РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УФИМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ

Выпуск 9

Материалы V Российской конференции с международным участием
«Многофазные системы: теория и приложения»,
посвященной 20-летию со дня основания
Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН
(Уфа, 2–5 июля 2012)

Часть I

Уфа — 2012

УДК 531/537+519.6+681
ББК 22.2
Т

Издание осуществлено
при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
грант № 12-01-06068-г

Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 9. / Материалы V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2–5 июля 2012). Часть I. — Уфа: Нефтегазовое дело, 2012. — 200 с.

ISBN

Сборник содержит материалы, представленные в рамках V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2–5 июля 2012). Сборник включает в себя доклады по различным направлениям механики многофазных систем и ее приложениям.

ISBN

БЛАГОДАРНОСТИ
Организационный комитет конференции выражает искреннюю признательность за помощь и финансовую поддержку

- Президиуму Российской академии наук
  и лично Вице-президенту РАН
  академику Валерию Васильевичу Козлову
- Отделению энергетики, машиностроения, механики
  и процессов управления РАН
- Уфимскому научному центру РАН
- Академии наук Республики Башкортостан
  и лично Президенту АН РБ Рамилю Назифовичу Бахтизину
- Руководству издательства «Нефтегазовое дело»
- Центру микро- и наномасштабной динамики дисперсных
  систем Башгосуниверситета и его руководителю
  Искандеру Шаукатовичу Ахатову

Содержание

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

К двадцатилетию со дня основания ИМех УНЦ РАН

Урманчеев С.Ф.

Институт механики создан по инициативе члена-корреспондента РАН Рыфата Рахматуллича Мавлютова — выдающегося ученого и организатора науки и высшей школы России.

Юридически Институт механики в составе Уфимского научного центра РАН организован Постановлением Президиума РАН № 208 от 23 июня 1992 года по представлению Президиума Уральского отделения РАН. Постановление было подписано Президентом Российской академии наук академиком Ю. С. Осиповым и Главным ученым секретарем РАН академиком И. М. Макаровым. В постановлении отмечалась необходимость проведения исследований в области механики, диктуемая потребностями научно-технического обеспечения экономического развития южной части Уральского региона, а также формулировались и основные направления научной деятельности Института:

- деформирование элементов конструкций из упругих и упруговязкопластических материалов при сложном нагружении;
- нестационарные процессы в гетерогенных средах с физико-химическими и структурными превращениями;
- нелинейные механические системы со многими степенями свободы и синтез многосвязных многофункциональных систем управления.

Согласно постановлению, директором-организатором Института механики был назначен член-корреспондент РАН Р. Р. Мавлютов.

В годы, предшествовавшие созданию Института механики, научные исследования в области теоретической и прикладной механики были в основном сосредоточены в Уфимском авиационном институте (УАИ) и Отделе физики и математики Башкирского научного центра Уральского Отделения РАН (ОФМ БНЦ УрО РАН). Естественно, что при создании Института научный коллектив формировался на базе профильных кафедр УАИ с привлечением сотрудников ОФМ БНЦ УрО РАН.

В историческом контексте следует отметить, что создание Института механики произошло на прочной основе научных достижений коллективов ученых, успешно работавших в тот период в г. Уфе.

До создания Института механики Р. Р. Мавлютов более тридцати лет возглавлял Уфимский авиационный институт (ныне Уфимский государственный авиационный технический университет). Ему принадлежит заслуга формирования мощного научного комплекса для проведения исследований в различных областях науки и техники на базе профилирующих кафедр высшего учебного заведения. Сам Р. Р. Мавлютов возглавлял кафедру сопротивления материалов, занимающую центральное место в любом техническом ВУЗе. Научно-исследовательская работа на кафедре складывалась в тесном сотрудничестве с И. А. Биргером — крупным уччным в области создания методов исследования напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом пластичности и ползучести. Одним из основных научных направлений кафедры стало исследование концентраций напряжений в элементах авиационных конструкций. Здесь наиболее значительный вклад при решении поставленных задач внесли Р. Р. Мавлютов, Г. Б. Иосилевич, В. С. Куликов, В. С. Жернаков, Т. Н. Мардимасова, И. В. Рокитянская. Этот коллектив был одним из первых в стране разработчиков алгоритмов решения задач механики деформируемых твердых тел, основанных на методе конечных элементов. С помощью созданного ими комплекса программ были проведены трудоемкие исследования деталей авиационных двигателей, содержащих области концентрации напряжений и деформаций. Кроме того, ими разработаны соответствующие методики для учета пластических свойств материалов и высокотемпературной ползучести.

В начале 70-х годов прошлого века в Уфимском авиационном институте по инициативе академика Б. Н. Петрова и при поддержке ректора УАИ Р. Р. Мавлютова создана Отраслевая лаборатория Министерства авиационной промышленности СССР «Системы автоматического управления газотурбинными двигателями». Научным руководителем лаборатории был назначен заведующий кафедрой «Промышленная электроника» д.т.н., профессор Ю. М. Гусев, а одним из ведущих сотрудников стал молодой к.т.н., доцент Б. Г. Ильясов, ученик и последователь Б. Н. Петрова. Творческий коллектив, созданный их усилиями, состоял не только из научных сотрудников, но также из аспирантов и студентов. Кроме того, в него входили инженеры ведущих авиационных предприятий города Уфы (НПП «Мотор», ФГУП «Молния»).

В Отделе физики и математики Башкирского филиала АН СССР (ОФМ БФ АН СССР) еще в 1975 году под руководством молодого профессора Московского университета Р. И. Нигматулина было создано научное подразделение для проведения исследований в области механики многофазных сред. Первоначально оно состояло из выпускников механико-математического факультета МГУ — Наили Ахметовой, Владислава Шагапова и Альфира Ахметова, окончившего физический факультет МГУ. Чуть позднее к ним присоединился Наиль Ахмадеев — выпускник Уфимского авиационного института.

Первые значительные успехи коллективом достигнуты при создании численной модели распространения ударных волн в твердых телах с фазовыми переходами (Н. Х. Ахмадеев, Н. А. Ахметова). С использованием оригинальной вычислительной программы впервые были теоретически установлены параметры и структура ударных волн, соответствующие данным экспериментальных измерений. Параллельно велись интенсивные исследования эволюции ударных волн в пузырьковых средах с учетом теплообменных процессов (В. Ш. Шагапов). Большое значение для нефтеперерабатывающей промышленности имело решение задачи об установлении параметров закризисного теплообмена установки замедленного коксования в производстве нефтяного кокса методами математического моделирования (В. Ш. Шагапов, Р. Г. Шагиев). Исследования позволили определить режимы функционирования трубчатых реакторов, в которых исключается коксование внутренних стенок обогреваемых каналов, приводящее к их «склерозу». За цикл исследований в области механики многофазных сред авторы этих работ — Н. Х. Ахмадеев, Н. А. Ахметова, В. Ш. Шагапов, Р. Г. Шагиев — удостоены Премии Ленинского комсомола БАССР за 1978 год. К этому времени группа, большинство членов которой уже получили степень кандидата физико-математических наук, была преобразована в лабораторию механики многофазных сред — структурное подразделение ОФМ Башкирского филиала АН СССР. Научным руководителем лаборатории стал Р. И. Нигматулин.

В последующие годы в этой лаборатории начали свою научную деятельность А. Г. Кутушев, занимавшийся численным моделированием процессов распространения ударных волн в газовзвесях и парогазокапельных средах и Н. К. Вахитова, которая под руководством В. Ш. Шагапова выполнила цикл исследований по ударным и детонационным волнам в пузырьковых системах. Р. Х. Болотнова и С. Ф. Урманчеев совместно с Н. Х. Ахмадеевым выполнили серию работ по динамическому разрушению твердых тел с учетом фазовых переходов. Несколько лет в лаборатории работал Н. А. Гумеров — выпускник мехмата МГУ, выполнивший достаточно сложные теоретические исследования закономерностей распространения акустических волн в аэрозолях и полидисперсных газовзвесях. С деятельностью лаборатории были тесно связаны ученики Р. И. Нигматулина, работавшие в Башгосуниверситете — И. Ш. Ахатов и К. М. Фҷдоров, а также А. А. Губайдуллин — из УАИ. Научные работы И. Ш. Ахатова относились к области исследования нестационарных режимов горения и детонации газовзвесей и порошков, а в дальнейшем — к изучению нелинейных волн и процессов самоорганизации в неньютоновских и пузырьковых системах. К. М. Фҷдоров на протяжении многих лет успешно занимается многофазной фильтрацией и ее приложениями в нефтегазодобывающей промышленности. А. А. Губайдуллиным разработана оригинальная математическая модель и вычислительный алгоритм для исследования волновых процессов в пузырьковых системах. В результате дано объяснение ряду физических эффектов, в частности, экспериментально обнаруженному усилению ударных волн, распространяющихся в жидкостях с пузырьками газа.

В 1980 г. по приглашению руководства Башкирского филиала АН СССР в г. Уфу приехал крупный ученый в области группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных профессор Н. Х. Ибрагимов. В соответствии с решением Отделения математики АН СССР в ОФМ им был организован отдел математической физики, куда он пригласил ученика академика Л. В. Овсянникова, доцента Уфимского авиационного института С. В. Хабирова. К тому времени С. В. Хабировым были выполнены глубокие теоретические исследования, связанные с перечислением всех подгрупп преобразований в трехмерном пространстве, вычислением их дифференциальных инвариантов. С их помощью были получены интегрируемые уравнения математической физики. Работы С. В. Хабирова имели непосредственное отношение к развитию математических методов решения задач газовой динамики.

Развитие механики как научной дисциплины в Республике Башкортостан связано, прежде всего, с задачами авиамоторостроения и нефтяной промышленности. Этим фактом и было обусловлено определение основных направлений исследований в Институте механики. Однако снижение темпов развития авиационной промышленности в стране сказалось и на уровне востребованности результатов научных исследований в этой области. С другой стороны, были интенсифицированы фундаментальные работы по созданию новых математических методов анализа моделей газовой динамики при исследовании сверхсильного сжатия вещества с перспективой получения высококонцентрированных потоков энергии. Еще одно новое направление связано с разработкой методов проектирования уникальных микроробототехнических систем. При их создании обнаружилась возможность использования новых наноструктурных материалов. Теоретические и экспериментальные исследования дисперсных систем и течений с физико-химическими превращениями позволили установить новые закономерности, имеющие полезные приложения как при разработке новых технологий увеличения нефтеотдачи, так и в медико-биологической проблематике. Оригинальные работы по динамике распределенных механических систем привели к обнаружению нового механизма возбуждения колебаний в трубопроводах. Большой успех имеют, ведущиеся в Институте, прикладные исследования такие, как разработка методов анализа дорожно-транспортных происшествий на основе современных вычислительных технологий, создание программных продуктов для определения текущих параметров мощности насосов с целью энергосбережения при перекачке углеводородного сырья.

В настоящее время в состав Института механики входят шесть научных лабораторий:

- Механика твердого тела,
  заведующий — член-корр. РАН Марат Аксанович Ильгамов;
- Робототехника и управление в технических системах,
  заведующий — д.т.н. Олег Владимирович Даринцев;
- Дифференциальные уравнения механики,
  заведующий — д.ф.-м.н. Салават Валеевич Хабиров;
- Механика многофазных систем,
  заведующий — д.ф.-м.н. Саид Фўдорович Урманчеев;
- Экспериментальная гидродинамика,
  заведующий — к.ф.-м.н. Альфир Тимирзянович Ахметов;
- Моделирование технологическими процессами,
  заведующий — к.т.н. Рашит Мирзажанович Богданов.

Научная деятельность осуществляется по направлениям, утвержденным Бюро Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления:

- механика жидкости, газа и плазмы, неидеальных и многофазных сред;
- механика горения, детонации и взрыва;
- современные проблемы акустики, в том числе фундаментальные основы акустических методов диагностики, изучение нелинейных волновых явлений;
- механика твердого тела, механика деформирования и разрушения, механика наноматериалов;
- общая теория управления сложными техническими и другими динамическими системами.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.5.031

Определение потенциала скорости жидкости со слабонесферическими пузырьками, находящимися на одной прямой [1]

Аганин А.А., Давлетшин А.И.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Исследуется работоспособность метода отражений и метода разложения по сферическим функциям при определении потенциала скорости жидкости с двумя и более слабонесферическими пузырьками. Центры пузырьков находятся на одной прямой, которая является осью симметрии задачи.

1. Введение

Интерес к изучению динамики газовых пузырьков в жидкости связан с широким использованием жидкостей в различных отраслях народного хозяйства: энергетике, химии, медицине и др. При больших концентрациях пузырьков значительную роль начинает играть их взаимодействие.

При изучении взаимодействия пузырьков в жидкости аналитико-численными методами возникает подзадача определения потенциала скорости жидкости. Обычно потенциал ищется в предположении, что пузырьки расположены относительно далеко друг от друга [1, 2]. В результате этого задача определения потенциала значительно упрощается. Исключение составляет лишь самый простой случай взаимодействия двух сферических пузырьков. Для этого случая имеется точное решение [3,4], полученное методом отражений [5]. Оно справедливо при любых расстояниях между пузырьками, в том числе и при их касании (во всей области жидкости за исключением точки касания пузырьков). Сравнительно недавно в работе [6] была предложена математическая модель взаимодействия произвольного количества произвольно близко расположенных в одну линию слабонесферических пузырьков. Она основана на представлении потенциала скорости жидкости в виде ряда по сферическим функциям. Нетрудно заметить, что сходимость рядов по сферическим функциям по мере сближения пузырьков ухудшается. Поэтому реальная область применимости модели [6] по минимальному расстоянию между взаимодействующими пузырьками ограничена возможностями современных компьютеров.

Настоящая работа посвящена исследованию работоспособности двух методов определения потенциала скорости (метода отражений [3, 4] и метода разложения по сферическим функциям [6, 7]) в задачах взаимодействия в жидкости двух и более слабонесферических пузырьков, расположенных на одной прямой. Для этого метод отражений обобщается на случай произвольного количества слабонесферических пузырьков, поверхности которых находятся в фазе перехода через сферу.

2. Математическая модель

2.1. Постановка задачи

В жидкости имеется K пузырьков с центрами на оси z, которая является осью симметрии задачи. Пузырьки могут радиально пульсировать, перемещаться в пространстве вдоль оси симметрии и испытывать малые осесимметричные деформации.

Потенциал скорости жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0$$

и граничному условию на поверхности каждого пузырька

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla F_i = 0, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, ..., K$; $F_i = 0$ — уравнение поверхности i-го пузырька; t —время.

В рассматриваемом в настоящей работе случае малых осесимметричных деформаций уравнение поверхности i-го пузырька можно записать в следующем виде

[1] Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ.

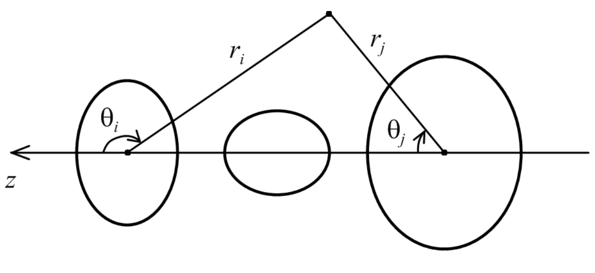


Рис. 1. Системы отсчета, применяемые при определении потенциала методом разложения по сферическим функциям

$$F\left(r_i, \theta_i, t\right) = r_i - R_i\left(t\right) - \sum_{n=2}^{N} a_{ni}\left(t\right) P_{ni} = 0, \qquad (2)$$

где r_i, θ_i — радиальная и широтная координаты сферической системы отсчета с началом в центре i-го пузырька (рис. 1); R_i — радиус пузырька; N — число гармоник, используемых в представлении поверхности пузырька; $P_{ni} = P_n\left(\cos\theta_i\right)$ — полином Лежандра степени n; a_{ni} — амплитуда отклонения поверхности i-го пузырька от сферической формы $r_i = R_i$ в виде поверхностной гармоники P_{ni}. Относительную амплитуду отклонения $\varepsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$ будем называть также искажением сферической формы пузырька. В настоящей работе искажения сферической формы пузырьков ε_{ni} предполагаются малыми настолько, что степенями ε^2 и выше по сравнению с 1 можно пренебречь ($\varepsilon^2 \ll 1$), где $\varepsilon = \max\limits_{n,i}|\varepsilon_{ni}|$.

2.2. Определение потенциала методом разложения по сферическим функциям

В методе разложения по сферическим функциям [6, 7] потенциал скорости жидкости Φ в сферической системе координат i-го пузырька (рис. 1) представляется в следующем виде

$$\Phi\left(r_i, \theta_i, t\right) = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\left[\frac{B_{\gamma i}\left(t\right)}{r_i^{\gamma+1}} + \bar{B}_{\gamma i}\left(t\right) r_i^{\gamma}\right] P_{\gamma i}, \qquad (3)$$

где

$$\bar{B}_{\gamma i} = \sum_{j=1, j\neq i}^{K} \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{C_{\varsigma\gamma} B_{\varsigma j}}{s_{ij} d_{ij}^{\varsigma+\gamma+1}},$$

$C_{\varsigma\gamma} = (-1)^{\gamma}\left(\gamma+\varsigma\right)!/\left(\gamma!\,\varsigma!\right)$, $d_{ij} = z_i - z_j$, z_i — координата центра i-го пузырька, $s_{ij} = 1$ при $z_i > z_j$, $s_{ij} = -1$ при $z_i < z_j$, $i, j = 1, 2, ..., K$ $(i \neq j)$.

Подстановкой выражения поверхности пузырьков (2) и выражения потенциала (3) в граничные условия (1) получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов потенциала $B_{\gamma i}$, которую с учетом того, что $\varepsilon^2 \ll 1$, можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} &\frac{B_{\gamma i}}{R_i^{\gamma+2}}\left[\left(\gamma+1\right)\delta_{\varrho}^{\gamma} - \bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma+1,\gamma+2}\varepsilon_{mi}\right] \\ &-\bar{B}_{\gamma i} R_i^{\gamma-1}\left(\gamma\delta_{\varrho}^{\gamma} + \bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma,\gamma-1}\varepsilon_{mi}\right) = \\ &\quad = -\dot{R}_i\left(\delta_{\varrho}^{0} + \delta_{\varrho}^{m}\varepsilon_{mi}\right) - \\ &-\dot{z}_i\left(\delta_{\varrho}^{1} - \beta_{1m\varrho}\varepsilon_{mi}\right) - \delta_{\varrho}^{m} R_i \dot{\varepsilon}_{mi}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где точка сверху означает дифференцирование по времени; $\varrho = 0, 1, \ldots$; $\delta_{\varrho}^{\gamma}$ — символ Кронекера; $\bar{\Theta}_{\gamma\varsigma\varrho}^{n,m} = nm\alpha_{\gamma\varsigma\varrho} - \beta_{\gamma\varsigma\varrho}$; $\beta_{\gamma\varsigma\varrho} = 0.5\left[\gamma(\gamma+1) + \varsigma(\varsigma+1) - \varrho(\varrho+1)\right]\alpha_{\gamma\varsigma\varrho}$; $\alpha_{\gamma\varsigma\varrho} = \dfrac{2\varrho+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{\gamma i} P_{\varsigma i} P_{\varrho i}\, d\cos\theta_i$.

Решение системы (4) ищется в виде суммы $B_{\gamma i} = B_{\gamma i}^{(0)} + B_{\gamma i}^{(1)}$, где $B_{\gamma i}^{(0)}$ и $B_{\gamma i}^{(1)}$ — нулевое и первое приближения относительно малого параметра ε. В силу того, что для любой пары пузырьков $\delta = \max\limits_{i,j}\left[\left(R_i + R_j\right)/d_{ij}\right] < 1$, решения $B_{\gamma i}^{(0)}$ и $B_{\gamma i}^{(1)}$ довольно легко находятся методом последовательных приближений. Его применение приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered} \bar{B}_{\varrho i}^{(0,0)} = \bar{B}_{\varrho i}^{(1,0)} = 0, \varrho \geq 0;\ B_{\varrho i}^{(0,0)} = 0,\ \varrho \geq 2; \\ \bar{B}_{\varrho i}^{(0,k)} = B_{\varrho i}^{(0,k)} = \bar{B}_{\varrho i}^{(1,k)} = 0,\ \varrho \geq k+1; \\ B_{\varrho i}^{(1,0)} = 0,\ \varrho \geq N+2;\ B_{\varrho i}^{(1,k)} = 0,\ \varrho \geq N+k+1; \\ B_{0i}^{(0,0)} = -R_i^2\dot{R}_i;\ B_{1i}^{(0,0)} = -R_i^3\dot{z}_i/2; \\ B_{\varrho i}^{(1,0)} = -R_i^{\varrho+2}\sum_{m=2}^{N}\Big(\delta_{\varrho}^{m} R_i\dot{\varepsilon}_{mi} + 3\delta_{\varrho}^{m}\dot{R}_i\varepsilon_{mi} + \\ +1.5\bar{\Theta}_{1m\varrho}^{1,2}\dot{z}_i\varepsilon_{mi}\Big)/(\varrho+1),\ 0 \leq \varrho \leq N+1; \\ \bar{B}_{\varrho i}^{(0,k)} = \sum_{j=1,j\neq i}^{K}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\frac{C_{\gamma\varrho}B_{\gamma j}^{(0,k-1)}}{s_{ij}d_{ij}^{\gamma+\varrho+1}},\ 0 \leq \varrho \leq k; \\ B_{\varrho i}^{(0,k)} = \frac{\varrho R_i^{2\varrho+1}}{\varrho+1}\bar{B}_{\varrho i}^{(0,k)} - \\ -\delta_{\varrho}^{0}R_i^2\dot{R}_i - \frac{\delta_{\varrho}^{1}R_i^3\dot{z}_i}{2},\ 0 \leq \varrho \leq k; \\ \bar{B}_{\varrho i}^{(1,k)} = \sum_{j=1,j\neq i}^{K}\sum_{\gamma=0}^{N+k-1}\frac{C_{\gamma\varrho}B_{\gamma j}^{(1,k-1)}}{s_{ij}d_{ij}^{\gamma+\varrho+1}}, 0 \leq \varrho \leq k; \\ B_{\varrho i}^{(1,k)} = \frac{R_i^{\varrho+2}}{\varrho+1}\Bigg\{\varrho R_i^{\varrho-1}\bar{B}_{\varrho i}^{(1,k)} - \sum_{m=2}^{N}\Bigg[\delta_{\varrho}^{m}\dot{a}_{mi} - \\ -\dot{z}_i\varepsilon_{mi}\beta_{1m\varrho} - \sum_{\gamma=0}^{k}\Bigg(\frac{\bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma+1,\gamma+2}B_{\gamma i}^{(0,k)}}{R_i^{\gamma+2}} + \\ +\bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma,\gamma-1}\bar{B}_{\gamma i}^{(0,k)}R_i^{\gamma-1}\Bigg)\varepsilon_{mi}\Bigg]\Bigg\},\ 0 \leq \varrho \leq N+k; \end{gathered} \qquad (5)$$

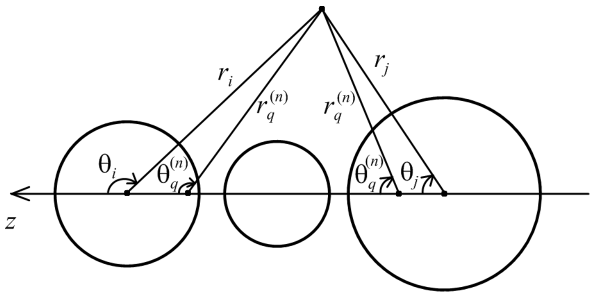


Рис. 2. Системы отсчета, применяемые при определении потенциала методом отражений

где $k = 1, 2, \ldots$, первый верхний индекс в скобках означает номер приближения по параметру ε, а второй индекс — по параметру δ.

