)\vec{v} - \omega^1(v^2\vec{s}_3 - v^3\vec{s}_2),$$

$$\Delta = (\omega^1)^2 + s_{33}s_{22} - s_{23}^2 \neq 0, \quad s_{33}s_{22} - s_{23}^2 \neq 0, \quad (5)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0042.

где  $\vec{s}_i$  — столбец матрицы  $S$ ;  $v^j$  — координата вектора  $\vec{v}$ ;  $\omega^k$  — координата вектора  $\vec{\omega}$ , который задает антисимметричную часть матрицы  $B$ :

$$E \langle \vec{\omega} \rangle = \begin{vmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \omega^1 \neq 0,$$

то есть

$$B = S + E \langle \vec{\omega} \rangle. \quad (6)$$

Функция  $\phi(t)$  определена соотношением

$$\Delta\phi(t) = (v^3)^2 s_{22} + (v^2)^2 s_{33} + 2v^2 v^3 s_{23}. \quad (7)$$

После подстановки решений (1), (3), (4) в уравнения газовой динамики и учитывая равенства (2), (5), (7), получены дифференциальные уравнения для определения матрицы  $S$  векторов  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{v}$  [7]:

$$\begin{aligned} S' + SA + A^T S &= (1 - \gamma + c_0(t)) (\ln \tau)' S, \\ \vec{\omega}' &= A\vec{\omega} - \gamma (\ln \tau)' \vec{\omega}, \\ \vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 &= \\ &= \left( (1 - \gamma)\vec{v} + c_0(t)\vec{\xi} \right) (\ln \tau)', \\ c_0(t) &= \gamma \tau^\gamma (a_0 \tau^\gamma + 1)^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

и дополнительные соотношения

$$S\vec{\omega} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (9)$$

которые выполняются в силу уравнений подмодели, если выполняются в начальный момент времени.

Таким образом, ПОДМОДЕЛЬ 1 состоит из 6-ти нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения 6-ти неизвестных. Функции плотности, давления и уравнение состояния заданы. Подмодель вполне определена.

Дифференциальные уравнения для матрицы  $A$ , функции  $\tau$  из (2) и уравнения (8) для матрицы  $S$  и вектора  $\vec{\omega}$  назовем *основными*, так как они независимы от уравнений для векторов  $\vec{u}_0$  и  $\vec{v}$ . Введем начальные данные для основных уравнений при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} S(0) = S_0 &= \|s_{ij}^0\|, \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0 = \|\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}\|^T, \\ \tau(0) &= 1. \end{aligned}$$

Для матрицы  $A$  будет справедливо разложение  $A = S_A + E \langle \vec{\omega}_A \rangle$ ,  $S_A = S_A^T = \|s_{ij}^A\|$ ,  $\vec{\omega}_A = \|\omega_A^1, \omega_A^2, \omega_A^3\|^T$ . Тогда начальные данные для  $A$  имеют вид:

$$\begin{aligned} S_A(0) = S_1 &= \|s_{ij}^1\|, \quad \vec{\omega}_A(0) = \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}\|^T \\ A(0) &= S_1 + E \langle \vec{\omega}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Основные уравнения образуют нелинейную систему 19-го порядка с 18-ю параметрами для начальных данных.

### 3. Интегралы

Матричным уравнением (2) действуем на вектор  $\vec{\omega}$ , учитывая (9), (6), получим равенство

$$A'\vec{\omega} + A^2\vec{\omega} = 0.$$

Из уравнения (8) выразим  $A\vec{\omega}$  и подставим в последнее равенство. Получим линейное однородное дифференциальное уравнение для вектора  $A\vec{\omega}$ , решение которого имеет вид:

$$A\vec{\omega} = \vec{\sigma}_1 \tau^{-\gamma}, \quad (10)$$

где  $\vec{\sigma}_1 = S_0\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0$ . Интеграл (10) позволяет найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (8) в виде:

$$\vec{\omega} = (\vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_2) \tau^{-\gamma}, \quad (11)$$

где  $\vec{\sigma}_2 = \vec{\omega}_0$ . Учитывая (11), интеграл (10) можно переписать в виде линейного интеграла:

$$A(\vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_2) = \vec{\sigma}_1. \quad (12)$$

Начальные данные задачи при  $t = 0$  должны удовлетворять для ПОДМОДЕЛИ 1 дополнительному соотношению:

$$S_0\vec{\omega}_0 = 0. \quad (13)$$

### 4. Преобразования эквивалентности

Основные уравнения допускают некоторые преобразования эквивалентности, сохраняющие структуру уравнений, но меняющие начальные данные. Воспользуемся этим фактом для сокращения числа параметров задачи с начальными данными.