2.3. Определение потенциала методом отражений

При использовании метода отражений потенциал определяется с помощью теоремы Вейса [8]. Данная теорема справедлива для сферических пузырьков. Однако ее можно использовать и в частном случае слабонесферических пузырьков: когда их поверхности находятся в фазе перехода через сферу ($\varepsilon_{ni} = 0$, $\dot{\varepsilon}_{ni} \neq 0$, $n = 2, 3, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, K$).

При использовании метода отражений потенциал ищется в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{K} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_i^{(k)}. \qquad (6)$$

Нулевое приближение потенциала определяется из решения задачи для одиночного слабонесферического пузырька, поверхность которого находится в сферической фазе

$$\Phi_i^{(0)} = \frac{A_0^{(0)}}{r_0^{(0)}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{A_1^{(0)} P_1^{(0)}}{r_1^{(0)n+1}},$$

где

$$A_0^{(0)} = -R_i^2 \dot{R}_i, A_1^{(0)} = -\frac{\delta_n^1 R_i^3 \dot{z}_i}{2} - \sum_{m=2}^{N} \frac{\delta_n^m R_i^{n+3} \dot{\varepsilon}_{mi}}{n+1}.$$

Последующие приближения определяются с помощью вышеупомянутой теоремы [8] в следующем виде

$$\Phi_i^{(k)} = \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i}}^{K} \sum_{\substack{j_{k-1}=1 \\ j_{k-1} \neq j_k}}^{K} \cdots \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j_2}}^{K} \left(\int_0^{R_{j_2}^2/d_{j_2 j_1}} \frac{A_0^{(k)} P_0^{(k)}}{r_0^{(k)2}} dc + \right.$$

$$\left. + \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{n_1} \cdots \sum_{n_{k+1}=1}^{n_k} \frac{A_1^{(k)} P_1^{(k)}}{r_1^{(k)n_{k+1}+1}} \right), \qquad (7)$$

где $P_0^{(k)} = P_1\left(\cos\theta_0^{(k)}\right)$, $P_1^{(k)} = P_{n_{k+1}}\left(\cos\theta_1^{(k)}\right)$, $r_q^{(k)}$, $\theta_q^{(k)}$ — радиальная и широтная координаты сферической системы с отсчетом $r_q^{(k)}$ от точки $z_q^{(k)}$ (рис. 2), $z_q^{(k)} = z_i - c_q^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $q = 0, 1$. Параметры с индексом $q = 0$ соответствуют радиальным пульсациям пузырьков, а с индексом $q = 1$ — их пространственным перемещениям.

Коэффициенты $A_q^{(m)}$ находятся из следующих рекуррентных соотношений

$$A_0^{(0)} = -R_{j_1}^2 \dot{R}_{j_1}, A_0^{(1)} = -\frac{A_0^{(0)} c}{s_{j_2 j_1} R_{j_2}},$$
$$A_0^{(m)} = -\frac{A_0^{(m-1)} c_0^{(m)3}}{s_{j_{m+1} j_m} R_{j_{m+1}}^3},$$

$$A_1^{(0)} = -\frac{\delta_{n_1}^1 R_{j_1}^3 \dot{z}_{j_1}}{2} - \frac{\delta_{n_1}^m R_{j_1}^{n_1+3} \dot{\varepsilon}_{m j_1}}{n_1+1}, \qquad (8)$$

$$A_1^{(1)} = \frac{(-1)^{n_2} n_2! a_{n_2} A_1^{(0)} c_1^{(1)n_1+n_2+1}}{s_{j_2 j_1} n_1! R_{j_2}^{2n_1+1}},$$

$$A_1^{(m)} = \frac{(-1)^{n_{m+1}} n_{m+1}! a_{n_{m+1}} A_1^{(m-1)} c_1^{(m)n_m+n_{m+1}+1}}{s_{j_{m+1} j_m} n_m! R_{j_{m+1}}^{2n_m+1}},$$

где $m = 2, 3, \ldots, k$, $j_{k+1} = i$, $c_0^{(1)} = c, c_1^{(1)} = \dfrac{R_{j_2}^2}{d_{j_2 j_1}}$, $c_q^{(m)} = \dfrac{R_{j_{m+1}}^2}{d_{j_{m+1} j_m} + c_q^{(m-1)}}$, $a_1 = \dfrac{(n_m+1)!}{2}$, $a_n = \dfrac{(n_m+n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} - \sum_{l=1}^{n-1} \dfrac{a_l}{(n-l)!}$, $q = 0, 1$, $n = 2, 3, \ldots, n_m$.

2.4. Взаимосвязь между выражениями двух методов

Коэффициенты, полученные двумя методами, можно связать следующими соотношениями

$$B_{0i} = A_0^{(0)},$$

$$B_{ni} = A_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i}}^{K} \sum_{\substack{j_{k-1}=1 \\ j_{k-1} \neq j_k}}^{K} \cdots \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j_2}}^{K} \left(D_{n1} I^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{n_1} \cdots \sum_{n_{k+1}=1}^{n_k} D_{n n_{k+1}} A_1^{(k)} c_1^{(k)n-n_{k+1}} \right),$$

$$\bar{B}_{0i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} \left[\frac{A_0^{(0)}}{s_{ij} d_{ij}} + \sum_{n_1=1}^{N} \frac{A_1^{(0)}}{s_{ij} d_{ij}^{n_1+1}} - \right.$$

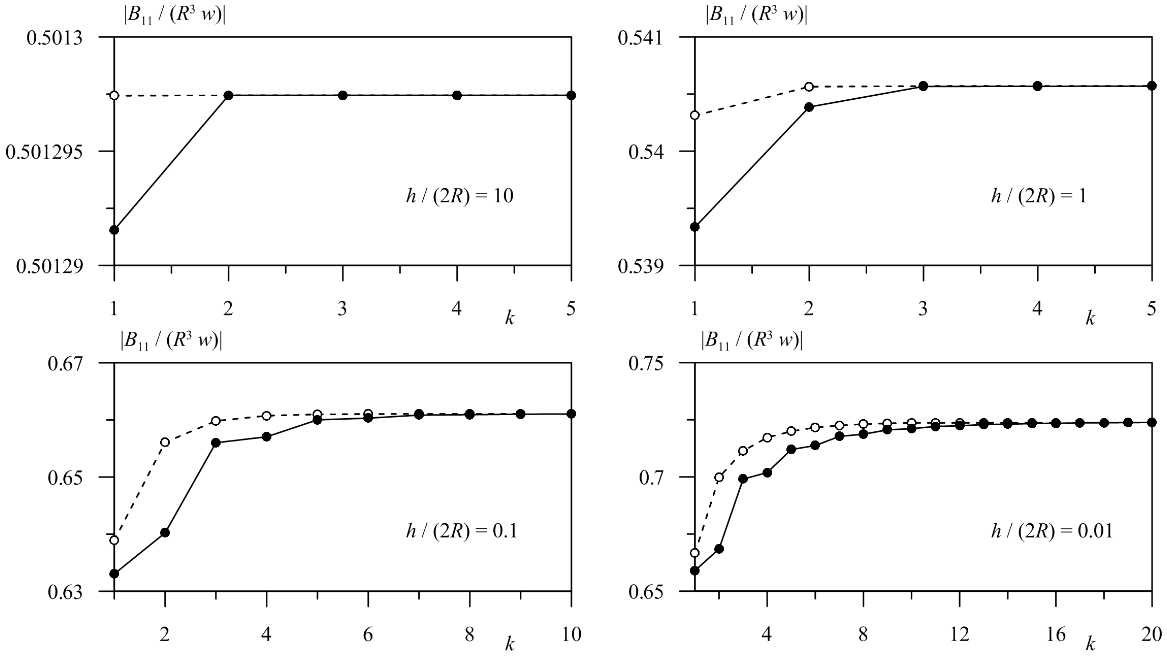


Рис. 3. Зависимости параметра $\left|B_{11}/(R^3w)\right|$ от числа итераций k, рассчитанные методом разложения по сферическим функциям (закрашенные кружочки, соединенные сплошными линиями) и методом отражений (незакрашенные кружочки, соединенные штриховыми линиями) при разных расстояниях между пузырьками

$$
-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{j_k=1\\ j_k\neq j}}^{K}\cdots\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq j_2}}^{K}\frac{1}{R_i}\Bigg(I^{(k+1)}+
$$

$$
+\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{n_2=1}^{n_1}\cdots\sum_{n_{k+2}=1}^{n_{k+1}}\frac{A_1^{(k+1)}}{n_{k+2}c_1^{(k+1)n_{k+2}}}\Bigg)\Bigg],
$$

$$
\bar{B}_{ni}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K}\Bigg[\frac{C_{0n}A_0^{(0)}}{s_{ij}d_{ij}^{n+1}}+\sum_{n_1=1}^{N}\frac{C_{n_1n}A_1^{(0)}}{s_{ij}d_{ij}^{n_1+n+1}}+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{j_k=1\\ j_k\neq j}}^{K}\cdots\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq j_2}}^{K}\frac{n+1}{nR_i^{2n+1}}\Bigg(D_{n1}I^{(k+1)}+
$$

$$
+\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{n_2=1}^{n_1}\cdots\sum_{n_{k+2}=1}^{n_{k+1}}D_{nn_{k+2}}A_1^{(k+1)}c_1^{(k+1)n-n_{k+2}}\Bigg)\Bigg],
$$

где $D_{nm} = (-1)^{n+m}n!/\left[m!(n-m)!\right]$, $I^{(k)} = \int\limits_0^{R_{j_2}^2/d_{j_2j_1}} A_0^{(k)}c_0^{(k)\gamma-1}dc.$

3. Результаты расчетов

Для демонстрации работоспособности рассматриваемых методов нахождения потенциала используется задача о движении идеальной несжимаемой жидкости при наличии в ней трех одинаковых слабонесферических пузырьков радиуса R ($R_1 = R_2 = R_3 = R$), центры которых расположены на одной прямой (расстояние между соседними пузырьками одинаково). Предполагается, что поверхности пузырьков находятся в фазе перехода через сферу ($\varepsilon_{n1} = \varepsilon_{n2} = \varepsilon_{n3} = 0$, $n \geq 2$), а скорости искажений по первым четырем гармоникам равны 0.1 c^{-1} ($\dot\varepsilon_{n1} = \dot\varepsilon_{n2} = \dot\varepsilon_{n3} = 0.1\ c^{-1}$, $2 \leq n \leq 5$, $\dot\varepsilon_{n1} = \dot\varepsilon_{n2} = \dot\varepsilon_{n3} = 0$, $n \geq 6$). Все пузырьки расширяются с одинаковой скоростью u ($\dot R_1 = \dot R_2 = \dot R_3 = u$). Крайние пузырьки двигаются к центральному со скоростью w ($\dot z_1 = -w$, $\dot z_3 = w$), а центральный пузырек считается неподвижным ($\dot z_2 = 0$).

На рис. 3 приводятся зависимости безразмерного параметра $\left|B_{11}/(R^3w)\right|$ от номера итерации k. Расчеты выполнены при $u = w$ и $h/(2R) = \{10, 1, 0.1, 0.01\}$, где h — расстояние между поверхностями соседних пузырьков. Закрашенные кружочки, соединенные для удобства восприятия сплошной линией, получены с использованием метода разложения по сферическим функциям (3)-(5), а незакрашенные кружочки, соединенные штриховой линией, — методом отражений (6)–(8).

Из рис. 3 следует, что по мере увеличения числа итераций k во всех четырех рассмотренных случаях оба метода дают сходимость к одному и тому же результату. По мере уменьшения расстояния между пузырьками сходимость методов ухудшается.

4. Заключение

Исследована работоспособность двух методов расчета потенциала скорости жидкости при наличии в ней нескольких пузырьков (пузырьки расположены на одной прямой): метода отражений [3, 4] и метода разложения по сферическим функциям [6, 7]. Метод отражений обобщен на случай произвольного количества слабонесферических пузырьков, поверхности которых находятся в сферической фазе.

Показано, что по мере увеличения числа итераций приближения методов отражений и разложения по сферическим функциям сходятся к одному и тому же результату.

Список литературы

[1] Doinikov A.A. Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. 2001. V. 64, № 2. 026301(6).

[2] Ilinskii Y.A., Hamilton M.F., Zabolotskaya E.A. Bubble interaction dynamics in Lagrangian and Hamiltonian mechanics // JASA. 2007. V. 121, №. 2. P. 786–795.

[3] Воинов О.В. О движении двух сфер в идеальной жидкости // ПММ. 1969. Т. 33, № 4. С. 659–667.

[4] Воинов О.В. Движение идеальной жидкости около двух сфер с радиальными скоростями на поверхности // Вестник Московского университета. 1969. №. 5. С. 83–88.

[5] Hicks W.M. On the motion of two spheres in a fluid // Philosoph. Trans. Roy. Soc. of London. 1880. V. 171. P. 455–492.

[6] Давлетшин А.И. Математическое моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань. 2010.

[7] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Взаимодействие двух сферических газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2011. № 3(25). С. 6–13.

[8] Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. Москва: Мир, 1964. 660 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 534.2.532

Кумуляция при сжатии кавитационных пузырьков в жидкости[1]

Аганин А.А.*, **Ильгамов М.А.****

* Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань
** Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассматриваются кумулятивные эффекты при сильном сжатии кавитационных пузырьков в жидкости. Обсуждается зависимость кумуляции от малой начальной несферичности пузырьков в трех случаях. В первом случае сжатие пузырька в жидкости реализуется на большом удалении от ее границ (свободной поверхности, жестких стенок). Во втором случае рассматривается влияние близко расположенной стенки. В третьем случае пузырек сжимается при наличии в его окрестности других пузырьков.

1. Введение

Кумулятивные эффекты, обусловленные сильным сжатием кавитационных пузырьков в жидкости, представляют значительный интерес как с теоретической точки зрения, так и для приложений. С кумулятивными эффектами при сжатии пузырьков связаны такие явления, как кавитационное разрушение [1, 2], сонолюминесценция [3], образование алмазов при кавитации бензола [4, 5], производство нейтронов и ядер трития при акустической кавитации дейтерированного ацетона [6]. Эффекты кумуляции при сжатии пузырьков используются в химии для интенсификации химических реакций [7], в медицине для дробления камней в почках [8], в биологии для очистки жидкости от различных вредных микробов и бактерий.

При оценках кумулятивных эффектов при сильном сжатии пузырьков начальная форма пузырьков зачастую принимается чисто сферической. В настоящей работе обсуждается зависимость кумуляции от относительно малой начальной несферичности пузырьков в трех случаях. В первом случае сжатие пузырька в жидкости реализуется на большом удалении от ее границ (свободной поверхности, жестких стенок). Во втором случае рассматривается влияние близко расположенной стенки. В третьем случае пузырек сжимается при наличии в его окрестности других пузырьков.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований РАН и при поддержке РФФИ.

2. Кумуляция при сильном сжатии отдельного пузырька в неограниченном объеме жидкости

Теоретические оценки сильного сжатия парогазовых пузырьков в жидкости вдали от ее разнообразных внешних границ с применением сферически симметричных моделей показывают, что такое сжатие сопровождается высокими температурами, давлениями и плотностями в полости пузырьков. При этом пространственные распределения давления, плотности и температуры оказываются близкими к однородным, за исключением тонкого слоя у поверхности пузырька. Если сжатие усиливать, варьируя какой-либо из параметров задачи, например, увеличивая давление жидкости, то после превышения некоторого порогового значения в финальной высокоскоростной стадии сжатия в пузырьке формируется ударная волна, сходящаяся к его центру. По мере схождения ее интенсивность возрастает. В результате энергия сжатии фокусируется не во всем объеме пузырька, а в его небольшой центральной зоне, где кратковременно образуется сферическое ядро с очень высокими значениями температуры, плотности и давления.

Кумулятивное сжатие сферического кавитационного пузырька иллюстрирует рис. 1. На этом рисунке представлены радиальные профили газодинамических параметров в финальной стадии сжатия и в самом начале следующего за ним расширения при колллапсе кавитационного пузырька в воде (левая колонка) и ацетоне (правая колонка). Радиус пузырька в начале коллапса $R = 500$ мкм, температура пара и жидкости $T = 293$ К в случае воды

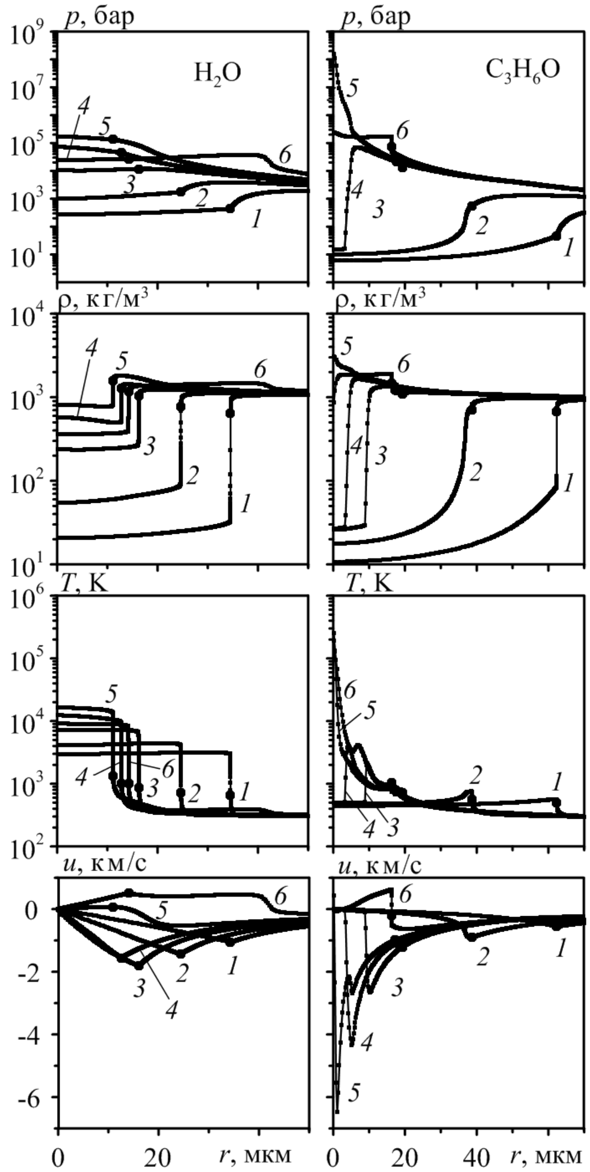


Рис. 1. Профили давления (p), плотности (ρ), температуры (T) и скорости (u) в шесть последовательных моментов времени (кривые 1–6) при сжатии чисто сферического кавитационного пузырька в воде (H_2O) и ацетоне (C_3H_6O). Мелкие символы соответствуют ячейкам расчетной сетки, крупные — границе пузырька

и $T = 273$ K в случае ацетона, давление жидкости $p = 15$ бар, давление пара — на линии насыщения. Использовалась математическая модель сферической составляющей движения работы [9]. В этой модели движение пара и жидкости описывается уравнениями газовой динамики. Учитываются нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесность испарения-конденсации на межфазной поверхности. Применяются реалистичные широкодиапазонные уравнения состояния Нигматулина–Болотновой (для воды — из [10]). Решение задачи находится численно методом Годунова на подвижных сетках по методике, используемой в [9], расчеты выполнены Топорковым Д.Ю.

Из рис. 1 следует, что при сжатии кавитационного пузырька в воде радиальные распределения давления, плотности и температуры в финальной стадии сжатия во всем объеме пузырька близки к однородным. Исключение составляет лишь небольшая окрестность поверхности пузырька с неоднородностью температуры и плотности, которая обусловлена теплообменом. Радиальные профили скорости в пузырьке близки к линейным. Все перечисленное свидетельствует о кумуляции энергии сжатия во всем объеме пузырька.

Иная картина наблюдается при сжатии кавитационного пузырька в ацетоне. Здесь в конце сжатия (в промежутке между t_2 и t_3) в полости пузырька формируется радиально сходящаяся ударная волна. В результате ее фокусировки в центре пузырька возникает небольшая область, давление, плотность и температура в которой многократно больше, чем в периферийной области пузырька (например, давление больше в 1000 раз). При этом максимум кумуляции имеет место в самом центре пузырька в момент фокусировки там ударной волны.

Следует отметить, что из-за диссипации энергии посредством теплопроводности, потерь энергии на химические реакции, диссоциацию, ионизацию и т.д. степень кумуляции сжатия в центральной области пузырька понижается. Это можно компенсировать повышением давления жидкости, изменением ее свойств. В частности, приведенные на рис. 1 результаты, отличаются, в основном, тем, что в одном случае пузырек сжимается в воде, а в другом – в ацетоне. Расчеты показывают, что полученные для ацетона степени кумуляции можно достигнуть и в воде, но при значительно большем давлении жидкости (более 150 бар).