Основные уравнения допускают преобразование сдвига  $t \rightarrow t + t_0$ . Тогда в интеграле (12), за счет выбора  $t_0$ , можно добиться того, чтобы  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 0$  и получить дополнительное уравнение связи начальных данных:

$$\vec{\omega}_0 \cdot S_1 \vec{\omega}_0 = 0. \quad (14)$$

Основные уравнения, интеграл (12) допускают поворот, осуществляемый постоянной ортогональной матрицей  $O$ :  $A \rightarrow O^T A O$  ( $\vec{\omega}_A \rightarrow O^T \vec{\omega}_A$ ,  $S_A \rightarrow O^T S_A O$ ),  $S \rightarrow O^T S O$ ,  $\vec{\omega} \rightarrow O^T \vec{\omega}$ . За счет выбора матрицы  $O$  векторы  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\omega}_A$  в начальный момент времени повернем в положение:

$$\vec{\omega}_0 = \|\omega_0, 0, 0\|^T, \quad \omega_0 \neq 0, \quad \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, \omega_{12}, 0\|^T. \quad (15)$$

Тогда из уравнений связи начальных данных (13), (14) получим:  $s_{11}^0 = s_{12}^0 = s_{13}^0 = 0$ ,  $s_{11}^1 = 0$ .

Основные уравнения, интеграл (12) допускают преобразование растяжения:  $t \rightarrow \delta^{-1} t$ ,  $A \rightarrow \delta A$ ,

$S \rightarrow \delta^2 S$ ,  $\vec{\omega} \rightarrow \delta^2 \vec{\omega}$ . За счет выбора параметра растяжения  $\delta$ , величину  $\omega_0$  из (15) можно сделать  $\pm 1$ .

Других линейных преобразований эквивалентности нет.

Интегралы (11) и (12):

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 \tau^{-\gamma}, \quad \omega_2 = \omega_0 t s_{12}^1 \tau^{-\gamma}, \\ \omega_3 &= \omega_0 t (s_{13}^1 - \omega_{12}) \tau^{-\gamma}, \\ a_{11} + a_{12} t s_{12}^1 + a_{13} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= 0, \\ a_{21} + a_{22} t s_{12}^1 + a_{23} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= s_{12}^1, \\ a_{31} + a_{32} t s_{12}^1 + a_{33} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= s_{13}^1 - \omega_{12},\end{aligned}$$

понижают порядок основной системы. Преобразования эквивалентности уменьшили количество параметров начальной задачи с 15 до 10 существенных параметров. Учитывая найденные интегралы, решение основных уравнений сводится к решению системы:

$$\begin{aligned}\vec{a}'_3 + \vec{a}_3 (a_{33} - a_{13} t (s_{13}^1 - \omega_{12})) + \\ + \vec{a}_2 (a_{23} - a_{13} t s_{12}^1) = \vec{s}_3 + \vec{\omega} \times \vec{k} - \\ - a_{13} (\vec{\omega}_1 \times \vec{i} + \vec{s}_1^1), \quad \tau' = \tau \operatorname{tr} A, \\ \vec{a}'_2 + \vec{a}_2 (a_{22} - a_{12} t s_{12}^1) + \\ + \vec{a}_3 (a_{32} - a_{12} t (s_{13} - \omega_{12})) = \vec{s}_2 + \vec{\omega} \times \vec{j} - \\ - a_{12} (\vec{\omega}_1 \times \vec{i} + \vec{s}_1^1), \quad s'_{ij} + \vec{s}_j \cdot \vec{a}_i + \\ + \vec{s}_i \cdot \vec{a}_j = f(\tau) (\ln \tau)' s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{16}$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – декартов базис;  $f(\tau) = 1 - \gamma + \gamma \tau^\gamma (a_0 \tau^\gamma + 1)^{-1}$ ,  $A = \|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\|$ .