Рис. 2, 3 иллюстрируют влияние малой начальной несферичности на характер кумуляции в окрестности центра пузырька. На этом рисунке представлено изменение полей давления и температуры в пузырьке (а на рис. 2 и в небольшой области жидкости в окрестности пузырька) в финальной стадии его сжатия. Максимальные значения давления и температуры в пузырьке в моменты t_{1-3} составляют соответственно $p_{max} = 0.1 \cdot 10^5$ бар, $0.36 \cdot 10^5$ бар, $1.5 \cdot 10^5$ бар и $T_{max} = 0.3 \cdot 10^4$ K, $0.8 \cdot 10^4$ K, $1.6 \cdot 10^4$ K. Максимум давления достигается на оси симметрии на некотором удалении от фронта ударной волны, тогда как максимум темпе-

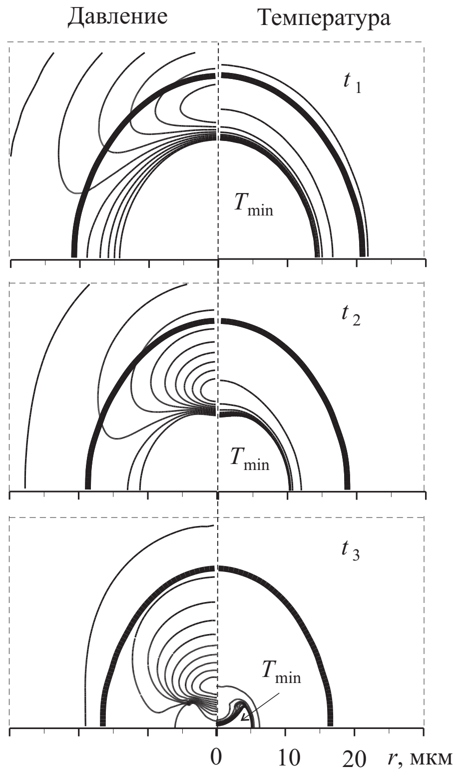


Рис. 2. Изолинии давления и температуры в паре и жидкости в три последовательных момента времени t_{1-3} в конце сжатия кавитационного пузырька в ацетоне. Внешние жирные кривые – поверхность пузырька. Наиболее близкая к центру пузырька изолиния температуры внутри пузырька соответствует фронту ударной волны. В полости перед фронтом ударной волны вплоть до ее полного смыкания давление и температура при $t \geq t_1$ сохраняют практически неизменными свои минимальные по объему пузырька значения $p_{min} = 12$ бар, $T_{min} = 470$ K

ратуры — непосредственно за ее фронтом. Физическая постановка задачи здесь точно такая же, как и в случае, представленном на рис. 1 для ацетона. Отличие лишь в том, что здесь пузырек имеет малую начальную осесимметричную несферичность. В начале сжатия он является слегка приплюснутым по вертикали (оси симметрии задачи) эллипсоидом вращения. Отношение отклонения от сферической формы вдоль оси симметрии к радиусу сферической формы составляет 0.0033. Из-за начальной несферичности математическая формулировка задачи становится двумерной. Представленные на рис. 2, 3 результаты получены с использованием двумерного обобщения модели, которая применялась при получении приведенных на рис. 1 кривых. Метод численного решения изложен в [11], расчеты выполнены Халитовой Т.Ф.

Как видно, наличие малой начальной несферичности оказывает существенное влияние на всю финальную стадию кумуляции (фокусировку ударной волны). Рассмотрим более подробно влияние начальной несферичности на процесс смыкания (исчезновения) полости перед фронтом возникающей в пузырьке радиально сходящейся ударной волны. В силу кратковременности процесса смыкания этой полости газодинамические параметры (давление, плотность, температура) в ней в ходе смыкания остаются близкими к однородным по объему и мало меняются со временем. В случае чисто сферического пузырька эта полость чисто сферическая. Ее радиус равен радиусу фронта ударной волны, поэтому по мере схождения ударной волны она смыкается как стягиваемый в точку шар с центром, совпадающим с центром пузырька.

При анализе смыкания подобной полости в случае пузырька с малой начальной несферичностью (рис. 2, 3) следует иметь в виду, что несферичность пузырька к концу сжатия заметно возрастает (рис. 2). При этом, если в начале сжатия пузырек был по оси слегка приплюснутым, то к концу сжатия он уже стал немного вытянутым. На рис. 2, 3 приведен довольно короткий отрезок финальной стадии сжатия пузырька, в котором поверхность пузырька изменяется незначительно. Сходящаяся ударная волна, а вместе с ней и рассматриваемая полость перед ее фронтом, по форме сначала (момент t_1) подобна пузырьку. Это естественно, поскольку ударная волна образуется около его поверхности. В ходе радиального схождения во фронте ударной волны (момент t_2) в окрестности оси симметрии образуются вмятины, одна — сверху, другая, зеркальное отражение первой, — снизу (вторая вмятина на рис. 2 отсутствует, поскольку на рис. 2, 3 представлены лишь фрагменты расчетной области, расположенные выше плоскости симметрии задачи). Вмятины быстро углубляются (момент t_3). Эти вмятины похожи на две осесимметричные соосные струи, движущиеся с большой скоростью навстречу друг к другу. В интервале $t_3 < t < t_4$ происходит их столкновение в центре пузырька. В момент столкновения рассматриваемая полость, будучи сначала (до t_1) близкой к эллипсоидальной, превращается в тороподобное образование (т.е. в осевом сечении полость из односвязной превращается в двусвязную). В результате столкновения в центре пузырька образуется отраженная ударная волна, симметричная относительно плоскости симметрии задачи. Отраженная ударная волна распространяется вверх и вниз, навстречу указанному противоположно направленно-

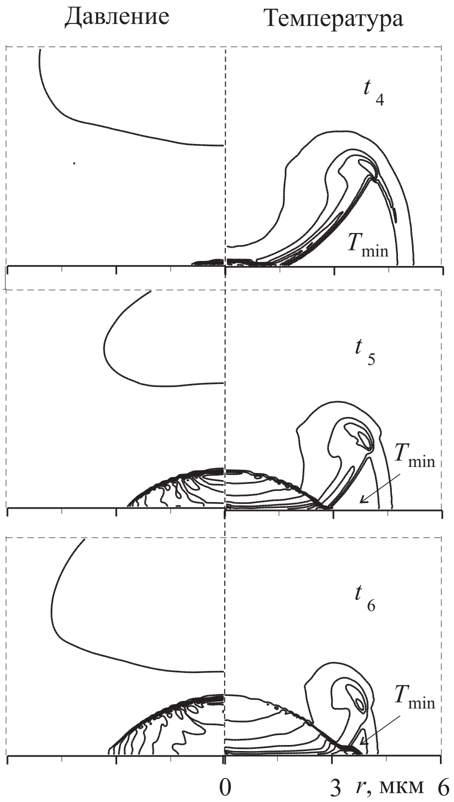


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для трех более поздних последовательных моментов времени t_{4-6} и в меньшей окрестности центра пузырька. Давление и температура внутри смыкающейся полости перед фронтом ударной здесь остаются прежними: $p_{min} =$ 12 бар, $T_{min} = 470$ К. Максимальные значения этих параметров в пузырьке в моменты t_{4-6} составляют соответственно $p_{max} =$ $12 \cdot 10^5$ бар, $18 \cdot 10^5$ бар, $16 \cdot 10^5$ бар и $T_{max} = 2.8 \cdot 10^4$ К, $3.4 \cdot 10^4$ К, $4 \cdot 10^4$ К

му струеподобному перемещению верхней и нижней частей сходящейся ударной волны. Область за фронтом отраженной ударной волны рассекается плоскостью ее симметрии на две части, подобные шаровым сегментам (моменты t_4, t_5). Со временем эта область увеличивается, сначала лишь в результате роста радиуса ее кругового сечения плоскостью симметрии ($t_4 < t < t_5$). Затем, в дополнение к этому, в окрестности острой боковой (кольцевой) кромки этой области возникает радиально расходящееся цилиндрическое струеподобное образование («цилиндрическая струя»). Эта «цилиндрическая струя» со временем становится все более выраженной (момент t_6). Вскоре после времени t_6 она сталкивается с движущейся ей навстречу боковой частью фронта сходящейся ударной волны.

В результате схождения распространяющейся к центральной области пузырька ударной волны, расхождения отраженной ударной волны и их взаимодействия, размеры тороподобного образования, в которое превратилась рассматриваемая полость после возникновения отраженной волны, быстро уменьшаются. При столкновении отмеченной радиально расходящейся цилиндрической «струи» с набегающей ей навстречу боковой частью фронта сходящейся ударной волны данное тороподобное образование разбивается на два более мелкие одинаковые тороподобные образования. Вскоре эти образования исчезают, что и означает завершение процесса смыкания рассматриваемой полости.

Таким образом, относительно небольшая начальная несферичность пузырька при его сильном сжатии может привести к большим деформациям возникающей в пузырьке радиально сходящейся ударной волны. В результате процесс смыкания полости перед фронтом ударной волны, где параметры пара мало меняются по пространству и времени, а вместе с этим и характер кумуляции в центральной области пузырька, оказываются совершенно отличными от того, что имеет место при чисто сферическом сжатии. В частности, вместо схлопывания полости в центре пузырька в результате сферического схождения ударной волны, смыкание подобной полости в рассмотренном несферическом случае происходит, в основном, в результате двух столкновений. Сначала в центре пузырька сталкиваются верхняя и нижняя части фронта ударной волны. Затем цилиндрически расходящаяся боковая острая кромка отраженной ударной волны, превратившись по мере расхождения в цилиндрическое струеподобное образование, сталкивается с боковой поверхностью сходящейся ударной волны. Первое столкновение в некотором смысле подобно столкновению двух движущихся навстречу друг другу одинаковых осесимметричных струй. Второе столкновение напоминает ударное взаимодействие расходящейся цилиндрической струи с цилиндрически сходящейся ударной волной.

Достигаемые в ходе рассматриваемой несферической фокусировки максимальные значения давления, плотности и температуры на сетке с характерным линейным размером, близким к размеру ячеек одномерной сетки, используемой при расчете сферической фокусировки (рис. 1), соответственно равны $p_{max} = 1.8 \cdot 10^7$ бар, $\rho_{max} = 2500$ кг/м^3, $T_{max} = 6 \cdot 10^4$ К. По сравнению со случаем чисто сферического сжатия (рис. 1) эти значения значительно ниже соответствующих максимумов в центре пузырька, но значительно выше тех, что достигаются на его периферии.

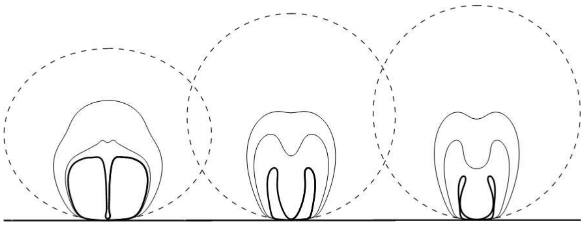


Рис. 4. Изменение формы симмметричного относительно вертикали кавитационного пузырька при его коллапсе у горизонтальной стенки: пузырек в начале сжатия является приплюснутым по оси симметрии эллипсоидом (слева), чистой сферой (в центре) и вытянутым по оси эллипсоидом (справа). Штриховые линии — начало сжатия, тонкие сплошные — промежуточная стадия, жирные сплошные — момент начала ударного воздействия конца струи на стенку

3. Влияние твердой стенки

Известные теоретические и экспериментальные данные свидетельствуют [1, 2], что при наличии рядом с пузырьком твердой стенки на противоположной к стенке части поверхности сжимающегося пузырька в результате несферичности процесса сжатия образуется высокоскоростная кумулятивная струйка, обладающая большой разрушительной силой. Краткий обзор работ в этом направлении можно найти в [12]. Считается, что воздействие таких струек и приводит на практике к разрушению поверхностей тел. Если пузырек находится близко к стенке или непосредственно примыкает к ней, то возникающая на его поверхности кумулятивная струйка обычно оказывается направленной к стенке. Струйки воздействуют на стенку либо непосредственно, либо через прослойку жидкости между пузырьком и стенкой. К настоящему времени выполнено много исследований разрушительного влияния кавитационных пузырьков на стенки тел, но в силу значительной сложности и большой практической важности этого явления его изучение активно продолжается. Сложность данного явления заключается в том, что в общем случае при его исследовании необходимо учитывать взаимодействие между газом в пузырьке, окружающей пузырек жидкостью и телом. При этом формоизменения поверхности пузырька могут быть очень большими (в частности, сферический пузырек может превратиться в тор), в жидкости и теле могут возникать ударные волны.

Рис. 4 иллюстрирует формирование кумулятивной струйки на поверхности кавитационного пузырька при его коллапсе у горизонтальной плоской стенки в том случае, когда пузырек в начале сжатия примыкает к стенке (касается ее одной точкой своей поверхности). Показано влияние начальной несферичности. Пузырек в начале сжатия эллипсоидальный с осью симметрии, ортогональной плоскости стенки. Задача двумерная (осесимметричная). Решение находится методом граничных элементов по методике, кратко изложенной в [13], расчеты выполнены Косолаповой Л.А. Радиус сферического пузырька в начале сжатия $R = 1$ мм. Жидкость — вода в комнатных условиях.

По мере приплющивания пузырька вдоль оси симметрии струя в момент своего касания стенки (т.е. в момент начала ударного воздействия на стенку) становится все более тонкой. При этом ее скорость возрастает (от 120 до 530 м/с), а полость пузырька увеличивается. По мере вытягивания пузырька картина изменяется на противоположную: струя утолщается, ее скорость убывает (от 120 до 110 м/с), а полость пузырька уменьшается.

4. Влияние соседних пузырьков

Важную роль в динамике двух и более пузырьков, находящихся друг от друга на расстояниях порядка их радиусов, играет их гидродинамическое взаимодействие. Без учета такого взаимодействия можно получить оценки, далекие от действительности. В результате взаимодействия пузырьки могут удаляться друг от друга, приближаться друг к другу. Их радиальные колебания могут либо усиливаться, либо ослабляться и т.д. Взаимодействие пузырьков может приводить к их деформациям. Расчеты показывают, что взаимодействие пузырьков накладывает ограничение на величину минимальных искажений сферической формы пузырька в начале сжатия. При сильном сжатии в финальной высокоскоростной стадии сжатия влияние взаимодействия между пузырьками становится несущественным.

5. Заключение

Показано, что относительно небольшие начальные отклонения от сферичности пузырьков в начале их сжатия могут приводить к значительным изменениям процесса кумуляции и ее характеристик (скорости, давления, плотности и т.д.) при коллапсе пузырьков на большом удалении от разнообразных границ, около твердой стенки и во взаимодействии с соседними пузырьками. В частности, при коллапсе пузырька у стенки изменяются скорость и диаметр образующейся на поверхности пузырька кумулятивной струйки, объем полости пузырька в момент начала ударного воздействия этой струйки на стенку.

Список литературы

[1] Kornfeld M., Suvorov N. On the destructive action of cavitation // App. Phys. 1944. V. 15. P. 495–506.

[2] Plesset M.S., Chapman R.B. Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // J. Fluid Mech. 1971. V. 47. P. 283–290.

[3] Gaitan D.F., Crum L.A. Observation of sonoluminescence from a single, stable cavitation bubble in a water/glycerine mixture // In 12th Intern. Symp. On Nonl. Acoustics. New York: Elsevier, 1990. P. 459–463.

[4] Галимов Э.М., Кудин А.М., Скоробогатский В.Н., Плотниченко В.Г., Бондарев О.Л., Зарубин Б.Г., Страздовский В.В., Аронин А.С., Фисенко А.В., Быков И.В., Баринов А.Ю. Экспериментальное подтверждение синтеза алмаза в процессе кавитации // ДАН. 2004. Т. 395, № 2. С. 187–191.

[5] Днестровский А.Ю., Воропаев С.А., Пономарева Е.А. Моделирование условий образования алмаза при кавитации в бензоле // ДАН. 2011. Т. 416, № 5. С. 611–614.

[6] Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S. (jr), Nigmatulin R.I., Block R.C. Evidence for Nuclear Emissions During Acoustic Cavitation // Science. 2002. V. 295. P. 1868–1873.

[7] Suslick K.S. Sonochemistry // Science. 1990. V. 247.

[8] Chaussy C. Extracorporeal Shock Wave Lithotripsy: New Aspects in the Treatment of Kidney Stone Disease. Basel: Karger, 1982.

[9] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Нигматулин Р.И., Топорков Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // МЖГ. 2010. № 1. С.57–69.

[10] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.

[11] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Метод численного решения задач сильного сжатия несферического кавитационного пузырька // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 14–32.

[12] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Малахов В.Г., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Ударное воздействие кавитационного пузырька на упругое тело // Ученые записки Казанского университета. 2011. Т. 153. Серия: физико-математические науки. Книга 1. С. 131–146.

[13] Косолапова Л.А., Малахов В.Г., Хисматуллина Н.А. Ударное воздействие кавитационного пузырька на упругое полупространство // Труды X Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление» 12–16 июня 2012 г. (в печати).

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 536.37

Капиллярные течения и самосборка пористых гидратных структур

Амелькин С.В., Игошин Д.Е.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики СО РАН, Тюмень

Предложена модель самосборки пористых гидратных структур, в которой учитывается последовательность основных физических процессов: рост гидратов на поверхности водного раствора, формирование островковой структуры, капиллярное течение, отрыв и перенос вторичных ядер кристаллизации к мениску. Модель исследована в рамках метода клеточных автоматов. Получено хорошее соответствие результатов моделирования с экспериментальными данными.

1. Введение

При исследовании кристаллизации газовых гидратов (ГГ) в растворах поверхностно-активных веществ (ПАВ) [1] и в разбавленных растворах ингибиторов [2] установлено, что на начальной стадии кристаллизационная структура (КС) растет на поверхности реактора в виде тонкой пленки, состоящей из большого числа «островков» слабо связанных адгезией с поверхностью реактора зерен микрокристаллов ГГ, и сети капиллярных каналов, по которым мигрирует водный раствор. В данной работе наблюдаемый рост пленочной КС связывается с самоподдерживающейся генерацией вторичных центров кристаллизации при капиллярном течении смачивающей пленки раствора.

Рассмотрим процесс массовой кристаллизации, в котором образующиеся в смачивающей пленке раствора микрокристаллы формируют на поверхности реактора двумерную «островковую» КС — совокупность зерен мирокристаллов и каналов между ними с пористостью m. Рост микрокристаллов на мениске смачивающей пленки раствора вызывает его продвижение за счет капиллярных сил. Течение смачивающей пленки раствора приводит к разрушению зерен, отрыву и перемещению частиц. Основной массоперенос при течении пленки раствора сосредоточен в тонком слое у поверхности раздела раствор–газ. С учетом конечной толщины пленки определенная доля «осколков» переносится течением к мениску, где они выступают в качестве вторичных центров кристаллизации. Таким образом, течение пленки раствора и рост микрокристаллов на мениске пленки взаимосвязаны, что приводит к самоподдерживающейся генерации вторичных центров кристаллизации и распространению фронта массовой кристаллизации.

Для реально наблюдаемой пористости $m < 0.5$ продвижение мениска пленки раствора происходит значительно быстрее, чем рост отдельных микрокристаллов. В этом случае скорость движения v фронта кристаллизации определяется кинетикой роста зерен, а течение пленки раствора «привязано» к процессу роста и задает частоту поступления $J_f(v)$ вторичных центров кристаллизации на наступающий мениск.

Задача о кинетике роста зерен в пленочной КС в общем случае соответствует известной задаче Колмогорова о кристаллизации слитка. В частном случае $[1, 2]$ роста из раствора зерен с узкой функцией распределения по размерам задачу можно существенно упростить. Покроем площадь пленочной КС сеткой с ячейками в виде правильных многоугольников со стороной d и зернами в форме круга радиуса R в центре многоугольников. Выбор ячейки определяется максимально плотным покрытием при данном типе упаковки зерен. Без ограничения общности исследуем покрытие сеткой с квадратными ячейками. При этом пористость КС составляет $m = 1 - \pi(\bar{R}/d)^2 (m_{min} = 1 - \pi/4)$.

2. Модель роста кристалла в ячейке

Рассмотрим изометрический (с сохранением формы) рост отдельного кристалла газогидрата в статическом реакторе на поверхности слабого раствора нелетучего ингибитора. Кинетика роста определяется совместным решением уравнения для скорости роста кристалла и уравнения диффузии молекул ингибитора.

Воспользуемся выражением для радиальной скорости роста гидрата на поверхности контакта водный раствор–газ в общей форме [3]

$$u = u_0 \frac{P - P_0(x_{is}, T)}{P - P_0(0, T)}, \tag{1}$$

где P — давление в реакторе; $P_0(x_{is}, T)$ — равновесное давление гидратообразования при температуре T в реакторе и молярной доле ингибитора x_{is}. Индекс s здесь соответствует вычислению функции на поверхности роста кристалла; u_0 — скорость роста в чистой воде при давлении P и температуре T.

Распределение примеси вокруг растущего кристалла определяется уравнением диффузии молекул ингибитора и граничными условиями. Будем считать, что молекулы ингибитора полностью отторгаются растущим кристаллом. Соответствующее граничное условие можно сформулировать как условие непроницаемости поверхности роста кристалла для молекул примеси. Второе граничное условие соответствует условию непроницаемости внешней границы R_* для ингибитора, т.е. симметрии диффузионных потоков через нее. Отклонение системы от равновесия будем предполагать не слишком большим, так что $x_i \ll 1$ не только в объеме раствора, но и вблизи поверхности растущего кристалла.

Рассмотрим задачу о круговом росте кристалла газогидрата в ограниченной области радиусом R_*. Уравнение диффузии ингибитора и граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial x_i}{\partial r}, \tag{2}$$

$$D \left. \frac{\partial x_i}{\partial r} \right|_{r=R(t)} = -u x_i, u = \dot{R}(t), \left. \frac{\partial x_i}{\partial r} \right|_{r=R_*} = 0, \tag{3}$$

где r — модуль радиус-вектора системы полярных координат; $R(t)$ — радиус кругового кристалла в текущий момент времени; t, D — коэффициент диффузии молекул ингибитора в растворе; x_0 — исходная молярная доля ингибитора.

Накопление ингибитора вблизи поверхности роста приводит к уменьшению пересыщения $\Delta P = P - P_0(x_{is}, T)$ — движущей силы фазового перехода.

Зависимость равновесного давления гидратообразования от концентрации ингибитора определяется соотношением [4, 5]

$$P_0(x_i, T) = P_* exp \left(-\frac{T_*}{T + \Delta T(x_i)} \right), \tag{4}$$

где P_*, T_* — эмпирические параметры. Слагаемое ΔT определяется действием ингибитора, которое сводится к смещению равновесных условий образования гидратов в область более высоких давлений (при постоянной температуре) или низких температур (при постоянном давлении). Поправка для температуры вычисляется по формуле [5], преобразованной к виду

$$\Delta T = \frac{A x_i}{M_l (1 - x_i)}, \tag{5}$$

где A — эмпирический параметр; M_l — относительная молекулярная масса воды.

Полученная система уравнений использовалась при численном моделировании гидратообразования пропана при температуре 274 К и давлении 350 кПа. Независимый параметр задачи — скорость роста в чистой воде u_0 (порядка 10^{-4} м/с) — выбирали из экспериментальных данных [6]. Для расчетов принимали $D = 10^{-9}$ м^2/с [7]; $P_* = 1.4262 \cdot 10^{32}$ Па, $T_* = 16921.84$ К, $A = 2335$ К [5], $M_l = 18$. Счет останавливался, когда радиальная скорость гидратообразования составляла $u < 10^{-2} u_0 = 10^{-6}$ м/с.