Начальные данные:

$$\begin{aligned}A(0) &= \begin{pmatrix} 0 & s_{12}^1 & s_{13}^1 + \omega_{12} \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & s_{23}^1 - \omega_{11} \\ s_{13}^1 - \omega_{12} & s_{23}^1 + \omega_{11} & s_{33}^1 \end{pmatrix}, \\ S_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^0 & s_{23}^0 \\ 0 & s_{23}^0 & s_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad \tau(0) = 1.\end{aligned}$$

Интегралов системы (16), кроме (11), (12) больше не обнаружено, поэтому решить аналитически систему (16) с произвольными существенными параметрами не представляется возможным. Рассмотрим систему (16) при специальных значениях начальных данных.

## 5. Плоская модель

Система (16) записана для матриц  $A$  и  $S$  третьего порядка. Для специальных начальных данных система (16) имеет дополнительные интегралы.

*Определение.* Если матрицы  $A$  и  $S$  имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{pmatrix},$$

то будем говорить, что они задают плоский (двумерный) случай системы (16).

*Теорема.* Если начальные данные для матрицы  $A$  выбрать в виде

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^1 & s_{23}^1 \\ 0 & s_{23}^1 & s_{33}^1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, 0, 0\|^T, \quad \omega_{11} \neq 0,$$

то система (16) сведется к плоскому случаю.

Перепишем систему (16) для плоского случая с учетом разложения матрицы  $A = S_A + E < \vec{\omega}_A >$ :

$$\begin{aligned}\omega'_A + \omega_A (\ln \tau)' &= \omega_0 \tau^{-\gamma}, \\ (s_{22}^A)' + (s_{22}^A)^2 + (s_{23}^A)^2 - (\omega_A)^2 &= s_{22}, \\ (s_{23}^A)' + s_{23}^A (\ln \tau)' &= s_{23}, \\ (s_{33}^A)' + (s_{33}^A)^2 + (s_{23}^A)^2 - (\omega_A)^2 &= s_{33}, \\ s'_{22} + 2(s_{22} s_{22}^A + s_{23} s_{23}^A + s_{23} \omega_A) &= \\ = f(\tau) (\ln \tau)' s_{22}, \\ s'_{23} + s_{23} (\ln \tau)' + s_{23}^A (s_{22} + s_{33}) + \omega_A (s_{33} - \\ - s_{22}) &= f(\tau) (\ln \tau)' s_{23}, \quad (\ln \tau)' = s_{22}^A + s_{33}^A, \\ s'_{33} + 2(s_{23} s_{23}^A + s_{33} s_{33}^A - s_{23} \omega_A) &= \\ = f(\tau) (\ln \tau)' s_{33},\end{aligned}\tag{17}$$

с начальными данными:

$$\begin{aligned}\omega_A(0) &= \omega_{11}, \quad s_{22}^A(0) = s_{22}^0, \quad s_{33}^A(0) = s_{33}^0, \quad s_{23}^A(0) = s_{23}^0, \\ s_{22}(0) &= s_{22}^1, \quad s_{23}(0) = s_{23}^1, \quad s_{33}(0) = s_{33}^1, \quad \tau(0) = 1.\end{aligned}$$

От переменных  $\omega_A, s_{22}^A, s_{23}^A, s_{33}^A, s_{22}, s_{23}, s_{33}, \tau$  системы (17) перейдем к переменным  $\omega_A, s_{23}^A, s_{23}, \operatorname{tr} S_A, \tau, \operatorname{tr} S, |S|, |S_A|$ , где  $|S|$  – определитель матрицы  $S$ :