На рис. 1 представлены зависимости от времени следующих величин: радиус кристалла гидрата R (а), скорость роста u (б) и концентрация ингибитора x_s (в) вблизи подвижной границы. Предельное значение радиуса кристалла $R|_{t \to \infty} = R_\infty$ достигается, когда $x|_{r=R_*} = x_*$: $\pi R_*^2 x_0 = \pi (R_*^2 - R_\infty^2) x_*$, откуда $R_\infty = R_* \sqrt{1 - x_0/x_*}$. Здесь x_* — максимальная для данных температуры и давления концентрация ингибитора, при которой возможен рост зерна. Из соотношений (1), (4), (5) следует $x_* \approx 3.71\%$. Для кривых 1, 2 и 3 R_∞ соответствует значениям 0.171, 0.232 и 0.279 мкм. На заключительной стадии роста кристалла концентрация ингибитора вблизи его поверхности приближается к предельному значению x_*, что приводит к резкому замедлению роста. Как показывают расчеты, область, насыщенная ингибитором, остается свободной от гидрата. В пространстве между зернами формируются каналы, по которым вода капилярно подсасывается к фронту гидратообразования.

3. Самосборка

Продвижение фронта массовой кристаллизации будем рассматривать как последовательное случайное заполнение зернами ячеек сетки. Задачу удобно решать методом клеточных автоматов (КА). Автомат может производить конечное число действий, однозначно задаваемых состоянием автомата. Действия автомата вызывают ответную реакцию среды S, замыкая тем самым петлю обратной связи. В детерминистических автоматах сигнал среды S точно определяет, в какое состояние j должен перейти автомат, находящийся в состоянии i.

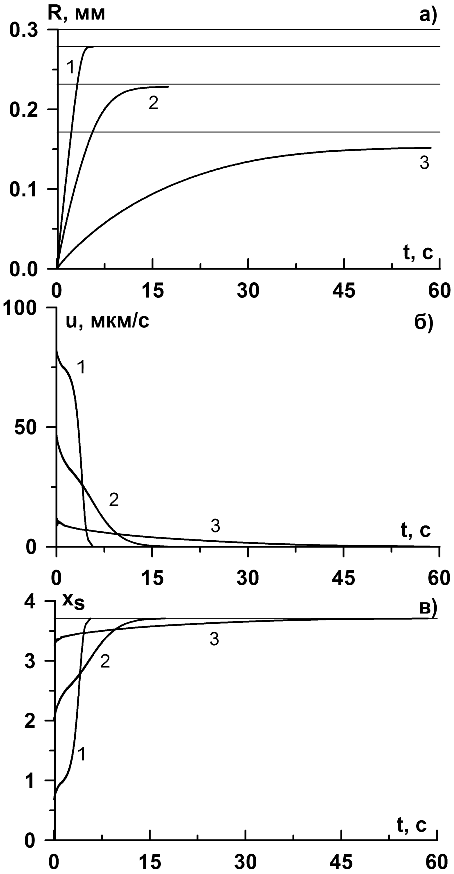


Рис. 1. Изменение радиуса, скорости роста зерна и концентрации ингибитора вблизи кристалла со временем. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют начальным концентрациям x_0 =0.5%, 1.5%, 2.5%

В вероятностных автоматах этот переход задается некоторыми вероятностями $a_{ij}(S)$ [8]. Найдем скорость v движения фронта кристаллизации, усредненную по достаточно протяженному участку мениска $L \gg d$. Среднее время заполнения $(n+1)$-го ряда $\bar{t}_{n+1}$ складывается из среднего времени ожидания прихода вторичного центра кристаллизации в ячейку $(n+1)$-го ряда и среднего времени роста зерна

$$\begin{aligned}\bar{t}_{n+1} \approx J_f^{-1}(v_n, v_{n-1}, \ldots) + \frac{2\bar{R}}{\bar{u}} = \\ = J_f^{-1}(v_n, v_{n-1}, \ldots) + \bar{t}_g,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\bar{u}$ — средняя скорость роста зерна, приведенная к линейному закону роста. Используя соотношение (6), получим выражение для скорости движения фронта кристаллизации на $(n+1)$-ом шаге, которое является аналогом дискретного времени

$$v_{n+1} \approx \frac{d}{\bar{t}_{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-m}\frac{\bar{u}\bar{t}_g J_f(v_n, v_{n-1}, \ldots)}{J_f(v_n, v_{n-1}, \ldots)+1}}. \tag{7}$$

Соотношение (7) представляет собой последовательное точечное отображение v_n. Для его дальнейшего анализа необходимо задать конкретный вид функции $J_f(v_n, \ldots)$. Найдем вид функции $J_f(v_n, \ldots)$ из следующих соображений. Капиллярное продвижение мениска пленки раствора между зернами ГГ имеет характер «прыжков». Это приводит к пульсациям локальной скорости течения пленки в КС, которые с учетом инерционных эффектов взаимодействия течения с зернами имеют решающее значение для разрушения зерен, отрыва частиц и их перемещения. Амплитуда и длительность пульсаций локальной скорости течения определяется скоростью роста отдельных зерен и динамикой движения мениска. Следовательно, интегральная интенсивность пульсаций зависит только от пройденного фронтом кристаллизации расстояния. Однако с ростом скорости продвижения фронта возрастает характерная частота пульсаций, которая является существенной, так как кинетика разрушения зерен ГГ и разрыва кристаллизационных или адгезионных контактов имеет выраженный релаксационный характер. Функцию $J_f(v_n, \ldots)$ в случае статистической независимости процессов отрыва и перемещения отдельных частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned}J_f(v_n, \ldots) = \\ = \int dr \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n}\sum_{m} m P_m(k,l,r) W(k,l,n,r).\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $P_m(k,l,r)$ — вероятность отрыва от зерна m частиц с размером r в k-ом ряде на l-ом шаге; $W(k,l,n,r)$ — вероятность в единицу времени поступления частицы с размером r, образовавшейся в k-ом ряде на l-ом шаге, к мениску на n-ом шаге. Предположим для упрощения задачи, что вероятность

$$P_m(k,l,r) = P(l-k)\delta_{ml}\delta(r-r_0),$$

где δ_{ml} и δ_x — символ Кронекера и дельта-функция Дирака соответственно. Будем считать, что отрыв частиц от зерна имеет пороговый характер и $P(l-k) = \theta(l-k-k_0)$, где $\theta(x)$ — ступенчатая функция, а значение $k_0(vn, \ldots)$ (число «импульсов отрыва») определяется из условия равенства накопленного напряжения связи между частицей и зерном предельному напряжению разрыва этой связи σ_0:

$$\bar{\sigma}\sum_{k=0}^{k_0}\exp\left(-\frac{\pi\bar{R}^2}{(1-m)d_c\tau}\sum_{s=0}^{k} v_{n-s}^{-1}\right) = \sigma_0, \tag{9}$$

где $\bar{\sigma}(u,r,m)$ — средний прирост напряжения связи при пульсации скорости течения пленки раствора;

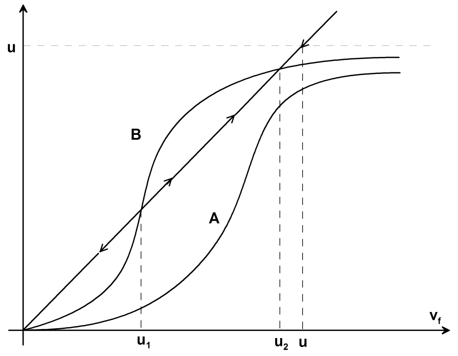


Рис. 2. Графическое решение уравнения (7)

τ — время релаксации напряжения связи между частицей и зерном; d_c — длина корреляции пульсаций скорости течения пленки раствора в КС.

Для функции $J_f(v_n,\ldots)$ имеем из соотношения (7)

$$J_f(v_n,\ldots)=\sum_{k=0}^{n-k_0(n)}\sum_{l=k+k_0(n)}^{n}W(k,l,n). \quad (10)$$

Вид функции $W(k,l,n)$ определим из связанного с рассеянием на зернах условия экспоненциального убывания вероятности переноса частицы $w(h)=\exp(-h/h_0)/h_0$ на h рядов при единичном «прыжке» мениска пленки

$$W(k,l,n)\approx\frac{[(n-k)/h_0]^{f(n-l)}}{h_0[f(n-l)]!}\exp[-(n-k)/h_0], \quad (11)$$

где $f=(dc/d)$. В случае $dc\approx d$ $(f=1)$ для функции $J_f(v_n,\ldots)$ из 10 и 11 имеем

$$J_f(v_n,\ldots)\approx h_0^{-1}\sum_{q=0}^{n-k_0}(q!)^{-1}\Gamma(q+1,(q+k_0)/h_0), \quad (12)$$

где $\Gamma(\alpha,x)$ — неполная гамма-функция. При условии $n\gg k_0$ функция $J_f(v_n,\ldots)$ практически зависит только от значений v_n.

Анализ соотношения (7) необходимо проводить на основе теории многомерных точечных отображений [9]. Ограничимся исследованием устойчивости неподвижной точки v^* отображения (7), соответствующей распространению стационарной «бегущей волны» массовой кристаллизации. Находим из выражения (9) для величины $k_0(v^*)$

$$k_0(v^*)=\frac{v^*\tau(1-m)/(\sqrt{\pi}\bar{R})}{\ln\left[\dfrac{\sigma_0}{\bar{\sigma}}\exp\left(-\dfrac{\sqrt{\pi}\bar{R}}{v^*\tau(1-m)}\right)\right]}. \quad (13)$$

Графическое решение уравнения (7) с функцией $J_f(v^*)$ в виде (12) и функцией $k_0(v^*)$ в виде (13) представлено на рис. 2. При параметрах задачи, соответствующих кривой для функции $J_f(v^*)$, имеется лишь тривиальное решение $v^*=0$. При параметрах задачи, соответствующих кривой , уравнение (7) имеет три решения (рис. 2): $v_1^*=0, v_2^*=u_1, v_3^*=u_2$.

4. Заключение

Из анализа решений уравнения (7) и их устойчивости можно сделать следующие выводы. В случае существования нетривиальных решений уравнения (7) фронт массовой кристаллизации будет распространяться посредством самосборки со средней скоростью u_2, близкой к средней скорости роста индивидуальных зерен ГГ. Для «запуска» фронта массовой кристаллизации необходимо предварительно инициировать течение пленки раствора по затравке из зерен ГГ. При изменении условий кристаллизации, в частности при увеличении концентрации ингибитора выше критической, когда имеется лишь тривиальное решение уравнения (7) $v_f=0$ (кривая), невозможно движение фронта массовой кристаллизации за счет процесса самосборки.

Список литературы

[1] Кутергин О.Б., Мельников В.П., Нестеров А.Н. Влияние поверхностно-активных веществ на механизм и кинетику гидратообразования газов // ДАН, 1992. Т. 323, № 3. С. 549–553.

[2] Амелькин С.В., Мельников В.П., Нестеров А.Н. Кинетика роста газовых гидратов в разбавленных растворах ингибиторов – неэлектролитов // Колл. журн. 2000. Т. 62, № 4. С. 450–455.

[3] Englezos P., Kalogerakis N., Dholabhai P.D. II Chem. Eng. Science. 1987. V. 42. № 11. P. 2647.

[4] Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты природных условиях. М: Недра, 1992.

[5] Sloan E.D. Clathrate Hydrates of Natural Gases. N.Y.Basel: M.D. Inc., 1990.

[6] Макогон Ю.Ф. Газовые гидраты, предупреждение их образования и использование. М.: Недра, 1985.

[7] Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Г. Свойства газов и жидкостей. Пер. с англ. / Под ред. Соколова Б.И. Л.: Химия, 1977.

[8] Ванаг В.К. Исследование пространственно распределенных динамических систем методами вероятностного клеточного автомата // УФН. 2005. Т. 165, № 5. С. 481–505.

[9] Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. и др. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М: Наука, 1992.

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ 2012

УДК 533.6.011.6

О распространении пожара в однородном степном массиве по наклонной подстилающей поверхности

Асылбаев Н.А., Гималтдинов И.К.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Биишевой, Стерлитамак

Приведены постановка и результаты численного решения задачи о распространении степного пожара в двумерном случае по наклонной подстилающей поверхности. Система дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями редуцирована к дискретной форме с помощью метода контрольного объема. Сеточные уравнения, возникающие в процессе дискретизации, решаются с помощью численного метода.

1. Введение

Степная зона является одним из основных биомов суши. Для зоны степей характерен жаркий и засушливый климат в течение большей части года. В настоящее время степные пожары стали обычным явлением. Сухая трава загорается, а начавшийся пожар быстро расширяет фронт и идет полосой в несколько десятков километров шириной со скоростью 7 м/с. Ширина волны фронта горения при его высоте 2–3 м составляет не более 1 метра. Степные пожары возникают и в гористой местности. Рельеф местности оказывает сильное влияние на поведение пожаров. Это влияние можно наблюдать в любом пожаре в горной местности, однако, оно очень плохо изучено. При степных пожарах гибнут молодые деревца, поэтому степные пожары приостанавливают наступление леса на степь [2]. Таким образом, степные пожары наносят огромный ущерб пастбищам, степной растительности и хозяйственным объектам России, в частности Башкортостану. Поэтому представляет интерес исследование распространения степных пожаров с учетом рельефа местности на базе математической модели [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим распространение степного пожара, полагая, что подстилающая органическую массу степи поверхность наклонена под углом γ к горизонтальной поверхности. Введем контрольную поверхность, отделяющую зону пожара от остальной части пространства, и обозначим ее Γ_0. Тогда структуру степного пожара можно изобразить, как показано на рис. 1.

Считается, что: 1) течение носит развитый турбулентный характер, и молекулярным переносом пренебрегаем по сравнению с турбулентным; 2) плотность газовой фазы не зависит от давления из-за малости скорости течения по сравнению со скоростью звука [1]; 3) полог растительности считается недеформируемой средой. Предполагается, что полог можно моделировать однородной двухтемпературной многофазной пористой реагирующей средой [1]. Рассматривается так называемый продуваемый степной массив [2], когда объемной долей конденсированной фазы лесных горючих материалов, состоящей из сухого органического вещества, воды в жидко-капельном состоянии и золы, можно пренебречь по сравнению с объемной долей газовой фазы, включающей в себя компоненты воздуха и газообразные продукты пиролиза и горения. Для описания переноса энергии излучением используется диффузионное приближение. Считается, что среда находится в локально-термодинамическом равновесии. Турбулентный конвективный перенос, обусловленный действием силы тяжести, описывается с использованием уравнений Рейнольдса [1]. Для математического описания распространения степного пожара введем декартову систему координат: положим, что ось x направлена вдоль подстилающей органическую массу степи поверхности, ось y — перпендикулярно оси x в плоскости подстилающей поверхности, ось z — перпендикулярно осям x и y. Будем полагать, что по направлению оси y все параметры однородны. Тогда задачу о распространении степного пожара будем рассматривать в плоскости xoz.

В соответствии с моделью, принятой в [1], будем полагать, что органическая масса полога ле-

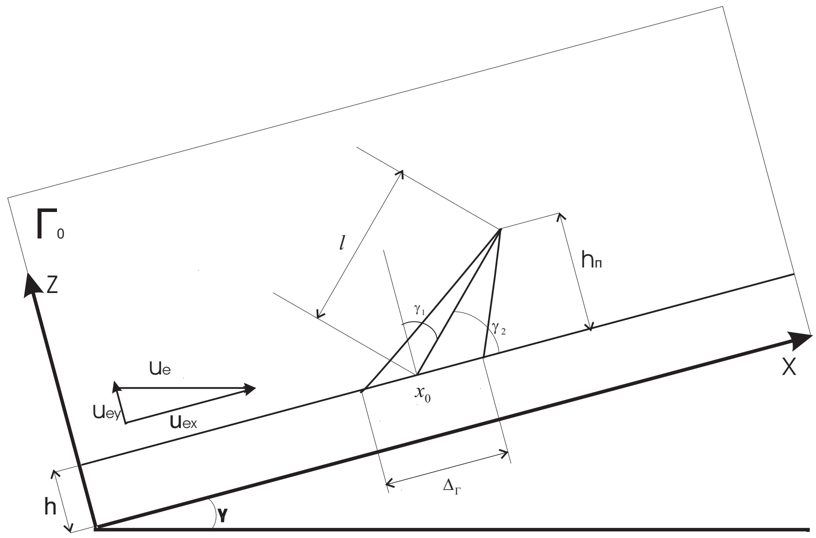


Рис. 1. Схема распространения степного пожара: Δ_{Γ}-ширина фронта пожара; h — высота полога растительности; u_e — скорость ветра над пологом; γ — угол наклона подстилающей поверхности относительно горизонта

са представляет собой многофазную реакционноспособную пористую сплошную среду, состоящую из сухого органического вещества, воды в жидкокапельном состоянии, конденсированных продуктов пиролиза, обогащенных углеродом, минеральной части (золы), газовой и дисперсной фаз. Для простоты считаем, что CO, CH_4, H_2 и другие горючие компоненты, входящие в состав летучих продуктов пиролиза, можно моделировать одним эффективным горючим газом с реакционными свойствами оксида углерода [1], а CO_2 и другие инертные компоненты — эффективным продуктом реакций, получая таким образом газовую фазу, состоящую из трех компонентов: окислителя (O_2), горючего газа (в качестве эффективного горючего газа принимаем CO как преобладающий среди горючих компонентов продуктов пиролиза) и CO_2 совместно с другими инертными компонентами газовой фазы. Перенос энергии от фронта горения к негорящему топливу в общем случае осуществляется кондукцией, конвекцией и излучением [1]. Над пологом степных растений рассматривается факел пламени. Считается, что этот факел излучает как плоская стенка длиной l, расположенная под углом γ_2 к поверхности полога (рис. 1), величина которого зависит от скорости ветра над пологом степи.

Пусть в момент $t = 0$ в зоне G задается повышенная температура, инициирующая степной пожар; требуется определить динамику распространения степного пожара для $t > 0$.

Система уравнений, описывающих распространение степного пожара, основана на системе уравнений распространения верховых пожаров и имеет вид [2]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=Q;$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}=-\rho sc_d u\sqrt{u^2+w^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho(\overline{u'u'})\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho\overline{u'w'}\right)-\sin(\gamma)(\rho-\rho_0)g;$$

$$\frac{\partial\rho w}{\partial t}+\frac{\partial\rho uw}{\partial x}+\frac{\partial\rho w^2}{\partial z}=-\rho sc_d w\sqrt{u^2+w^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho\overline{u'w'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho(\overline{w'w'})\right)-\cos(\gamma)(\rho-\rho_0)g;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p T u)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho c_p T w)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho c_p\overline{u'T'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho c_p\overline{w'T'}\right)+$$

$$+q_5R_5(1-\nu_5)-\alpha_\nu(T-T_s)+c_pTQ;$$

$$-\rho\overline{u_i'u_j'}=\mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\rho K\delta_{i,j},\quad i,j=1,2;$$

$$-\rho\overline{u_j'T'}=\Gamma_t\frac{\partial T}{\partial x_j},\ \Gamma_t=\mu_t/Pr_t,\quad Pr_t=1;$$

$$K=\frac{C_\mu}{C_1^{3/2}}l^2\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{g}{\theta}\frac{\partial(\theta-\theta_\infty)}{\partial z}Pr_t^{-1}\right\},$$

$$C_\mu = C_1 = 0.046;$$

$$\mu_t = \rho l^2 \left\{ 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{3}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{g}{\theta}\frac{\partial(\theta - \theta_\infty)}{\partial z} Pr_t^{-1} \right\}^{1/2},$$

$$\theta = T\left(\frac{1000}{\rho}\right)^{R/c_p};$$

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\rho_i \varphi_i c_{p,i}\frac{\partial T_s}{\partial t}\right) = q_3 R_{3s} - q_2 R_{2s} + \alpha_\nu (T - T_S) +$$

$$+ q_5 R_5 \nu_5 + k_s (U_R - 4\sigma T^4);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{3k_\Sigma}\frac{\partial U_R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c}{3k_\Sigma}\frac{\partial U_R}{\partial z}\right) =$$

$$= k_s\left(cU_R - 4\sigma T^4\right) + Q_R,$$

$$Q_R = \begin{cases} 0.5\sigma T^4\left(1 + \frac{l\cos(\gamma_2) - (x - x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + 2l(x-x_0)\cos(\gamma_2)}}\right), x > x_0 \\ 0, \quad x_1 \le x_0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \rho C_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho u C_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \rho w C_\alpha}{\partial z} = R_{5\alpha} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_t \frac{\partial C_\alpha}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho D_t \frac{\partial C_\alpha}{\partial z}\right),$$

$$\alpha = \overline{1,2}, \quad \sum_{i=1}^{4} C_\alpha = 1, \quad C_4 = C_4' = \text{const};$$

$$p_e = \rho RT \sum_{i=1}^{4}\frac{C_i}{M_i}; \qquad (1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -R_{1s}, \quad \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -R_{2s},$$

$$\rho_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial t} = \alpha_c R_{1s} - \frac{M_c}{M_1} R_{3\omega},$$

$$\rho_4 \frac{\partial \phi_4}{\partial t} = 0, \quad \varphi_5 = 1 - \sum_{i=1}^{4}\varphi_i;$$

$$Q = (1 - \alpha_c) R_{1s} + R_{2s} + \frac{M_c}{M_1} R_{3w};$$

$$R_{1s} = k_1 \rho_1 \varphi_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right),$$

$$R_{2s} = k_2 \rho_2 \varphi_2 T^{-0,5} \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right);$$

$$R_{3\omega} = k_3 s_\sigma \rho C_1 \varphi_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT}\right);$$

$$R_5 = k_5 M_2 T^{-2,25} \exp\left(-\frac{E_5}{RT}\right) \times$$

$$\times \begin{cases} x_1^{0,25} x_2, & x_1 \ge 0,05, \\ x_1 x_2, & x_1 < 0,05, \end{cases}$$

$$R_{51} = -R_{3\omega} - \frac{R_5 M_1}{2M_2};$$

$$R_{52} = (1 - \alpha_c)\nu_\Gamma R_1 - R_5, \quad R_{54} = 0.$$

Здесь $c_{p,i}$, ρ_i, φ_i — удельные теплоемкости, истинные плотности и объемные доли i-ой фазы многофазной реагирующей среды ($i = 1$ — сухое органическое вещество, $i = 2$ — вода в жидкокапельном состоянии, $i = 3$ — конденсированные продукты пиролиза сухого органического вещества, $i = 4$ — минеральная часть (зола), $i = 5$ — газовая фаза); T, T_s — температура газовой и твердой фаз; C_α — массовые концентрации компонентов газовой фазы ($\alpha = 1$ — кислорода, $\alpha = 2$ — горючих компонентов продуктов пиролиза, $\alpha = 3$ — продуктов окисления горючих компонентов пиролиза, $\alpha = 4$ — инертных компонентов газовой фазы, нереагирующих продуктов пиролиза и водяного пара); u, w — проекции скорости на оси x, z соответственно; p, p_e — давление в потоке и в невозмущенной области соответственно; R_{1s} — массовая скорость реакции пиролиза сухого лесного горючего материала (ЛГМ); R_{2s} — массовая скорость испарения влаги, связанной с ЛГМ; $R_{3s} = M_c/M_1 R_{3\omega}$ — массовая скорость убыли коксика (углерода) в результате его горения; R_{51}, R_{52} — массовые скорости исчезновения и образования компонентов газовой фазы (кислорода и оксида углерода); R_5 — массовая скорость газофазной реакции окисления оксида углерода; $q_1 = 0$, $q_2 = 3 \cdot 10^6$, $q_3 = 1.2 \cdot 10^7$, $q_5 = 10^7$ Дж/кг тепловые эффекты реакций и процессов пиролиза ЛГМ, испарения связанной с ЛГМ воды, горения кокса и окисления летучих горючих продуктов пиролиза; C_4' —- неизменная концентрация инертных компонентов; Q — массовая скорость образования газовой фазы; α_ν — коэффициент объемного (межфазного) теплообмена; $\nu_5 < 1$ — доля теплоты газофазной реакции окисления газообразных продуктов пиролиза, поглощенная конденсированной фазой [2]; M_α, M_c, M — молекулярные массы индивидуальных компонентов, углерода и смеси в целом; $s = 0.5$ м$^{-1}$ — удельная поверхность фитомассы полога; $c_d = 0.03$ - коэффициент сопротивления; $s_\sigma = 1000$ м$^{-1}$ — эффективная удельная поверхность коксика; E_1, E_2, E_3, E_5 и k_1, k_2, k_3, k_5 - энергии активации и предэкспоненты химических реакций, численные значения которых определяются соотношениями $E_1/R = 9400$ K, $k_1 = 3.63 \cdot 10^4$ с$^{-1}$, $E_2/R = 60000$ K, $k_2 = 6 \cdot 10^5$ K$^{1/2}$/c, $E_3/R = 10000$ K, $k_3 = 1000$ с$^{-1}$, $E_5/R = 11500$ K, $k_1 = 3 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$; $\alpha_c = 0.06$ — коксовое число ЛГМ; $\nu_\gamma = 0.7$ — массовая доля горючего газа в общей массе летучих продуктов пиролиза; μ_t, λ_t, D_t — коэффициенты динамической вязкости, турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии соответственно; параметр $k_{s\nu} c_{ps}(T_s - T)(1 - \alpha_c) R_1$ характеризует вдув газообразных продуктов пиролиза из конденсированной фазы в газовую [2], степень влияния которого определяется коэффициентом влияния $k_{s\nu} \le 1$; $\rho_1 = 500$ кг/м^3, $\rho_2 = 1000$ кг/м^3,

$\rho_3 = 200$ кг$/$м^3, $\rho_4 = 200$ кг$/$м^3 — истинные плотности сухого ЛГМ, воды, коксика, золы соответственно; $c_{ps} = \sum_{j=1}^{n} c_{pj} C_j$ — средняя теплоемкость смеси газообразных продуктов пиролиза; C_j — их доля в общем объеме газа, выделевшегося в результате этой реакции; $k_7 c_{p7}(T_s - T)R_2$ характеризует вдув паров воды [2], степень влияния которого на общий тепловой баланс газовой определяется коэффициентом влияния $k_7 \leq 1$; значения $k_{5\nu}$, k_7 и ν_5 определялись в результате математических экспериментов путем согласования расчетных и экспериментальных данных по температуре горения во фронте степного пожара [2].

Систему уравнений необходимо решать с учетом начальных и граничных условий:

$$T = T_r, \quad T_s = T_r = 1200\,K,$$

$$C_\alpha = C_{\alpha,r}, \quad x, z \in G, 0 \leq t \leq t_*$$

$$T = T_e,\ T_s = T_e,\ C_\alpha = C_{\alpha,e},\ \ x, z \notin G,\ t = 0,$$

$$T\Big|_{x=0} = T_e, \quad C_\alpha\Big|_{x=0} = C_{\alpha,e}, \quad u\Big|_{x=0} = u_e \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{1/7},$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\infty} = 0, \quad \frac{\partial C_\alpha}{\partial x}\Big|_{x=\infty} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\infty} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\infty} = 0 \quad T\Big|_{z=0} = T_e,$$

$$C_\alpha\Big|_{z=0} = C_\alpha, \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad w\Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=\infty} = 0, \quad \frac{\partial C_\alpha}{\partial z}\Big|_{z=\infty} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=\infty} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=\infty} = 0.$$

Здесь G — область, соответствующая первоначальному очагу горения; t_* — время, в течении которого в очаге пожара поддерживается температура.

Данная система уравнений для численного интегрирования была редуцирована к дискретной форме с помощью метода контрольного объема Патанкара–Сполдинга [3]. Сеточные уравнения, возникающие в процессе дискретизации, разрешались с помощью метода переменных направлений. Согласование полей скорости и давления осуществлялось итерационным образом в рамках алгоритма SIMPLE [3].

В результате численного интегрирования системы уравнений, описывающих процесс распространения степных пожаров, с соответствующими начальными и граничными условиями были получены поля температуры газовой и твердой фаз, массовых концентраций компонентов газовой фазы, объемных долей компонентов твердой фазы в различные моменты времени. На рис. 2, 3 представлены профили температур газовой фазы на

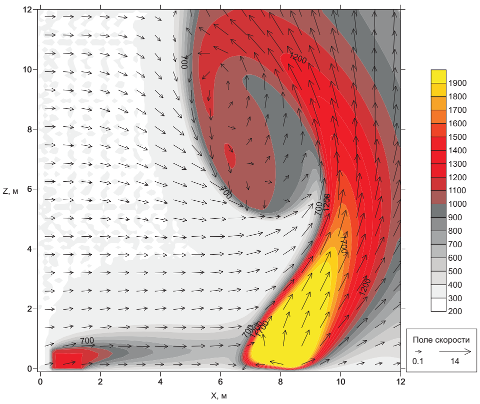


Рис. 2. Температура газовой фазы и поле скорости при скорости ветра 3 м/с, $\gamma = 0$ в момент времени $t = 5$ с ($h = 0.7$ м, $\varphi_1 = 0.0014$)

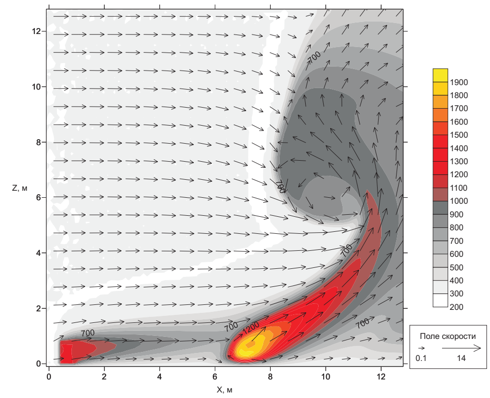


Рис. 3. Температура газовой фазы и поле скорости при скорости ветра 5 м/с, $\gamma = 0$ в момент времени $t = 4$ с ($h = 0.7$ м, $\varphi_1 = 0.0014$)

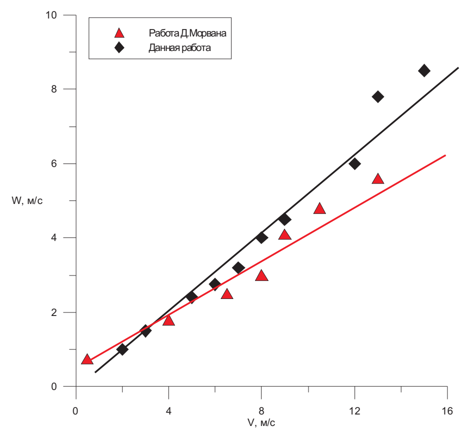


Рис. 4. Сравнение скоростей распространения степного пожара (по оси OX — скорость ветра, по оси OY — скорость распространения степного пожара)

плоскости XOZ при скорости ветра 3 и 5 м/с соответственно. Скорости распространения огня 1.5 и 2.5 м/с, что согласуется с экспериментальными данными [2]. В процессе распространения пожара происходит образование конвективной колонки над фронтом пожара. Возникновение и развитие этого течения обусловлены подъемом нагретых продуктов пиролиза и продуктов сгорания природных горючих материалов в атмосфере. Благодаря этому во фронте пожара возникает уменьшение давления, из-за которого возникает тяга и подсос воздуха из окружающей среды. Видно, что с наветренной стороны фронта пожара образуется крупный вихрь. Разница в скоростях распространения пожара объясняется тем, что при увеличении скорости ветра над пологом растительности происходит отклонение факела пламени ближе к степному горючему материалу (СГМ), тем самым увеличивается тепловой поток от факела пламени и ускоряется процесс сушки и пиролиза СГМ. На рис. 4 приводится сравнение полученных значений скоростей распространения степного пожара в зависимости от скорости ветра с результатами работы D. Morvan «Physical modeling of fire spread in grassland» [4].

На рис. 5, 6, 7 приведены распределения температур газовой фазы и поля скорости при углах наклона подстилающей поверхности $\gamma = 5^\circ$, $\gamma = 20^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ относительно горизонтали. При наклоне подстилающей поверхности в $\gamma = 5^\circ$ происходит увеличение скорости распространения пожара в 1.66 раза по сравнению с распространением пожара по горизонтальной поверхности и достигает значения 2.5 м/с. Это объясняется уменьшением углов наклона факела пламени и конвективной колонки к подстилающей растительность поверхности. При наклоне $\gamma = 5^\circ$ происходит небольшое отклонение конвективной колонки, чем при $\gamma = 0^\circ$, а при увеличении угла наклона γ происходит более заметное отклонение конвективной колонки от вертикальной линии — она «прижимается» к СГМ и, тем самым, ускоряется процесс сушки, пиролиза СГМ и воспламенение горючих продуктов пиролиза СГМ. На рис. 8 приводится зависимость скорости распространения степного пожара от угла наклона подстилающей растительность поверхности при скорости ветра 3 м/с.

3. Заключение

На основе общей математической модели лесных пожаров дана математическая постановка задачи о двумерном распространении степных пожаров. Проведенное в работе моделирование контура степного пожара показало, что рассматриваемая модель правильно отражает основные характерные

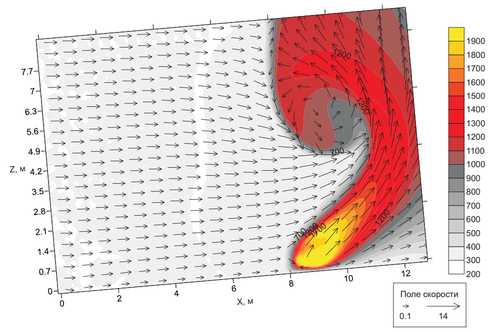


Рис. 5. Температура газовой фазы и поле скорости при скорости ветра 3 м/с, $\gamma = 5^\circ$ в момент времени $t = 4$ с ($h = 0.7$ м, $\varphi_1 = 0.0014$)

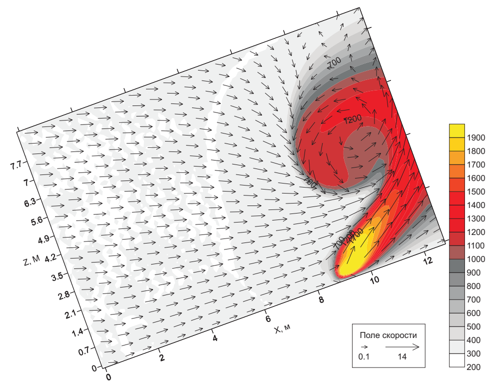


Рис. 6. Температура газовой фазы и поле скорости при скорости ветра 3 м/с, $\gamma = 20^\circ$ в момент времени $t = 4$ с ($h = 0.7$ м, $\varphi_1 = 0.0014$)

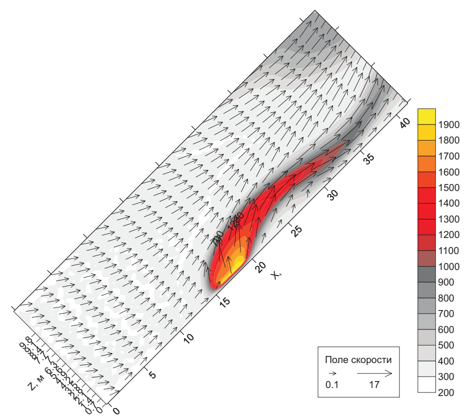


Рис. 7. Температура газовой фазы и поле скорости при скорости ветра 3 м/с, $\gamma = 45^\circ$ в момент времени $t = 4.5$ с ($h = 0.7$ м, $\varphi_1 = 0.0014$)

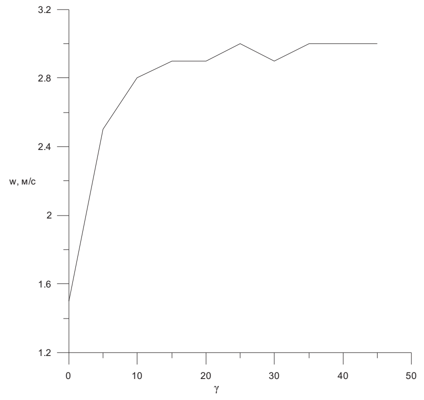


Рис. 8. Сравнение скоростей распространения степного пожара (по оси OX — угол наклона подстилающей поверхности, по оси OY — скорость распространения степного пожара)

особенности пожара. Модель допускает дальнейшее усовершенствование, связанное с учетом различных природных факторов. Известно, что критерием истинности теоретических результатов является их согласование с данными наблюдений за характеристиками реальных степных пожаров. Сравнение опытных профилей температуры для степных пожаров с теоретическими показало, что с учетом точности задания исходных данных эти результаты удовлетворительно согласуются друг с другом. Таким образом, в данной работе был предложен алгоритм численного решения системы методом расщепления по физическим процессам, написан программный продукт, реализующий метод контрольного объема для системы уравнений двумерной двухфазной модели степных пожаров, проведены тестовые расчеты, показывающие, что модель дает качественно правильную картину распространения фронта пожара.

Список литературы

[1] Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними: Новосибирск.: Наука СО, 1992. 404 с.

[2] Гришин А.М. Общая математическая модель степных пожаров и ее приложение. Экологические приборы и системы 12: 2004. С. 25–29.

[3] Патанкар С.В. Численные метода решения задач теплообмена и динамики жидкости. М: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

[4] Morvan D., Meradji S., Accary G. Physical modelling of fire spread in Grasslands [Text] // Fire Safety Journal. 2009. № 44. P. 50–61.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 534.1

Корректные по Тихонову задачи идентификации условий закрепления механических систем[1]

Ахтямов А.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,
Башкирский государственный университет, Уфа

Рассматривается задача идентификации условий закрепления распределенных механических систем по трем собственным частотам их колебаний. На основе условия Плюккера, возникающего при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи и доказана ее корректность по А.Н. Тихонову. Для широкого класса задач найдено явное решение задачи идентификации матрицы краевых условий, выписанное в терминах характеристического определителя соответствующей спектральной задачи. Приведены пример решения конкретной задачи из механики, а также контрпример, показывающий, что двух собственных частот вообще говоря недостаточно для единственности идентификации краевых условий.

1. Введение

При решении задач диагностики состояния технических систем в прикладных исследованиях важную роль играет определение условий закрепления элементов и деталей конструкций и механизмов. Как показано в $[1,2]$ проблема восстановления краевых условий, соответствующих виду закрепления, может быть сведена к задаче идентификации миноров максимального порядка матрицы краевых условий. Эта задача не является корректной по Адамару, так как любые числа не могут быть минорами матрицы (для того чтобы некоторые числа были минорами матрицы требуется выполнение так называемых условий Плюккера).

В настоящей статье решена задача отыскания вида и параметров закрепления одного из концов стержня, на другом конце которого реализуется свободное опирание. Ранее эта задача не решалась. В отличие от уже решенных задач идентификации краевых условий предлагаемый метод предоставляет не только алгоритм, но и дает явное решение задачи. Кроме того, изложение задачи проведено в общих обозначениях, годных для решения широкого круга задач. Оно годится и для идентификации условий закрепления обоих контуров кольцевой мембраны, и для идентификации одного из концов балки, и для идентификации закрепления круговой пластины, и для идентификации условий закрепления одного из концов трубопровода, и для идентификации условий закрепления других распределенных механических систем [2].

Общим для всех этих задач является то, что в них требуется найти матрицу краевых условий

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

с точностью до линейных преобразований строк [2], и то, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$, с помощью которого находятся собственные частоты, во всех этих случаях имеет следующий вид $[2,3]$:

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda) = M_{12} f_{12}(\lambda) + M_{13} f_{13}(\lambda) + \\ + M_{24} f_{24}(\lambda) + M_{34} f_{34}(\lambda), \end{gathered} \tag{2}$$

где через M_{ij} обозначены миноры, составленные из i-го и j-го столбцов матрицы A, а через $f_{ij}(\lambda)$ — функции от спектрального параметра λ, значения которых зависят от фундаментальной системы решений соответствующего дифференциального уравнения спектральной задачи и известных краевых условий.

Так, например, функции $f_{ij}(\lambda)$ в характеристическом определителе (2) для задачи об идентификации вида и параметров одного из концов единичного однородного стержня, другой конец которого заделан, имеют вид [2]:

$$f_{12}(\lambda) = 1 - \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и АН Республики Башкортостан (гранты 11-01-97002-р_поволжье_а и 11-01-12005-офи-м-2011).

$$f_{13}(\lambda) = -\sin\lambda\operatorname{ch}\lambda + \cos\lambda\operatorname{sh}\lambda,$$
$$f_{24}(\lambda) = -\sin\lambda\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda\operatorname{sh}\lambda,$$
$$f_{34}(\lambda) = 1 + \cos\lambda\operatorname{ch}\lambda.$$

Функции $f_{ij}(\lambda)$ для задачи идентификации условий закрепления на внешнем и внутреннем контурах кольцевой мембраны имеют вид [2]:

$$f_{12}(\lambda) = \lambda^2\big(J_1(\lambda a)Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b)Y_1(\lambda a)\big),$$
$$f_{13}(\lambda) = -\lambda\big(J_1(\lambda a)Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)Y_1(\lambda a)\big),$$
$$f_{23}(\lambda) = -\lambda\big(J_0(\lambda a)Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b)Y_0(\lambda a)\big),$$
$$f_{34}(\lambda) = J_0(\lambda a)Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)Y_0(\lambda a),$$

где a и b — соответственно внутренний и внешний радиусы контуров; J_i и Y_j — стандартные обозначения для цилиндрических функций.

Как правило, функции $f_{ij}(\lambda)$ в характеристическом определителе (2) являются целыми (это следует из аналитичности по параметру линейно независимых решений соответствующего дифференциального уравнения [3]).

Задачу идентификации краевых условий по собственным частотам для этих и других упомянутых выше механических систем, в терминах функции (2) можно сформулировать следующим образом: *коэффициенты a_{ij} матрицы A неизвестны; ранг матрицы A равен двум; известны корни λ_k характеристического определителя (2) и то, что все функции $f_{ij}(\lambda)$ являются целыми по параметру λ. Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.*

Отыскание приближенного решения задачи разбивается на два этапа [2]. На первом этапе находят приближенные значения миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} матрицы A. На втором этапе по этим приближенным значениям находят саму матрицу A с точностью до линейных преобразований ее строк.

Известно, что произвольные числа M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} не могут быть минорами матрицы A. Для того чтобы они были минорами матрицы A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось так называемое условие Плюккера [4]:

$$M_{12}M_{34} - M_{13}M_{24} = 0. \tag{3}$$

Поэтому задача второго этапа — отыскание матрицы A с точностью до линейных преобразований строк по приближенным значениям миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} — некорректна по Адамару.

2. Условие Плюккера и множество корректности

Условия Плюккера возникают при отыскании рангового подпространства по своему направляющему бивектору (см. [4]). Их можно также интерпретировать в терминах проективной геометрии как условия, возникающие при отыскании проективной прямой по координатам Плюккера, а также в терминах грассмановой алгебры как плюккеровы условия простоты грассманового агрегата [5]. Однако нам представляется более правильным не прибегать к дополнительной терминологии. В настоящей статье предлагается другой подход к условиям Плюккера, как к условиям, возникающим при восстановлении (с точностью до линейных преобразований строк) матрицы по ее минорам максимального порядка. При этом, новым является запись искомой матрицы непосредственно с помощью миноров, а не через систему уравнений, как это делается обычно. Такой подход делает условие Плюккера более наглядным и позволяет предъявить явное решение задачи отыскания краевых условий.

Нетрудно доказать следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\operatorname{rank} A = 2$. *Чтобы матрицу*

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} \widetilde{a}_{11} & 0 & 0 & \widetilde{a}_{14} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & 0 \end{Vmatrix}$$

можно было получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк необходимо и достаточно, чтобы наборы миноров второго порядка этих матриц совпадали с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов:

$$(\widetilde{M}_{12}, \widetilde{M}_{13}, \widetilde{M}_{24}, \widetilde{M}_{34}) = C(M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}), \tag{4}$$

где $C \neq 0$.

Если $M_{12} \neq 0$, то матрица A с помощью линейного преобразования строк сводится к следующей матрице

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы $\widetilde{A}$ не используется минор M_{34}. И его можно вычислить. Из представления (5) следует, что минор $\widetilde{M}_{12}$ матрицы $\widetilde{A}$ равен M_{12}. Тогда из теоремы 1 получаем, что $C = 1$ и

$$\widetilde{M}_{34} = M_{34} = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ M_{13} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{24}M_{13}}{M_{12}}.$$

А это значит, что если $M_{12}M_{34} \neq M_{24}M_{13}$, то восстановить матрицу по данным минорам невозможно, так как таковой не существует.

Условие $M_{12} \neq 0$ не является существенным. К такому же неравенству придем, когда отличен от нуля другой минор второго порядка матрицы A.

Отсюда вытекает

Т е о р е м а 2 (условие Плюккера). *Для того чтобы набор чисел* M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} *являлся набором миноров матрицы (1) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3), называемое условием Плюккера.*

Из доказанных теорем следует что, если выполняется условие Плюккера (3) и $M_{12} \neq 0$, то (5) представляет явное решение задачи восстановления матрицы A по ее минорам M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}. Аналогично можно выписать явные решения, когда выполняется условие Плюккера (3) и известно, что какой-либо другой из миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} отличен от нуля.