$$\begin{aligned}(\tau \omega_A)' &= \omega_0 \tau^{1-\gamma}, \quad (s_{23}^A \tau)' = s_{23} \tau, \\ s'_{23} + s_{23}^A \operatorname{tr} S - \omega_A (s_{22} - s_{33}) &= \\ = (f(\tau) - 1) (\ln \tau)' s_{23}, \\ \tau'' \tau^{-1} &= \operatorname{tr} S + 2|S_A| + 2\omega_A^2, \\ (\tau |S_A|)' &= \omega_A^2 \tau' + \tau (G - 2s_{23}^A s_{23}), \\ \tau' &= \tau \operatorname{tr} S_A \\ |S|' \tau &= 2|S| \tau' (f(\tau) - 1), \\ (\operatorname{tr} S)' &= f(\tau) \operatorname{tr} S \tau' \tau^{-1} - 2(F + 2s_{23}^A s_{23}),\end{aligned}\tag{18}$$

где  $G = s_{33}^A s_{22} + s_{22}^A s_{33}$ ,  $F = s_{22} s_{22}^A + s_{33} s_{33}^A$ ,  $s_{33} =$

$\text{tr}S - s_{22}$ ,

$$s_{22} = \frac{1}{2}\text{tr}S + \sqrt{\frac{1}{4}(\text{tr}S)^2 - s_{23}^2 - |S|},$$

$$s_{33}^A = \text{tr}S_A - s_{22}^A, \tag{19}$$

$$s_{22}^A = \frac{1}{2}\text{tr}S_A \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\text{tr}S_A)^2 - (s_{23}^A)^2 - |S_A|}.$$

Система (18) имеет интеграл

$$|S| = \frac{|S_0|(a_0\tau^\gamma + 1)^{2/a_0}}{(a_0 + 1)^{2/a_0}\tau^{2\gamma}}, \quad |S_0| = s_{22}^0 s_{33}^0 - (s_{23}^0)^2.$$

В (18) явно не входит переменная  $t$ , поэтому сделаем замену

$$\tau' = \lambda(\tau) \neq 0,$$

где  $\lambda$  — некоторая функция от переменной  $\tau$ . Тогда  $dt = \lambda^{-1}d\tau$ . Таким образом, порядок системы (18) понижен на 2 единицы:

$$(\tau\omega_A)_\tau = \omega_0\tau^{1-\gamma}\lambda^{-1}, \quad (\tau s_{23}^A)_\tau = s_{23}\tau\lambda^{-1},$$

$$\lambda(s_{23})_\tau + s_{23}^A\text{tr}S - \omega_A(s_{22} - s_{33}) =$$

$$(f(\tau) - 1)\lambda\tau^{-1}s_{23}, \tag{20}$$

$$\lambda\lambda_\tau\tau^{-1} = \text{tr}S + 2|S_A| + 2\omega_A^2,$$

$$(\tau|S_A|)_\tau = \omega_A^2 + \tau\lambda^{-1}(G - 2s_{23}^A s_{23}),$$

$$\tau(\text{tr}S)_\tau = f(\tau)\text{tr}S - 2\tau\lambda^{-1}(F + 2s_{23}^A s_{23}).$$

### 6. Частное решение плоской модели

Пусть в (20)  $s_{23}^A = 0$ . Тогда она имеет еще один интеграл. Из 2-го и 3-го уравнений системы следует  $s_{23} = 0$ ,  $s_{22} = s_{33}$ ,  $\omega_A \neq 0$ ,  $F = G = s_{22}\lambda\tau^{-1}$ . Тогда 6-ое уравнение интегрируется:

$$s_{22} = \frac{s_{22}^0(a_0\tau^\gamma + 1)^{1/a_0}}{(a_0 + 1)^{1/a_0}\tau^\gamma}.$$

Система (20) принимает вид:

$$(\tau\omega_A)_\tau = \omega_0\tau^{1-\gamma}\lambda^{-1},$$

$$\lambda\lambda_\tau = 2(s_{22} + |S_A| + \omega_A^2)\tau, \tag{21}$$

$$(\tau|S_A|)_\tau = \omega_A^2 + s_{22}.$$

Система (21) имеет интеграл:

$$\lambda^2 = 4\tau^2|S_A| + k, \quad k = (s_{22}^1 - s_{33}^1)^2. \tag{22}$$

Отсюда определяется  $|S_A|$ . Уравнения (21) свелись к двум уравнениям:

$$\lambda c_\tau = \omega_0\tau^{1-\gamma}, \quad 2\tau\lambda\lambda_\tau = \lambda^2 - k + 4c^2 +$$

$$+ N_0(a_0\tau^\gamma + 1)^{1/a_0}\tau^{2-\gamma}, \tag{23}$$

$$c = \tau\omega_A, \quad N_0 = 4s_{22}^0(a_0 + 1)^{-1/a_0}$$

с начальными данными

$$c(1) = \omega_{11}, \quad \lambda(1) = s_{22}^1 + s_{33}^1. \tag{24}$$

Найдем приближенные решения уравнений (23).

### 7. Приближенные решения

Первое уравнение (23) допускает растяжение  $\tau = T\tau_1$ ,  $c = T^{1-\gamma/2}c_1$ ,  $\lambda = T^{1-\gamma/2}\lambda_1$ . Применяя растяжение ко второму уравнению (23), получим

$$2\tau_1\lambda_1(\lambda_1)_{\tau_1} = \lambda_1^2 - kT^{\gamma-2} +$$

$$+ 4c_1^2 + N_0(a_0T^\gamma\tau_1^\gamma + 1)^{1/a_0}\tau_1^{2-\gamma}.$$

Положим

$$T^2 = k, \quad T^\gamma = \varepsilon, \tag{25}$$

где  $\varepsilon, k$  — малые параметры;  $\gamma$  — фиксированная постоянная. Разложим  $\lambda_1$  и  $c_1$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ :

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_{01} + \dots, \quad c_1 = c_0 + \varepsilon c_{01} + \dots \tag{26}$$

При  $\varepsilon = 0$  получим уравнения нулевого приближения:

$$\lambda_0 c_{0\tau_1} = \omega_0\tau_1^{1-\gamma}, \quad \tau_1(\lambda_0^2)_{\tau_1} = \lambda_0^2 + 4c_0^2 + N_0\tau_1^{2-\gamma}.$$

Введем замену переменных при помощи инвариантов растяжения [8]:

$$\lambda_0 = \mu\tau_1^{1-\gamma/2}, \quad c_0 = 2^{-1}g\tau_1^{1-\gamma/2}, \quad s = \ln \tau_1, \tag{27}$$

получим автономную систему

$$g_s + g(1 - \gamma/2) = 2\omega_0\mu^{-1},$$

$$(\mu^2)_s + (1 - \gamma)\mu^2 = g^2 + N_0. \tag{28}$$

Откуда следует уравнение Абеля:

$$\frac{d\mu}{dg} = \frac{N_0 + g^2 + (\gamma - 1)\mu^2}{4\omega_0 + g\mu(\gamma - 2)}. \tag{29}$$

Уравнение (29) допускает дискретные симметрии:  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $g \rightarrow -g$ ;  $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ . Следовательно, уравнения (29) достаточно рассмотреть при  $g \geq 0$  с  $\omega_0 = +1$ . Далее рассмотрим простой случай  $\gamma = 2$ ,  $N_0 = 1$ . Уравнение (29) примет вид:

$$4\frac{d\mu}{dg} = 1 + g^2 + \mu^2. \tag{30}$$

У каждой интегральной кривой уравнения (30) существует асимптота  $g = g_0$ ,  $g_0$  — постоянная;  $\mu = F(g, g_0)$ . Выберем интегральную кривую соответствующую нулевым начальным данным  $\mu(0) = 0$ :

$$\mu = F(g).$$

Дальнейшее решение будем искать для этой кривой. При этом численные расчеты дают  $g_0 \simeq 3,65$ .

Определим начальные данные задачи (28) при  $t = 0$ . Так как функция  $\mu(\tau_1)$  есть нулевое приближение для  $\lambda(\tau_1)$ , то  $\mu(1/\sqrt{\varepsilon}) \sim s_{22}^1 + s_{33}^1 = \alpha$ , а

так как  $g(\tau_1)$  есть нулевое приближение для  $c(\tau)$ , то  $g(1/\sqrt{\varepsilon}) \sim 2\omega_{11} = \beta$  (см. (24), (26), (27)).