3. Корректность по А.Н. Тихонову поставленной задачи

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 являются собственными значениями соответствующей характеристическому определителю (2) краевой задачи. Подставив эти три значения в (2), получим систему трех уравнений для отыскания четырех миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} матрицы A:

$$\left.\begin{array}{l} M_{12}f_{12}^1 + M_{13}f_{13}^1 + M_{24}f_{24}^1 + M_{34}f_{34}^1 = 0, \\ M_{12}f_{12}^2 + M_{13}f_{13}^2 + M_{24}f_{24}^2 + M_{34}f_{34}^2 = 0, \\ M_{12}f_{12}^3 + M_{13}f_{13}^3 + M_{24}f_{24}^3 + M_{34}f_{34}^3 = 0, \end{array}\right\} \quad (6)$$

где через f_{ij}^k обозначены значения функций $f_{ij}(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Известно [2], что если матрица

$$F = \left\| \begin{array}{cccc} f_{12}^1 & f_{13}^1 & f_{24}^1 & f_{34}^1 \\ f_{12}^2 & f_{13}^2 & f_{24}^2 & f_{34}^2 \\ f_{12}^3 & f_{13}^3 & f_{24}^3 & f_{34}^3 \end{array} \right\| \quad (7)$$

системы уравнений (6) имеет ранг 3, то из этой системы уравнений набор миноров M_{ij} матрицы A находится однозначно с точностью до ненулевого коэффициента, не зависящего от индексов. По которому и можно найти матрицу A с точностью до линейных преобразований ее строк. Эта задача является корректной по А.Н. Тихонову.

Действительно, для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Задача $Rv = z$ называется *корректной по А.Н. Тихонову* (условно корректной), если выполнены следующие условия [6]: 1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V; 2) решение единственно на множестве M; 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \widetilde{z} \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_Z < \delta$ выполнено неравенство $\|v - \widetilde{v}\|_V < \varepsilon$.

В нашем случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (6), и переводящее набор четырех миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} в тройку значений λ_1, λ_2, λ_3.

Напомним, из теоремы 1 вытекает, что получение матрицы A с точностью линейных преобразований строк эквивалентно отысканию наборов четырех миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов. Таким образом, решением задачи является бесконечное множество миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}. Поэтому, чтобы говорить о единственности решения на множестве корректности, необходимо каким-либо способом факторизовать множество миноров. Введем для этого норму

$$\|\cdot\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{24}|, |M_{34}|). \quad (8)$$

Будем называть *множеством корректности* M такой набор миноров $v = (M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34})$, для которого выполнены два условия:

1) условие Плюккера (3);

2) условие принадлежности v единичной сфере:

$$\|v\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{24}|, |M_{34}|) = 1.$$

Из определения вытекает, что M является компактом.

С помощью введенного множества корректности нетрудно показать корректность по А.Н. Тихонову задачи отыскания миноров матрицы A по значениям λ_1, λ_2, λ_3, для которых система уравнений (6) имеет ранг 3.

Пусть V — это пространство $\mathbb{R}^4$ элементов $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ с нормой $\|v\| = \max(|v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|)$; Z — это пространство $\mathbb{R}^3$ элементов $z = (z_1, z_2, z_3)$ с нормой $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|, |z_3|)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Тогда задача $Rv = z$ будет *корректной по А.Н. Тихонову*, так как все три условия определения выполнены (третье условие вытекает из непрерывной дифференцируемости $f_{ij}(\lambda)$ по λ; подробнее см. следующий пункт).

4. Метод отбрасывания четвертого минора

Наиболее известны два метода решения корректных по А.Н. Тихонову задач — метод квазирешения и метод подбора

По сути метод, применяемый в настоящей статье, — это метод подбора. При применении этого метода использована идея записи матрицы A в терминах матрицы F. В отличие от ранее решенных задач, такой подход позволяет найти не просто алгоритм решения, а предъявить явное решение задачи идентификации, которое годится для широкого класса задач.

Метод основан на том, что уравнения (6) являются уравнениями гиперплоскостей в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$. Если $\mathrm{rank} F = 3$, то система уравнений (6) определяет прямую в четырехмерном пространстве, проходящую через начало координат. Известно, что направляющий вектор данной прямой, можно найти по формуле: $\mathbf{a} = (F_{12}, -F_{13}, F_{24}, -F_{34})$, где F_{ij} — минор матрицы F, получаемый вычеркиванием столбца с элементами f^k_{ij} $(k = 1, 2, 3)$. Поэтому эту прямую можно определить следующим параметрическим уравнением:

$$\begin{gathered} M_{12} = F_{12}t, \quad M_{13} = -F_{13}t, \quad M_{24} = F_{24}t, \\ M_{34} = -F_{34}t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{9}$$

Но миноры матрицы A связаны соотношением Плюккера (3). А значит, от матрицы F следует требовать соотношения:

$$F_{12}F_{34} - F_{13}F_{24} = 0. \tag{10}$$

Если данное соотношение не выполняется, то найденные числа M_{ij} не являются минорами матрицы A.

Если априори известно, что искомая матрица A существует, все F_{ij} найдены точно и $F_{12} \neq 0$, то условия (10) выполнены, $M_{12} \neq 0$, а сама матрица A имеет вид (5). Если дополнительно известно, что F_{12} является наибольшим по модулю минором третьего порядка матрицы F, то из (9) получаем, что M_{12} является наибольшим по модулю минором матрицы A, а сама матрица A с точностью до линейных преобразований строк может быть записана следующим образом:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{F_{24}}{F_{12}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{F_{13}}{F_{12}} & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{11}$$

причем ее миноры лежат в множестве корректности M. Все условия корректности по А.Н. Тихонову выполнены, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\widetilde{z} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3) \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_{\mathbb{R}^3} < \delta$ выполнено неравенство $\|(F_{12}, F_{13}, F_{24}, F_{34}) - (\widetilde{F}_{12}, \widetilde{F}_{13}, \widetilde{F}_{24}, \widetilde{F}_{34})\|_{\mathbb{R}^4} < \varepsilon$. Последнее вытекает из аналитичности (а значит, и непрерывности) функций $f_{ij}(\lambda)$ по параметру λ.

Если числа λ_1, λ_2, λ_3, а значит и F_{ij} даны приближенно, то равенство (10) может не выполняться и поэтому формально по минорам F_{ij} матрицу A построить невозможно. Однако в записи (11) для матрицы A не используется минор F_{34}, поэтому его значение нам фактически не нужно. Если F_{12} является наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F, то матрицу (11) можно считать приближенным решением задачи идентификации матрицы A. Причем, как следует из вышеизложенного, чем ближе числа λ_1, λ_2, λ_3 к точным, тем ближе к точным значениям и элементы матрицы A.

Аналогично выписываются явные приближенные решения матрицы A в случаях, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является не F_{12}, а другой минор матрицы A.

Так, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{13}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{F_{34}}{F_{13}} \\ 0 & -\dfrac{F_{12}}{F_{13}} & 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{12}$$

Если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{24}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{F_{12}}{F_{24}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{F_{34}}{F_{24}} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Если же наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{34}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{F_{13}}{F_{34}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{F_{24}}{F_{34}} & 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{14}$$

Таким образом, верна следующая

Т е о р е м а 3. *Если λ_1, λ_2, λ_3 являются собственными значениями соответствующей уравнению (2) краевой задачи,* $\mathrm{rank} F = 3$, *то задача отыскания матрицы A по собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 является корректной по А.Н. Тихонову, где множеством корректности решения этой задачи является компакт M, определенный выше. Решение задачи представляет собой одну из матриц (11)–(14) в зависимости от того, какой из миноров F_{ij} матрицы F является наибольшим по модулю.*

5. Идентификация закрепления стержня на левом конце, в случае когда на правом конце реализуется свободное опирание

Задача об изгибных колебаниях однородного стержня со свободной опорой на правом конце заменой $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ сводится (см., например, [7], [8]) к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \tag{15}$$

$$U_1(y) = a_{11}y'''(0) + a_{14}y(0) = 0, \tag{16}$$

$$U_2(y) = a_{22}y''(0) + a_{23}y'(0) = 0, \tag{17}$$

$$y(1) = 0, \quad y''(1) = 0, \tag{18}$$

где λ — спектральный параметр; $U_i(y,\lambda)$ $(i = 1,2)$ — линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x = 0$ (заделка, свободное опирание, свободный край, плавающая заделка, упругое закрепление) и параметры упругого закрепления.

Характеристическим определителем задачи (15)–(18) при $\lambda \neq 0$ является функция (2), где

$$\begin{gathered} f_{12}(\lambda) = 2\lambda^7(\sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda - \cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda), \\ f_{13}(\lambda) = 4\lambda^6\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda, \\ f_{24}(\lambda) = 4\lambda^4\sin\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda, \\ f_{34}(\lambda) = 2\lambda^3(\sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda - \cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda). \end{gathered} \tag{19}$$

П р и м е р. Пусть $\lambda_1 = 3,94318165$, $\lambda_2 = 7,07141876$, $\lambda_3 = 10,2111163$. Подставив эти значения в (19) и вычислив $f_{ij}^k = f_{ij}(\lambda_k)$, получим матрицу (7) и ее миноры:

$$\begin{gathered} F_{12} = -6026281887095148615,4; \\ F_{13} = -5955836459945,5; \\ F_{24} = 6025953477415493431,3; \\ F_{34} = -57567010136146305,4. \end{gathered}$$

Так как наибольшим по модулю минором является F_{12}, то в качестве явного решения для матрицы A выбираем (11):

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{F_{24}}{F_{12}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{F_{13}}{F_{12}} & 0 \end{matrix} \right\| \approx \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Это означает, что искомые краевые условия имеют вид: $y'''(0)+y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, т.е. на левом конце стержня реализуется упругое опирание с относительным коэффициентом жесткости пружины равным 1.

К о н т р п р и м е р. Покажем, что в случае, если ранг матрицы F равен 2 или вместо трех собственных частот используются только две из них, то корректность по А.Н. Тихонову задачи идентификации краевых условий может нарушиться.

Пусть λ_1, λ_2 — два различных корня уравнения

$$\sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda - \cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda = 0.$$

Тогда $f_{12}(\lambda_i) = f_{34}(\lambda_i) = 0$, $i = 1,2$; $\mathrm{rank}F = 2$.

Получаем две матрицы A краевых условий:

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad A_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, если $\mathrm{rank}F = 2$, то единственности решения поставленной задачи на множестве корректности может и не быть. А значит, и корректности по А.Н. Тихонову в этом случае не будет.

6. Заключение

В работе исследована задача идентификации вида и параметров закрепления распределенной механической системы по трем собственным частотам. Найдены условия, при которых она корректна по А.Н. Тихонову. Предъявлено явное решение в терминах матрицы (7). Решение представляет собой одну из матриц (11)–(14) в зависимости от того, какой из миноров F_{ij} матрицы (7) является наибольшим по модулю.

Список литературы

[1] Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. 2004. Vol. 12, №. 4. P. 393–408.

[2] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.

[3] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[4] Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.

[5] Фиников С.П. Теория пар конгруэнций. М.: Гостехиздат, 1956. 443 с.

[6] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

[7] Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[8] Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 534.113

Идентификация продольных надрезов балки по её собственным частотам

Ахтямов А.М.*, Каримов А.Р.**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,
**Башкирский государственный университет, Уфа

Рассматриваются собственные частоты изгибных колебаний призматической балки с симметричными двусторонними продольными надрезами. Предложен метод, позволяющий вычислить параметры надрезов по двум частотам, взятым из разных спектров. Данные спектры принадлежат изгибным колебаниям в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, которые выбраны таким образом, что в обоих случаях нейтральная линия поперечного сечения параллельна сторонам. В статье также изучена зависимость собственной частоты от глубины нанесённого дефекта. Доказано, что значения частот рассматриваемой балки и идентичной балки без надрезов, не совпадают ни при какой величине дефектов.

1. Введение

Балки с различными формами сечения являются деталями многих несущих конструкций, в которых часто образуются трещины. В целях предотвращения крупных поломок возникает задача их ранней диагностики. Одним из вариантов выявления образовавшихся в стержне дефектов, а также определения их местоположения и размеров является анализ собственных частот колебаний.

Решаемая в статье задача связана с акустической диагностикой и обратными задачами математической физики. Данная работа отличается от традиционных [1–5] тем, что для восстановления искомых параметров используются не спектры одного вида колебаний с различными краевыми условиями, а спектры двух изгибных колебаний (вокруг разных осей балки) с неизменными условиями закрепления.

Открытые поперечные трещины снижают изгибную жесткость стержня, а, следовательно, и собственную частоту изгибных колебаний [1–5]. Возникает вопрос, характерна ли эта закономерность и для рассматриваемой двусторонней продольной трещины (надрез малой ширины)?

В статье показано, как изменяются собственные частоты изгибных колебаний балки в зависимости от глубины b дефектов. Также показано, что частоты балки с надрезами и бездефектной балки не совпадают ни при каких значениях b. Далее решается обратная задача — по двум собственным частотам, взятым из разных спектров, идентифицируются значения глубины b и ширины h надрезов.

2. Прямая задача

В настоящей работе рассматриваются изгибные колебания призматической балки и призматической балки аналогичного размера с двусторонними продольными надрезами, проходящими по всей длине. Поперечное сечение балки с надрезами изображено на рис. 1. Через B и H обозначены ширина и высота балки, через b и h — глубина и ширина надрезов, а через y и z — оси поперечного сечения.

Плотность ρ и модуль упругости E у обеих рассматриваемых балок одинаковы и являются константами. Через J_y^*, J_z^*, F^* обозначены, соответственно, моменты инерций и площадь поперечного сечения балки без надрезов, а через J_y, J_z, F — моменты инерций и площадь поперечного сечения балки с надрезами.

Рассмотрим случай жесткого закрепления левого конца и свободного правого (консольный стержень). Для балки без надрезов собственные частоты изгибных колебаний вокруг осей сечения y и z обозначим, как ω_i^{y*} и ω_i^{z*} $(i = 1, 2, \ldots)$ соответственно, а для балки с надрезами — как ω_i^y и ω_i^z. Уравнение изгибных колебаний стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [6]:

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где E — модуль упругости; J — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси сече-

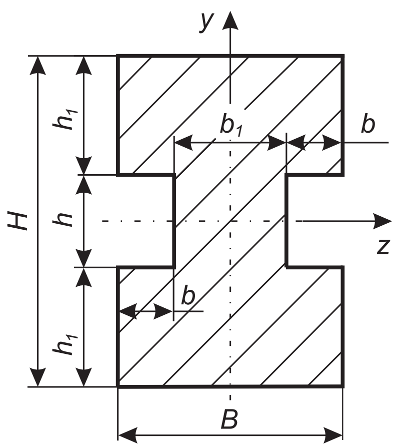


Рис. 1. Поперечное сечение балки с надрезами

ния, перпендикулярной плоскости колебаний; ρ — плотность; F — площадь поперечного сечения; u — прогиб текущей оси стержня.

Уравнение (1) решаем методом разделения переменных. Временный множитель выделяется путем подстановки $u = y(x)\cos\omega t$, что для балки с постоянными по длине параметрами приводит к уравнению [6]:

$$y^{(4)}(x) = \lambda^4 y(x), \tag{2}$$

где

$$\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}, \tag{3}$$

ω — частотный параметр. Краевые условия принимают следующий вид:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(L) = 0,\ y'''(L) = 0. \tag{4}$$

Решив систему из формул (2) и (4) получаем частотное уравнение:

$$\cosh\lambda l \cos\lambda l = -1. \tag{5}$$

Цель задачи определить значения параметров b и h, при которых выполняется соотношение $\omega_i^y/\omega_i^{y*} = 1$ или $\omega_i^z/\omega_i^{z*} = 1$. Используя формулу (3), соотношения можно переписать в виде:

$$\frac{J_y^*}{F^*} = \frac{J_y}{F}, \tag{6}$$

$$\frac{J_z^*}{F^*} = \frac{J_z}{F}. \tag{7}$$

В статье также исследуются изменения частот в зависимости от увеличения глубины надреза.

Еще одной целью данной работы является решение обратной задачи, то есть задачи определения параметров надрезов по известным собственным частотам изгибных колебаний.

2.1. Проверка на возможность совпадения спектров частот изгибных колебаний бездефектной балки и балки с надрезами

Моменты инерций балки без надрезов и балки с надрезами [7] имеют вид:

$$J_y^* = \frac{HB^3}{12}, \tag{8}$$

$$J_y = \frac{h(B-2b)^3 + B^3(H-h)}{12} \tag{9}$$

— вокруг оси y;

$$J_z^* = \frac{BH^3}{12}, \tag{10}$$

$$J_z = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12} \tag{11}$$

— вокруг оси z. А площади их поперечных сечений:

$$F^* = BH, \tag{12}$$

$$F = BH - 2bh. \tag{13}$$

Решив уравнение (6) относительно b, получим три корня, ни один из которых не лежит на интервале от $(0, B/2)$. Уравнение (7) также не имеет решений на данном интервале.

Таким образом, собственные частоты изгибных колебаний вокруг осей y и z балок с надрезом и без надреза не совпадают ни при каких значениях b и h.

2.2. Зависимости отношений ω_i^y/ω_i^{y*} и ω_i^z/ω_i^{z*} от глубины надрезов b

Ввиду формулы

$$\frac{\omega_i^y}{\omega_i^{y*}} = \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}}\lambda_i^2 \Big/ \sqrt{\frac{EJ_y^*}{\rho F^*}}\lambda_i^2 = \sqrt{\frac{J_y F^*}{J_y^* F}},$$

$i = 1, 2, \ldots$, заметим, что отношение ω_i^y/ω_i^{y*} не зависит от i. Аналогично и ω_i^z/ω_i^{z*}. Перепишем формулу заменив символом β все величины независящие от b: $\omega_i^y/\omega_i^{y*} = \beta\sqrt{J_y/F}$. Видим, что отношение частот пропорционально корню из J_y, и обратно пропорционально корню из F. На формулах (9), (11), (13) заметно, что увеличение глубины b надрезов приводит как к уменьшению площади поперечного сечения, так и к уменьшению момента инерции. Но площадь, в отличие от инерции, независимо от рассматриваемой оси колебаний, уменьшается равномерно ($F' = -2h$).

Рассмотрим колебание сечений вокруг оси y. При увеличении глубины надреза b момент инерции J_y (а, следовательно и частота) начинает резко уменьшаться ($J_y' = 2Bhb - 2hb^2 - B^2h/2$), так как сначала снимаются точки наиболее удаленные

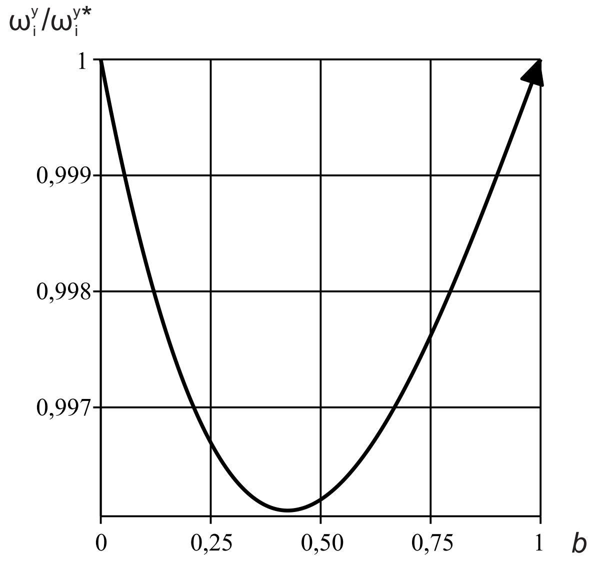


Рис. 2. Зависимости отношений ω_i^y/ω_i^{y*} от глубины надрезов b

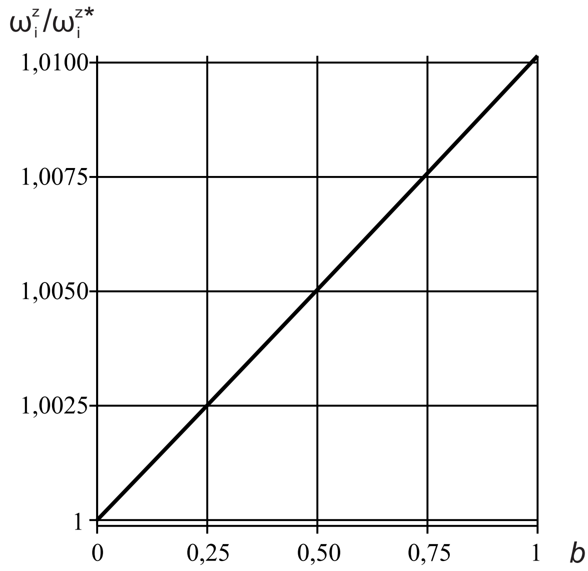


Рис. 3. Зависимости отношений ω_i^z/ω_i^{z*} от глубины надрезов b

от нейтральной оси, то есть точки, обладающие максимальными нормальными напряжениями. Но в определенный момент, когда участок $b \times h$, соединяющий две половины сечения стержня, становится мал, колебания изменяют свое поведение так, что собственные частоты начинают увеличиваться, стремясь к значениям частот бездефектной балки. Описанные выше закономерности хорошо видны на графике (рис. 2). Теперь рассмотрим колебания сечений вокруг оси z (рис. 3). При увеличении глубины надреза b момент инерции уменьшается равномерно (J_z'), притом немного медленнее, чем площадь F. Это связано с тем, что снимаемые точки равноудалены от оси z и потому обладают одинаковыми нормальными напряжениями. В результате отношение ω_i^z/ω_i^{z*} плавно возрастает.

3. Обратная задача — определение размеров надрезов

Необходимо определить ширину b и высоту h надрезов при известных собственных частотах изгибных колебаний. Воспользовавшись для этого формулой (3) видим, что она позволяет определить лишь отношение $J_y/F = \rho(\omega_i^y)^2/E\lambda_i^4$, которое может быть одинаково при различных b и h. По этой причине, для идентификации рассматриваемых надрезов, в расчетах необходимо использовать ещё один спектр частот изгибных колебаний. Действительно, ведь в таком случае, применив формулу (3) для колебаний вокруг оси z, можем найти численное значение второго соотношения: $J_z/F = \rho(\omega_i^z)^2/E\lambda_i^4$. Далее, зная J_y/F и J_z/F, при помощи формул (9), (11) и (13) легко найти параметры надрезов:

$$\begin{cases} \dfrac{J_y}{F} = \dfrac{h(B-2b)^3 + B^3(H-h)}{12BH - 24bh}, \\ \dfrac{J_z}{F} = \dfrac{BH^3 - 2bh^3}{12BH - 24bh}. \end{cases} \tag{14}$$

Пример. Консольная балка имеет параметры: $B = 0,2$ м, $H = 0,3$ м, $L = 3$ м, $\rho = 7720$ кг/м^3, $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ кг/м^2. Собственные частоты изгибных колебаний вокруг осей y и z равны $\omega_1^y = 116,235/$, $\omega_1^z = 176,094$ рад/с. Требуется найти глубину b и ширину h надреза.

Решив трансцендентное уравнение (5) определяем собственное значение $\lambda_1 = 0,625$ для балки данной длины. Используя собственные частоты рассчитываем $J_y/F = 0,00331747039$ и $J_z/F = 0,00761416751$. Далее численно решив систему уравнений (14) получаем значения $b = 0,0750$ и $h = 0,0059$.

4. Заключение

Проведенное исследование показывает, что спектр собственных частот изгибных колебаний балки с надрезами не совпадает со спектром балки без надрезов ни при каких значениях глубины b.

Установлено, что увеличение b приводит к росту собственных частот колебаний вокруг оси z. При этом, собственные частоты колебаний вокруг оси y уменьшаются, но только до определённого момента, после которого начинают расти, стремясь к значениям частот балки шириной B без надрезов.

В статье также предложен метод, позволяющий идентифицировать параметры надрезов, используя два спектра частот изгибных колебаний вокруг разных осей.

Список литературы

[1] Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамик», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.

[2] Gladwell G.M.L. On the scattering of waves in a nonuniform Euler-Bernoulli beam // Proc. Instn. Mech. Engrs. Mech. Science. 1991. № 205. P. 31–34.

[3] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. № 5. С. 29–33.

[4] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 5. С. 83–89.

[5] Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики УНЦ РАН. 2007. С. 201–211.

[6] Вибрации в технике: Справочник / Под. ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение. Т. 1. Колебания линейных систем. 1978. 352 с.

[7] Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Вышэйшая школа, 1970. 630 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529.5

Особенности распространения ударных волн в водных пенах с неоднородной плотностью[1]

Болотнова Р.Х., Агишева У.О.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Проведены численные исследования и сравнение с экспериментальными данными процесса взаимодействия ударной волны с преградой из водной пены с учетом изменения плотности пенной завесы с течением времени. Произведена оценка эффективности демпфирующих свойств пенных барьеров в зависимости от водосодержания.

1. Введение

Среди различных материалов, способных рассеивать и поглощать энергию взрыва и применяемых для защиты зданий, сооружений, транспортных средств, водные пены наиболее удобны, если время и место взрыва известны заранее. С помощью механизмов диссипации и преобразования энергии газожидкостные пены хорошо справляются с задачами шумоподавления, эффективно снижают ущерб от технологических взрывов (возникающих, например, в горнодобывающей промышленности, при сварке или резке взрывом). Способность пенных структур уменьшать все основные характеристики ударных волн (УВ) впервые была обнаружена при исследованиях ударного нагружения пузырьковых экранов, проводившихся Р.И. Нигматулиным [1], В.К. Кедринским [2].

Исследования показали, что затухание мощности УВ в таких барьерах зависит от нескольких параметров: плотности пены (объемной доли и состава фаз) и характеристик ударной волны (амплитуды, длительности). Самопроизвольное разрушение пены происходит под влиянием синерезиса, определяемого гравитационными силами, капиллярным всасыванием и процессом слияния пузырьков, вследствие чего образующаяся жидкость стекает вниз по каналам между пузырьками. Нестабильная структура пены способствует ее разрушению при воздействии УВ.

Плотность пенной защиты изменяется в зависимости от водосодержания $\rho_f = \alpha_l \rho_l + (1 - \alpha_l)\, \rho_g$, где ρ_l, ρ_g — плотности жидкости и газа соответственно. Демпфирующая способность пены существенно зависит от сжимаемости ее ячеек: меру ее сжимаемости определяет скорость звука C_f. Она уменьшается с 330 м/с в чистом газе ($\alpha_l = 0$) до ≈ 50 м/с ($\alpha_l = 0.5$) при прохождении через водную пену или пузырьковую жидкость [3]. Возрастание водосодержания постепенно увеличивает C_f до 1500 м/с соответственно. Когда содержание воды приближается к нулю в отстоявшейся пене, даже малое изменение α_l приводит к сильному изменению C_f.

Особое значение плотности пены для ослабления акустических и ударных волн было хорошо изучено в экспериментах, но ясного теоретического объяснения этого физического явления до сих пор нет [4]. В работе [5] отмечалось, что водные пены с содержанием воды $0.006 < \alpha_l < 0.05$ служат оптимальной защитой от звуковых волн. Авторы [6] экспериментально и численно исследовали роль процесса синерезиса в изменении демпфирующей способности пены в малых промежутках времени; в работе [7] экспериментально исследованы более длительные промежутки отстаивания пены, что предпочтительнее с практической точки зрения. Согласно экспериментальным данным [8] степень защиты зависит также от расстояния до заряда и его массы. В работе [9] экспериментально исследовано влияние угольной пыли на процесс синерезиса: из-за закупоривания каналов между пузырьками частицами пыли процесс старения пены замедляется, и происходит потеря энергии волны за счет трения. Следовательно, добавки из угольной пыли эффективно поддерживают демпфирующие способности пенной

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (11–01–97004_р_поволжье и 11–01–00171-а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-834.2012.1) и Программы фонда фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (ОЭ–13)

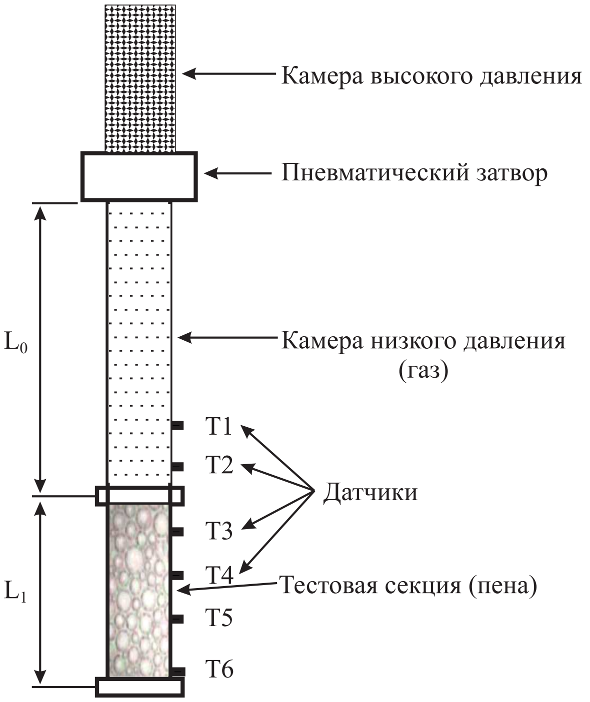


Рис. 1. Схема ударной трубы

преграды достаточно длительное время.

В настоящей работе проводится численное исследование распространения ударной волны в однородных и неоднородных газожидкостных пенах на базе экспериментальных данных работы [7]. Авторы [7] провели экспериментальные исследования прохождения ударных волн в пенах на различных стадиях синерезиса. Исследование проводилось в бездиафрагмальной ударной трубе (рис. 1), состоящей из камеры высокого давления для генерации ударных волн и камеры низкого давления из двух секций: первая заполнена воздухом ($L_0 = 3$ м), вторая — пеной ($L_1 = 0.363$ м). Быстро открывающийся пневматический затвор обеспечил точное воспроизведение волны в экспериментах. Тестовая секция по всей длине заполнялась свежей пеной и присоединялась к нижней части канала. В экспериментах использовались образцы пены с постоянным начальным водосодержанием $\alpha_l = 0.2$. Скорость распространения воздушной ударной волны поддерживалась равной 430 м/с. При проведении испытаний менялся только один параметр — время отстаивания пены до прихода ударной волны ($0 \leq \Delta t \leq 60$ мин). Координаты датчиков давления от начала тестовой секции следующие: $x_{T_1} = -0.193$ м, $x_{T_2} = -0.093$ м, $x_{T_3} = 0.034$ м, $x_{T_4} = 0.128$ м, $x_{T_5} = 0.228$ м, $x_{T_6} = 0.363$ м. В настоящей работе численно моделировалось распространение УВ в заполненной пеной секции. Расчеты проводились для свежей (время синерезиса 5 мин) и отстоявшейся (время синерезиса 20 мин) пены. Также исследовались демпфирующие свойства пенных барьеров различной плотности, находящихся перед защищаемым объектом.

2. Основные уравнения модели

Расчеты проводились на основе уравнений гидродинамики двухфазной среды [1] в однотемпературном, односкоростном приближении с равным давлением в фазах. Поскольку плотность пены по толщине трубы однородна, а изменение плотности происходит только в направлении распространения УВ, то допущение одномерности модели является правомерным. Система уравнений в лагранжевых переменных включает законы сохранения массы для каждой фазы, импульса и энергии смеси.

Законы сохранения массы 1 и 2 фаз:

$$\frac{\alpha_l}{\rho}\frac{\partial \rho_l^0}{\partial t} + \frac{\rho_l^0}{\rho}\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} = -\frac{\rho_l}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial r} = b_1, \tag{1}$$

$$\frac{1-\alpha_l}{\rho}\frac{\partial \rho_g^0}{\partial t} - \frac{\rho_g^0}{\rho}\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} = -\frac{\rho_g}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial r} = b_2. \tag{2}$$

Законы сохранения импульса и энергии для смеси:

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_l}{\rho}\left(\frac{\partial e_l}{\partial \rho_l^0}\right)_T\frac{\partial \rho_l^0}{\partial t} + \frac{\rho_g}{\rho}\left(\frac{\partial e_g}{\partial \rho_g^0}\right)_T\frac{\partial \rho_g^0}{\partial t} + \\ &+\frac{\rho_l}{\rho}\left(\frac{\partial e_l}{\partial T}\right)_{\rho_l^0}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_g}{\rho}\left(\frac{\partial e_g}{\partial T}\right)_{\rho_g^0}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{p}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Условие равенства давлений фаз используется в дифференциальной форме:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial p_l}{\partial \rho_l^0}\right)_T\frac{\partial \rho_l^0}{\partial t} - \left(\frac{\partial p_g}{\partial \rho_g^0}\right)_T\frac{\partial \rho_g^0}{\partial t} + \\ +\left(\frac{\partial p_l}{\partial T}\right)_{\rho_l^0}\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\partial p_g}{\partial T}\right)_{\rho_g^0}\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \\ v\left(t,r\right) = \frac{dx}{dt}, \end{gathered} \tag{5}$$

где ρ_i^0 и $\rho_i = \rho_i^0 \cdot \alpha_i$ — текущая и приведенная плотности i-ой фазы; $\rho = \rho_l^0 \cdot \alpha_l + \rho_g^0 \cdot \alpha_g$ — средняя плотность смеси; ρ_0 — начальная средняя плотность среды; α_i — объемное содержание ($i = l$ — жидкая фаза, $i = g$ — газовая); T — температура фаз; r — лагранжева координата; x — эйлерова координата; v — массовая скорость. $p_i\left(\rho_i^0, T\right)$ и $e_i\left(\rho_i^0, T\right)$ — давление и внутренняя энергия фаз, определяемые с помощью уравнения состояния.

Для жидкости примем используемое в работе [10] уравнение состояния воды в форме Ми–Грюнайзена в виде суммы потенциальной $(p^{(p)}, e^{(p)})$ и тепловой $(p^{(T)}, e^{(T)})$ составляющих для давления и внутренней энергии соответственно, где коэффициент Грюнайзена Γ не зависит от температуры и теплоемкости газаб и жидкости постоянны. Холодные составляющие давления и энергии описываются потенциалом типа Борна–Майера и связаны между собой:

$$e^{(p)}(\rho_l) = \int\limits_{\rho^0}^{\rho_l} \frac{p^{(p)}(\rho_l)}{\rho_l^2} d\rho_l.$$

Тепловая составляющая определяется следующим образом:

$$p^{(T)}(\rho_l, T) = \Gamma(\rho_l)\, c_{Vl} \rho_l T, \quad e^{(T)} = c_{Vl} T.$$

Для газовой фазы принимается уравнение состояния совершенного газа:

$$p = \rho_g R T = \rho_g (\gamma - 1)\, c_{Vg} T, \quad \gamma = c_{pg}/c_{Vg}.$$

Начальные и граничные условия для задачи соответствуют схеме эксперимента:

$$\begin{gathered} t = 0 : 0 \le r \le L_0 + L_1 : v(0, r) = 0, p(0, r) = 1\mathrm{bar}, \\ \alpha_l(0, r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le L_0, \\ \alpha_{l0}(0, r), & L_0 \le r \le L_0 + L_1. \end{cases} \\ T_1 = T_2 = 293K, \\ \rho_l^0(0, r) = \rho_l^0(p_0, T_0), \rho_g^0(0, r) = \rho_g^0(p_0, T_0). \end{gathered} \tag{6}$$

где $r = 0 : v(t, 0) = v(t)$ — закон движения поршня; $r = L : v(t, L) = v(t)$ — условие жесткой стенки.

3. Моделирование процесса распространения ударной волны в пене и сравнение с экспериментальными данными

Прохождение ударной волны резко изменяет свойства пены: ее плотность возрастает, меняется содержание жидкой фазы, граница пены сдвигается. В свою очередь структура пены влияет на интенсивность волны. Были проведены численные исследования основных закономерностей распространения волны в пенах с различной плотностью в условиях экспериментов [7]. Расчеты по приведенной модели сравнивались с показаниями датчиков, находящихся на стенках ударной трубы в различных точках согласно рис. 1. На левой границе использовалось неотражающее условие, на правой — жесткой стенки.

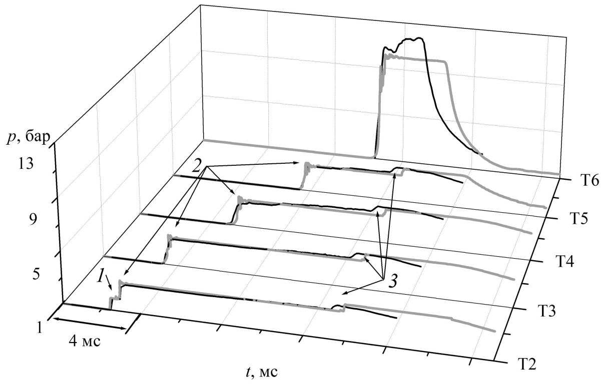


Рис. 2. Сравнение расчетных (светлые линии) и экспериментальных (темные линии) осциллограмм давления на датчиках в ударной трубе. Время синерезиса $t_S = 5$ мин

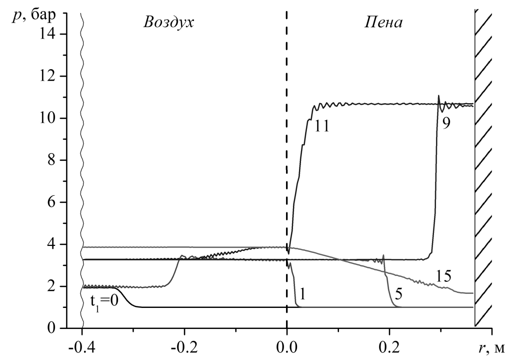


Рис. 3. Расчетные профили давления в зависимости от лагранжевой координаты r вблизи границы пены. Время стекания $t_S = 5$ мин

На первом этапе исследований (рис. 2–3) проводилось моделирование экспериментов по прохождению ударной волны по свежей пене, находящейся в тестовой секции в течение 5 мин.

Отметим несколько основных закономерностей: на датчике $T2$ первое повышение давления (обозначено 1) связано с приходом воздушной ударной волны. На рис. 3 этому соответствует волна, проходящая по заполненной газом секции в момент времени t_1, принятый на рис. 3, 6–8 за начальный. Взаимодействие воздушной волны с более плотным пенным слоем создает отраженную ударную волну и вызывает второе повышение давления на датчике $T2$ (см. рис. 3 при $t = 1$ мс). Величина этого скачка зависит от плотности пены: чем меньше жидкости на ее поверхности, тем более слабой будет отраженная ударная волна. Первые скачки давления на последующих датчиках ($T3$–$T6$) — это время прихода ударной волны, прошедшей в пену. В образце пены волна значительно теряет скорость, доходит до жесткой стенки, отражается от нее (см. рис. 3 при $t = 9$ мс) и возвращается назад по уже сжатому проходящей волной образцу. Далее волна возвращается из пены в воздушную секцию (см. рис. 3 при $t = 11$ мс), при этом давление на фронте существенно понижается и начинается постепенное падение давления в пене (см. рис. 3 при $t = 15$ мс). Прибытие на датчики отраженной от твердой стенки волны на рис. 2 обозначено цифрой 3, и из сравнения видно, что в расчетах эта волна незначительно запаздывает, что, вероятно, объясняется различием в распределении жидкой фазы (в эксперименте за 5 мин жидкость может успеть немного стечь, следственно, поверхность пены отразит более слабую ударную волну, а волна, прошедшая в пену, будет иметь большую скорость; в расчетах же использовалась однородная пена с содержанием воды 0.2 по всей длине столба).

Спустя 20 мин в процессе синерезиса структура пены становится существенно неоднородной: в силу вертикальности ударной трубы содержание воды резко уменьшается в верхней части и увеличивается в нижней. К тому же отток воды во время старения пены приводит к образованию прослойки воды у твердой стенки, толщина которой со временем растет, что ухудшает демпфирующие способности пены. Для численного моделирования содержание воды в пене подбиралось в соответствии с экспериментальными данными в нескольких точках столба пены и высоте прослойки воды. На рис. 4 показана линия, аппроксимирующая водосодержание в пене по экспериментальным данным [7] и используемая в расчетах в качестве начального распределения α_l.

Процесс прохождения ударной волны в таких пенах аналогичен предыдущему эксперименту на свежей пене (рис. 5, 6). Отличительной особенностью является более низкое водосодержание в верхних слоях пены, которые отражают более слабую волну, а проходящая волна выше по давлению и имеет большую скорость в силу неоднородности пены. По мере того, как волна входит в среднюю область образца пены, плотность постепенно растет, и скорость движения волны уменьшается. Сравнивая экспериментальные и расчетные кривые на рис. 5, можно заметить что в расчетах волна запаздывает на датчиках $T3$, $T4$, что объясняется различием между реальным содержанием жидкости в пене в эксперименте и ее приближением. Появление на датчиках отраженной волны, отмеченное цифрой 3, происходит своевременно на всех датчиках, кроме

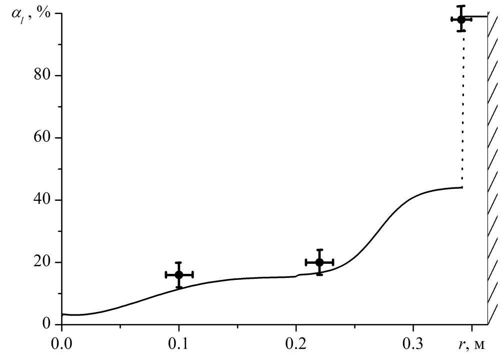


Рис. 4. Линия, определяющая в расчетах водосодержание в пене, полученная на основе аппроксимации экспериментальных данных [7]. Время синерезиса $t_S = 20$ мин (● экспериментальные данные)

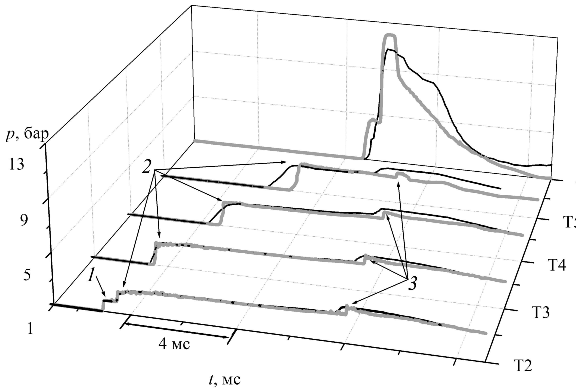


Рис. 5. Сравнение расчетных (светлые линии) и экспериментальных (темные линии) осциллограмм давления на датчиках в ударной трубе. Время стекания пены $t_S = 20$ мин

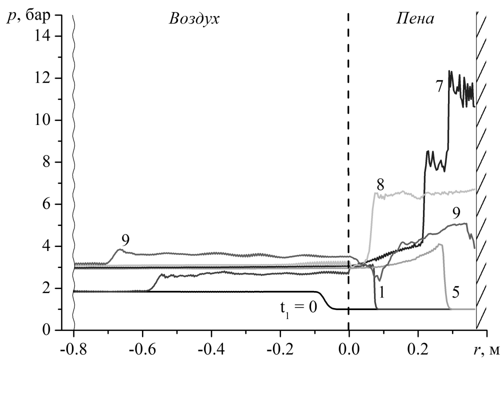


Рис. 6. Расчетные профили давления в зависимости от лагранжевой координаты r вблизи границы пены. Время стекания $t_S = 20$ мин

$T5$, вблизи которого имеются различия в водосодержании между расчетом и экспериментом.

Таким образом, экспериментальные и численные исследования наглядно показали роль синерезиса пены в снижении ее демпфирующей способности: чем дольше происходит процесс старения пены, тем меньше она ослабляет проходящий импульс давления.

4. Исследование демпфирующих характеристик пенного барьера

Для обеспечения пожаро- и взрывобезопасности технологических процессов резки, сварки и обработки материалов с использованием энергии взрыва в городских условиях и ликвидации последствий аварий технически удобно использовать мобильные преграды из водных пен, эффективно локализующие действие взрыва, но при этом не снижающих его эффективности. Создание такого барьера требует тщательного анализа структуры и плотности пены, подходящей для заложенной силы взрыва, поскольку из-за нестабильной структуры барьер может быть разрушен ударной волной, не уменьшив значительно ее силы. Как показывает практика, основное поглощение энергии УВ происходит за счет увеличения массовой скорости пены и сжимаемости ее ячеек.

Численное моделирование взаимодействия ударной волны с пенным барьером толщиной 0.5 м (содержание воды $\alpha_{l0} = 0.2$) проиллюстрировано на рис. 7–8. За начальный момент принято время формирования импульса вблизи пенного барьера. Как показано на рис. 8 через 2 мс УВ достигает пенного барьера, и происходит сжатие пены (содержание воды α_l в первых ячейках пены растет с 0.2 до 0.45, наблюдается незначительное уменьшение ширины барьера). Предельное содержание воды в пене при сжатии ударной волной не превышает $\alpha_l = 0.5$, поскольку при этом значении α_l достигается минимальная скорость звука [3]. Постепенно вся преграда приходит в движение с уменьшением толщины и ростом α_l. Когда УВ выходит в газ, ее интенсивность снижается в 1.5 раза, и в слое пены начинается постепенное падение давления, приводящее к расширению пенного барьера и уменьшению α_l (см. рис. 7–8 при $t = 14$ мс).