Определим функции  $A(\tau)$ ,  $\vec{u}_0(\tau)$ . Из первого уравнения (28) функция  $g = G(\tau)$  определяется неявно соотношением

$$\int_{g_1}^g F(g)dg = 2 \ln \frac{\tau}{\tau_1}, \quad (31)$$

$$\mu = F(G(\tau)) = M(\tau) \sim \lambda(\tau),$$

где  $g_1 = g(\tau_1)$ ,  $\tau_1 \in (\tau_0; \infty)$ .

Из (23), (26), (27) следует  $\omega_A \sim G(\tau)(2\tau)^{-1}$ .

Из (19), (22), (25) следует  $s_{22}^A = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\varepsilon})\tau^{-1}$ ,

$s_{33}^A = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\varepsilon})\tau^{-1}$ . Элементы матрицы  $A$  из (1) определены

$$-A^T = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^A & -\omega_A \\ 0 & \omega_A & s_{33}^A \end{pmatrix} = \frac{D}{2\tau}, \quad (32)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M(\tau) + \sqrt{\varepsilon} & -G(\tau) \\ 0 & G(\tau) & M(\tau) - \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Для вектора  $\vec{u}_0$  справедливо уравнение:

$$\mu \vec{u}_{0\tau\tau} + \left(\mu_\tau + \frac{\mu}{\tau}\right) \vec{u}_{0\tau} + \left(2A_\tau + \frac{1}{\tau}A\right) \vec{u}_0 = \frac{2\tau}{a_0\tau^2 + 1} \vec{\xi}, \quad (33)$$

где

$$\vec{\xi}(1 + 16(a_0\tau^2 + 1)^{-2/a_0}) = \mu \vec{u}_{0\tau} + A\vec{u}_0 - 4(a_0\tau^2 + 1)^{-1/a_0} \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \mu(\vec{u}_{02})_\tau + (A\vec{u}_0)_2 \\ -\mu(\vec{u}_{03})_\tau - (A\vec{u}_0)_3 \end{array} \right\|,$$

$$2A_\tau + \frac{1}{\tau}A = \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{2}{F(G)}H - \frac{1}{2}D \right),$$

$$H(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_g(G) & -1 \\ 0 & 1 & F_g(G) \end{pmatrix}.$$

Для приближенного решения растянем переменную  $\tau = \sqrt{\varepsilon}\tau_1$ . С точностью до  $\varepsilon$  уравнение (33) принимает вид:

$$\mu \vec{u}_{0\tau_1\tau_1} + \left(\mu_{\tau_1} + \frac{\mu}{\tau_1}\right) \vec{u}_{0\tau_1} + \left[ \frac{2H(G)}{\tau_1^2 F(G)} - \frac{D(\tau_1)}{2\tau_1^2} \right] \vec{u}_0 = 0. \quad (34)$$

Начальные данные возьмем в виде  $\vec{u}_0 = \vec{u}_{00}$ ,  $\vec{u}_{0\tau} = \vec{u}_{01}$ . Если начальные данные нулевые, то решение нулевое  $\vec{u}_0 = 0$ .

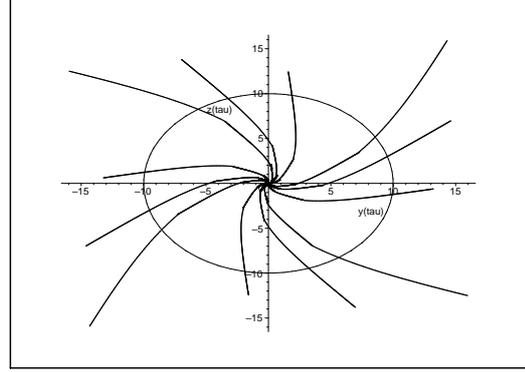


Рис. 1. Траектории частиц

## 8. Мировые линии частиц

Мировые линии задаются уравнением [9]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{u}_0,$$

где матрица  $A$  задана формулой (32), вектор  $\vec{u}_0$  задан формулой (34). Перейдем к дифференцированию по  $\tau$ :

$$M(\tau) \frac{d\vec{x}}{d\tau} \sim A\vec{x} + \vec{u}_0.$$

В координатной записи имеем:

$$M(\tau)x_\tau = u_{01},$$

$$M(\tau)y_\tau = \frac{1}{2\tau} \left( (M(\tau) + \sqrt{\varepsilon})y - G(\tau)z \right) + u_{02}, \quad (35)$$

$$M(\tau)z_\tau = \frac{1}{2\tau} \left( G(\tau)y + (M(\tau) - \sqrt{\varepsilon})z \right) + u_{03},$$

где  $M(\tau)$  и  $G(\tau)$  вычисляются по формулам (31). Решая систему (35) численно при  $\varepsilon = 0, 1$ ,  $\tau \in [0, 7; 10]$ ,  $G(1) = 1$ ,  $M(1) = 0, 3411$ , получим мировые линии. Траектории частиц изображены на рис. 1. Каждая частица газа движется по своей траектории. Частицы, находящиеся на одной траектории в начальный момент времени, движутся по ней. Скорость частицы при движении совершает поворот. Выясним, как ведут себя траектории при  $\tau \rightarrow \infty$ .

В полярных координатах  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$  при нулевых начальных условиях для уравнения (34), система (35) расщепляется:

$$2\tau r^{-1} r_\tau = 1 + \sqrt{\varepsilon} M^{-1} \cos 2\varphi, \quad (36)$$

$$2\tau M \varphi_\tau = G - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\varphi.$$

Решение по  $\varphi$  периодическое с периодом  $\pi$ . Значит, начальные данные  $\varphi(1) = \varphi_0$  достаточно брать в интервале  $\varphi_0 \in (0; \pi)$ . Начальные данные  $r(1) = r_0$  определяются произвольной постоянной  $r_0$ . При  $r_0 = 0$  имеем решение  $r = 0$ , частица стоит на месте.

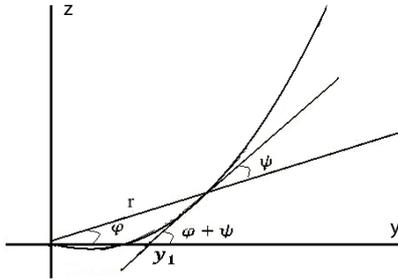


Рис. 2. Положение касательной к траектории

Приближенное решение для  $\varphi$  таково

$$\varphi = \varphi_1 + \sqrt{\varepsilon}\varphi_2 + O(\varepsilon), \tag{37}$$

с начальными данными  $\varphi_0 = \varphi_{01} + \sqrt{\varepsilon}\varphi_{02}$ , где

$$2\tau M\varphi_{1\tau} = G, \quad 2\tau M\varphi_{2\tau} = -\sin 2\varphi_1 \implies \\ \varphi_1 = \tilde{\varphi}_{01} + \int \frac{G}{2\tau M} d\tau, \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi}_{02} - \int \frac{\sin 2\varphi_1}{2\tau M} d\tau,$$

где  $\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_{02}$  — постоянные, которые согласуются с пределами интегрирования.

Приближенное решение (36) для  $r$  имеет вид

$$r = r_0\sqrt{\tau} \left( 1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int \frac{\cos 2\varphi_1}{M\tau} d\tau \right) + O(\varepsilon). \tag{38}$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  функция  $M(\tau) \sim 4\tau^{1/2}c^{-1}$ , где  $c$  — некоторая постоянная. Теперь по формулам (37) находим функцию  $\varphi$ :

$$\varphi \sim \bar{\varphi}_0 - \frac{c}{4\tau^{1/2}} (g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01}),$$

где  $\bar{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}_{01} + \sqrt{\varepsilon}\tilde{\varphi}_{02} + \frac{c}{4\tau_1^{1/2}}(g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01})$ . По формуле (38) находим функцию  $r(\tau)$ :

$$r = r_0 \left( \sqrt{\tau} - \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4} \left( \cos 2\bar{\varphi}_{01} - \frac{cg_0}{4\sqrt{\tau}} \sin 2\bar{\varphi}_{01} \right) \right) + \\ + O(\varepsilon\sqrt{\tau}) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau^{-1/2}),$$

где  $\bar{\varphi}_{01} = \tilde{\varphi}_{01} + \frac{cg_0}{4\tau_1^{1/2}}$ . Итак,  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}_0, r \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Из формул для  $\varphi(\tau)$  и  $r(\tau)$  находим выражение для  $r = r(\varphi)$ :

$$r \sim r_1(\bar{\varphi}_0 - \varphi)^{-1} + r_2 + O(\bar{\varphi}_0 - \varphi),$$

где  $r_1 = r_0k, r_2 = -r_0ck^{-1}\sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01}/16, k = c(g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01})/4 > 0$ .

Определим угол  $\psi$  между касательной к линии  $r = r(\varphi)$  в некоторой точке и радиусом вектором

этой точки при  $\tau \rightarrow \infty$ . Угол вычисляется по формуле:

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{d \ln r}{d\varphi} \sim \frac{r_1}{(\bar{\varphi}_0 - \varphi)(r_1 + r_2(\bar{\varphi}_0 - \varphi))} \rightarrow \infty \implies \\ \psi \sim \bar{\varphi}_0 - \varphi.$$

То есть, при  $\tau \rightarrow \infty$  касательная приближается к радиусу-вектору:  $\psi \rightarrow 0$ . Угол наклона касательной к оси  $y$  имеет предел:  $\varphi + \psi \rightarrow \bar{\varphi}_0$ .

Определим наличие асимптот у траектории. Для этого определим как меняется при  $r \rightarrow \infty$  значение  $y_1$  (см. рис. 2):

$$y_1 = r \cos \varphi - r \sin \varphi \operatorname{ctg}(\varphi + \psi) = r \frac{\sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)} \sim \\ \sim r_1(\bar{\varphi}_0 - \varphi)^{-1} \frac{(\bar{\varphi}_0 - \varphi)}{\sin \bar{\varphi}_0} = \frac{r_1}{\sin \bar{\varphi}_0} < \infty$$

Следовательно, у касательной есть предельное положение, то есть существует асимптота у любой траектории. Данный факт полностью согласуется с рис. 1.

## 9. Заключение

Итак, описанное в статье решение задает выпрямляющийся разлет газа из вихря.

## Список литературы

- [1] Dirichlet G.L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik // J. für die und angew. Math. 1860. Bd. 58. H4.
- [2] Риман Б. Сочинения. М.: ГИТЛ, 1948. 543 с.
- [3] Овсянников Л.В. Новое решение уравнений гидродинамики // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
- [4] Dyson J.F. Dynamics of a spinning gas cloud // J. Math. Mech. 1968. V. 18, № 1. P. 91–101.
- [5] Лаврентьева О.М. О движении жидкого эллипсоида // ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 4. С. 828–831.
- [6] Пухначев В.В. О движении жидкого эллипса // Динамика сплошной среды. Новосибирск, ИГи СО АН СССР. 1978. Вып. 33. С. 68–75.
- [7] Юлмухаметова Ю.В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 139–150.
- [8] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [9] Хабилов С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа.: Гилем, 2003. 192 с.



Научное издание

**Труды Института механики  
им. Р. Р. Мавлютова  
Уфимского научного центра РАН**

Выпуск 9  
часть II

Оригинал-макет изготовлен в ИМех УНЦ РАН

Редактор: Е. А. Налобина  
Технический редактор: К. И. Михайленко  
Компьютерная верстка и дизайн: К. И. Михайленко, Е. А. Налобина

Подписано в печать с оригинал-макета 25.09.2012  
Формат 60 × 90<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная.  
Гарнитура «Computer Modern». Печать на ризографе.  
Физ. печ. л. 18,75.  
Тираж 120 экз. Заказ № 43

Издательство «Нефтегазовое дело»  
450055, г. Уфа, пр-т Октября, 144/3, оф. 418  
Тел. (347) 284-39-49, 274-11-08

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленного электронного оригинал-макета  
в типографии ООО НПФ «Восточная печать»  
450055, г. Уфа, пр-т Октября, 144/3, оф. 418  
Тел. (347) 284-39-49, 274-11-08

e-mail: orient4@rambler.ru