Исследования при варьировании начальной плотности пенного барьера показали, что возрастание начального α_l улучшает демпфирующие способности пены, и волна, прошедшая через барьер, имеет все меньшую интенсивность (рис. 9). В дальнейшем важно оценить какого снижения давления требует обеспечение пожаро- и взрывобезопасности

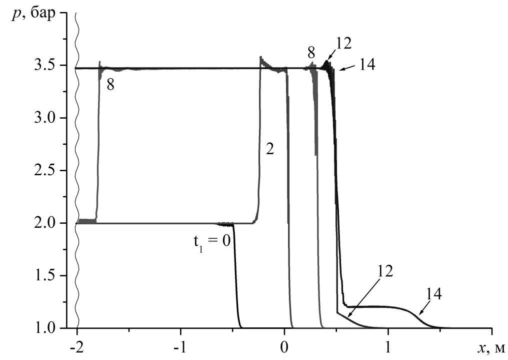


Рис. 7. Расчетные профили давления в зависимости от эйлеровой координаты x вблизи границы пены

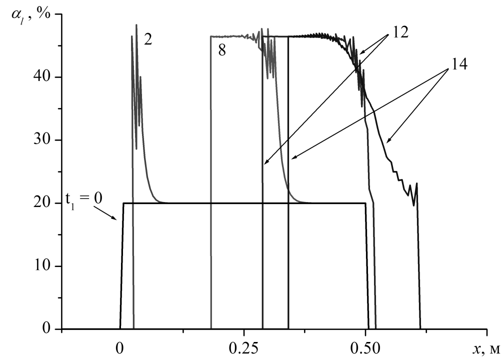


Рис. 8. Расчетные профили водосодержания α_l в зависимости от эйлеровой координаты x вблизи границы пены

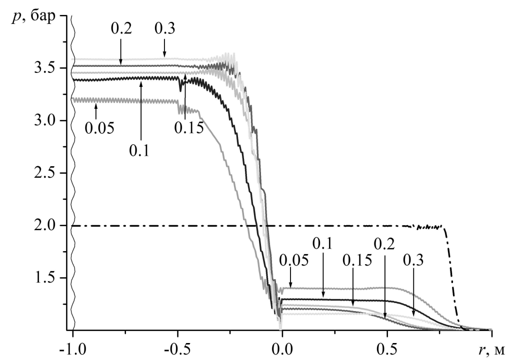


Рис. 9. Расчетные профили давления на фронте ударной волны при выходе из пены с различным содержанием воды α_l

выбранного технологического процесса, учесть наличие пара в газовой фазе и потери энергии на конденсацию при прохождении УВ.

5. Заключение

В работе проведено численное исследование процесса взаимодействия ударной волны с преградой из водной пены на основе уравнений гидродинамики двухфазной среды в однотемпературном, односкоростном приближении с равным давлением в фазах. Было получено удовлетворительное согласование с экспериментальными данными по динамике ударной волны в однородной (время синерезиса 5 мин) и неоднородной (время синерезиса 20 мин) водных пенах. Численно подтверждено снижение защитных способностей такой преграды с течением времени.

Исследования эффективности барьеров из водных пен различной плотности показали, что снижение интенсивности волны в преграде тем больше, чем выше α_l. Если газожидкостная смесь находится в парокапельном состоянии, существенного снижения давления не происходит. В дальнейших исследованиях планируется учесть наличие пара в газовой фазе и оценить влияние фазовых переходов в пене на демпфирующие свойства пенного барьера в УВ.

Список литературы

[1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука. 1987. 360 с.

[2] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва. Эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2000. 435 с.

[3] Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н. Параметрический анализ режимов ударно-волнового воздействия на газожидкостные среды // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. (в печати).

[4] Schmidt E.M., Kahl G.D. Gaseous blast reducer. US Patent N4, 392412. 1983.

[5] Shea J.W., Pater L.L. Foam filled muzzle blast reducing device. US Patent N4, 454798. 1984.

[6] Васильев Е.И., Митичкин С.Ю., Тестов В.Г., Ху Хайбо. Численное моделирование и экспериментальное исследование влияния процесса синерезиса на распространение ударных волн в газожидкостной пене // Журнал технической физики. 1997. № 11. С.1–9.

[7] Britan A., Ben-Dor G., Shapiro H., Liverts M., Shreiber I. Drainage effects on shock wave propagating through aqueous foams // Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects. 2007. № 309. Pp. 137–150.

[8] Raspet R., Griffiths S. K. The reduction of blast noise with aqueous foam. // Journal of Acoustical Society of America. 1983. № 74. Pp. 1757–1763.

[9] Britan A., Liverts M., Ben-Dor G. Shock wave propagation through wet particulate foam // Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects. 2011. № 382. Pp. 145–153.

[10] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529.5

Исследование двумерных нестационарных процессов истечения газонасыщенной жидкости из осесимметричных сосудов[1]

Болотнова Р.Х., Бузина В.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Построена двумерная двухфазная модель газожидкостной смеси. Обоснована достоверность ее численной реализации с помощью сравнительного анализа решения тестовых задач с расчетами по одномерной модели. Установлены закономерности истечения газонасыщенной жидкости из осесимметричных сосудов различной геометрии.

1. Введение

Исследования течений двухфазных газо- и парожидкостных смесей в сужающихся сосудах, двигателях, распыливающих устройствах с осесимметричными соплами, применяемых в новых технологиях пожаротушения, в пневмотранспорте представляют важную теоретическую и практическую задачу.

Актуальность изучения таких истечений связана с развитием атомной энергетики, с проблемой безопасности эксплуатации энергетических установок. Нестационарная одномерная модель взрывного истечения жидкости построена в [1]. В работах [2,3] разработана модель распространения скоростных потоков вскипающей жидкости в условиях разгерметизации сосудов высокого давления в условиях экспериментов [4]. В рамках механики гетерогенных сред численно исследуется истечение газа высокого давления и дисперсной среды из цилиндрического канала в одномерной постановке [5, 6].

В настоящее время наибольший интерес вызывают процесс формирования и динамика пространственной двухфазной струи при взрывном истечении в условиях дозвуковых и сверхзвуковых течений.

В предлагаемой работе построена модель газожидкостной смеси и исследованы двумерные нестационарные процессы истечения из осесимметричных сосудов с использованием широкодиапазонного уравнения состояния воды [7].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 11–01–97004_р_поволжье, 11–01–00171-а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-834.2012.1) и Программы фонда фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (ОЭ–13).

2. Постановка задачи. Основные уравнения

Для исследования процессов истечения газожидкостной смеси в качестве базового был выбран эксперимент из работы [4]. Пусть в закрытом сосуде находится смесь воды и газа под давлением $p = 7$ МПа. В начальный момент времени на правом конце сосуда $x = L$ убирается заслонка, что приводит к мгновенной разгерметизации. Внутрь сосуда распространяется волна разгрузки, а вправо истекает газонасыщенная жидкость, D — угол сужения (см. рис. 1).

На начальном этапе поставленная задача решалась в изотермическом приближении.

Запишем систему дифференциальных уравнений для газожидкостной смеси в цилиндрических координатах в односкоростном приближении с равным давлением компонент смеси [8].

Уравнения движения:

$$\rho\ddot{x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ \rho\ddot{y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\dot{y}}{y}. \qquad (2)$$

Уравнение состояния для воды используется в форме Ми–Грюнайзена в виде суммы холодной и тепловой составляющих давления [7]:

$$p_l = p_l^{(p)}\left(\rho_l\right) + p_l^{(T)}\left(\rho_l, T\right),$$

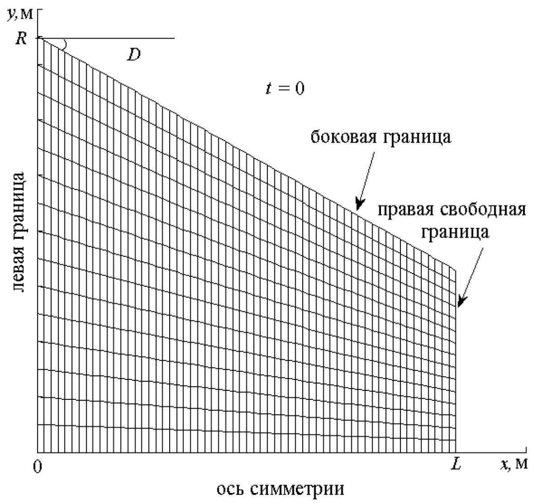


Рис. 1. Схема расчетной области в начальный момент времени

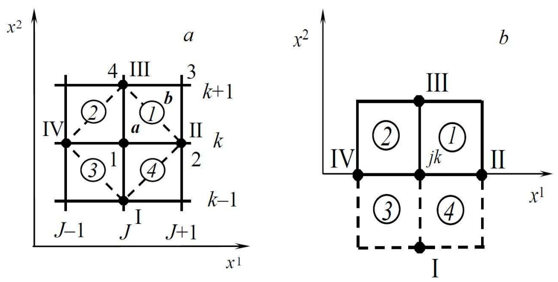


Рис. 2. *a*) — схема расчетной сеточной области; *b*) — схема сеточной области в граничных ячейках

$$p_l^{(p)}(\rho_l) = A\left(\frac{\rho_l}{\rho_{l0}}\right)^{1-\beta} \times$$
$$= \times \exp\left[b\left(1-\left(\frac{\rho_l}{\rho_{l0}}\right)^{-\beta}\right)\right] - K\left(\frac{\rho_l}{\rho_{l0}}\right)^{\xi+1},$$
$$p_l^{(T)}(\rho_l, T) = \Gamma(\rho_l) c_{V_l} \rho_l T.$$

Для газовой фазы применяется уравнение состояния совершенного газа:

$$p_g = R\rho_g T, \tag{3}$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Закон сохранения массы каждой фазы:

$$\frac{\rho_{g0}\alpha_{g0}}{\rho_g} = \frac{\alpha_g\rho_0}{\rho},\ \frac{\rho_{l0}\alpha_{l0}}{\rho_l} = \frac{\alpha_l\rho_0}{\rho}, \tag{4}$$

Закон сохранения массы смеси [9]:

$$\frac{\rho_{g0}\alpha_{g0}}{\rho_g} + \frac{\rho_{l0}\alpha_{l0}}{\rho_l} = \frac{\rho_0}{\rho}. \tag{5}$$

Здесь используются следующие обозначения: x, y — переменные Эйлера; x — ось симметрии; $\dot{x}$, $\dot{y}$ — проекции скорости на соответствующие оси; V — относительный объем смеси; ρ, ρ_g, ρ_l — средняя плотность смеси и плотности газовой и жидкой фаз; α_l, α_g — объемное содержание жидкой и газовой фаз. Нижний нулевой индекс относится к начальному состоянию; A, K, b, ξ, β — постоянные.

3. Метод решения

Численное решение задачи выполнялось методом сквозного счета Уилкинса на лагранжевой сетке [8].

Выпишем конечно-разностные соотношения для уравнений (1)–(2). Расчетная область делится на четырехугольники сеткой, которая движется вместе со средой (см. рис. 2(a)).

Масса газожидкостной смеси для каждого четырехугольника в начальный момент времени вычисляется по формуле:

$$M_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_0}{V_0}\right)_1 \left[\, \left(y_2^0 + y_3^0 + y_4^0\right) A_a^0 + \right.$$
$$\left. + \left(y_1^0 + y_2^0 + y_4^0\right) A_b^0 \,\right]_1, \tag{6}$$

где A_a, A_b — площади треугольников a и b:

$$(A_a)_1^n = \frac{1}{2}\left[\, x_2^n\left(y_3^n - y_4^n\right) + x_3^n\left(y_4^n - y_2^n\right) + \right.$$
$$\left. + x_4^n\left(y_2^n - y_3^n\right) \,\right],$$
$$(A_b)_1^n = \frac{1}{2}\left[\, x_2^n\left(y_4^n - y_1^n\right) + x_3^n\left(y_1^n - y_2^n\right) + \right.$$
$$\left. x_4^n\left(y_2^n - y_4^n\right) \,\right],$$
$$A_1^n = (A_a)_1^n + (A_b)_1^n,$$

где A^n — площадь треугольника в момент времени t^n; n — шаг разбиения по времени.

Относительный объем определяется из закона сохранения массы (6):

$$V_1^n = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_0}{M}\right)\left[\, \left(y_2^n + y_3^n + y_4^n\right) A_a^n + \right.$$
$$\left. + \left(y_1^n + y_2^n + y_4^n\right) A_b^n \,\right]_1, V_1^n = \left(\frac{\rho_0}{\rho^n}\right)_1. \tag{7}$$

Уравнения движения центрируются в точке j, k и находятся на половинном шаге по времени $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$:

$$\dot{x}_{j,k}^{n+1/2} = \dot{x}_{j,k}^{n-1/2} - \frac{\Delta t^n}{2\varphi_{j,k}^n}\left[\, p_1^n\left(y_2^n - y_3^n\right) + \right.$$
$$+ p_2^n\left(y_3^n - y_4^n\right) + p_3^n\left(y_4^n - y_1^n\right) +$$
$$\left. + p_4^n\left(y_1^n - y_2^n\right) \,\right], \tag{8}$$

$$\dot{y}_{j,k}^{n+1/2} = \dot{y}_{j,k}^{n-1/2} - \frac{\Delta t^n}{2\varphi_{j,k}^n}\left[\, p_1^n\left(x_2^n - x_3^n\right) + p_2^n\left(x_3^n - x_4^n\right) + p_3^n\left(x_4^n - x_1^n\right) + p_4^n\left(x_1^n - x_2^n\right)\,\right], \tag{9}$$

$$\varphi_{j,k}^n = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\rho_0 A^n}{V^n}\right)_i .$$

Новые координаты сетки определяются на следующем шаге по времени:

$$x_{j,k}^{n+1} = x_{j,k}^n + \dot{x}_{j,k}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2}, \tag{10}$$

$$y_{j,k}^{n+1} = y_{j,k}^n + \dot{y}_{j,k}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2}. \tag{11}$$

В уравнениях (6)–(11) скорость рассчитывалась для узлов сетки; плотность, масса, объем, давление — для центров ячеек.

Начиная с момента формирования четырехугольной сетки, узлам сетки присваиваются начальные распределения скоростей, ячейкам — начальная плотность и газосодержание α_{g0}, и вычисляется общая масса каждой ячейки и масса каждой фазы — неизменные в процессе решения:

$$m_{ij} = \rho_{0ij}\frac{A_{ij}^n}{V_{ij}^n},\; V_{ij}^n = \frac{\rho_{0ij}}{\rho_{ij}^n},$$

$$m_{g_{ij}} = \rho_{g_{ij}}\alpha_{g_{ij}}V_{ij}^n,\; m_{l_{ij}} = \rho_{l_{ij}}\left(1-\alpha_{g_{ij}}\right)V_{ij}^n.$$

Начальные условия для $t = 0$: $p_0 = 7$ МПа, $T_0 = 293$ К, $\alpha_g = \alpha_{g0}$, $\alpha_{l0} = 1 - \alpha_{g0}$.

На левой границе задается условие жесткой стенки, на правой — свободной поверхности. Для $y = 0$ — условие симметрии; для боковой границы сосуда — условие скольжения, т.е. проекция скорости по нормали к боковой границе $v_n = 0$ (см. рис. 1).

При вычислении условий на свободных поверхностях в расчетах вводились «псевдоячейки», в которых давление равно атмосферному, а масса ячеек нулевая (рис. 2(b)). На оси симметрии использовалось условие фиксированной границы. Для этого масса «псевдоячеек», получаемых зеркальным отображением через границу, приравнивалась к массе отражаемых ячеек. Для граничных ячеек, покидающих сосуд, когда $x_L > x_{l0}$, принимается условие свободной поверхности.

4. Обоснование метода расчета

В предварительных расчетах для проверки достоверности решения по двумерной модели был проведен сравнительный анализ с решением аналогичных задач в одномерной постановке. Для этого использовалась двухфазная модель газожидкостной среды в однотемпературном, односкоростном,

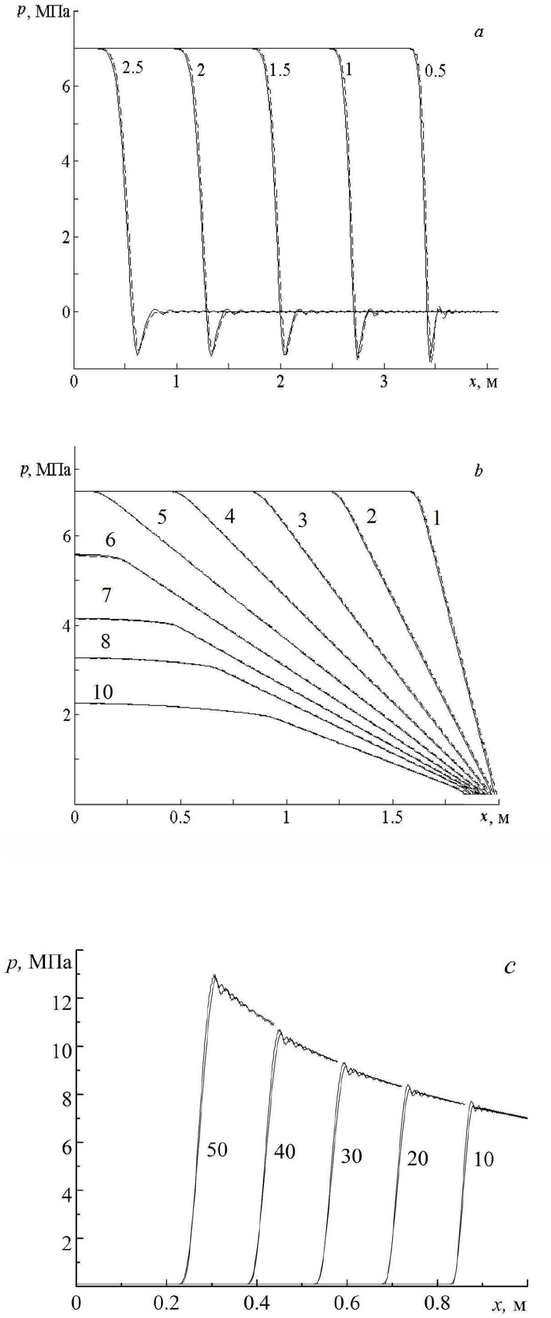
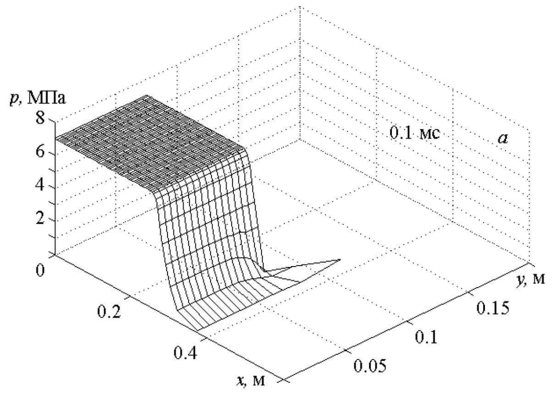


Рис. 3. Расчетные профили давления p по двумерной модели в одномерной постановке в лагранжевых координатах в моменты времени, указанные в (мс) — сплошная линия; пунктирная линия — расчеты по одномерной модели. *a* — истечение из трубы чистой жидкости; *b* — истечение газожидкостной смеси $\alpha_g = 0.05$; *c* — цилиндрическое обжатие сосуда с чистой жидкостью



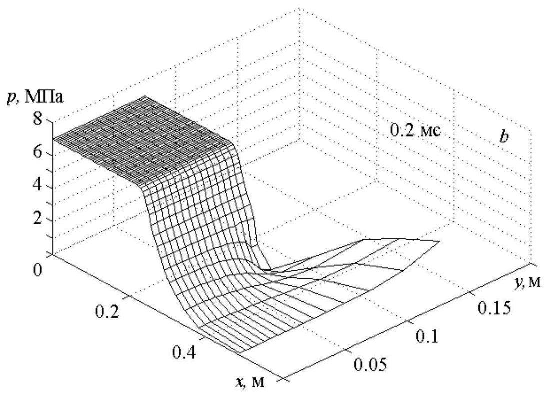


Рис. 4. Динамика поля давления в различные моменты времени (мс) в эйлеровых координатах для задачи истечения чистого газа из трубы

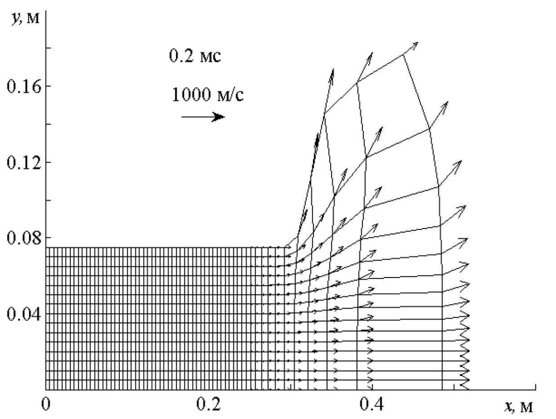


Рис. 5. Мгновенное поле скоростей и деформация лагранжевой сетки для задачи истечения газа — азота в системе эйлеровых координат в момент времени $t = 0.2$ мс

одномерном плоском и цилиндрическом приближениях [2, 10].

На рис. 3(a) приведено сравнение результатов решения задачи истечения чистой жидкости в одномерном плоском приближении при следующих начальных условиях: длина трубы $L = 4.1$ м, $d = 0.075$ м, $v_0 = 0$, $p_0 = 7$ МПа. На левой границе: жесткая стенка $v(t, 0) = 0$, справа — свободная поверхность [2].

На рис. 3(b) показано сравнение расчетов для задач истечения газонасыщенной жидкости в одномерном плоском приближении. Содержание газа — азота 5%, длина трубы $L = 2$ м, $d = 0.075$ м. Граничные условия аналогичны предыдущей задаче [2].

На рис. 3(c) представлено решение задачи обжатия сосуда с чистой жидкостью в одномерном цилиндрическом приближении, длина трубы $L = 1$ м, $d = 0.075$ м, $v_0 = 0$, $p_0 = 0.1$ МПа. На левой и правой границах — жесткая стенка, по боковой границе приложено постоянное давление $p(t, x) = 7$ МПа.

На указанных рисунках пунктиром обозначены расчеты с использованием одномерной модели, сплошная линия — решение двумерной задачи в одномерной постановке. Кроме того, скорость волны разгрузки оценивалась с аналитическим решением [12, 13] и с результатами, полученными в [9]. Имеется хорошее согласование расчетов по обеим моделям.

5. Численное моделирование нестационарного истечения газожидкостной смеси

На рис. 4, 5 представлено численное решение задачи истечения газа из цилиндрического сосуда. Длина трубы равна $L = 0.3$ м, радиус $R = 0.075$ м. Начальное давление $p_0 = 7$ МПа, что выше критического давления, приводящего к запиранию потока, и, как следствие, к сверхзвуковому истечению в газе [11]. Режим сверхзвукового истечения сопровождается высокоскоростным разлетом расширяющегося газа из трубы (см. рис. 5). На указанном временном интервале одномерность течения в центре трубы сохраняется. Оценка давления для критического истечения газа из полубесконечной трубы, полученная в работе [11], подтверждена расчетами по двумерной модели.

На рис. 6 показана динамика поля давления газонасыщенной смеси из цилиндрического сосуда с малым газосодержанием ($\alpha_{l0} = 0.9999$). Согласно оценкам [11] для данной задачи сверхзвуковой режим на этой стадии истечения не реализуется, т.к. перепад давления в жидкости меньше 10^3 МПа,

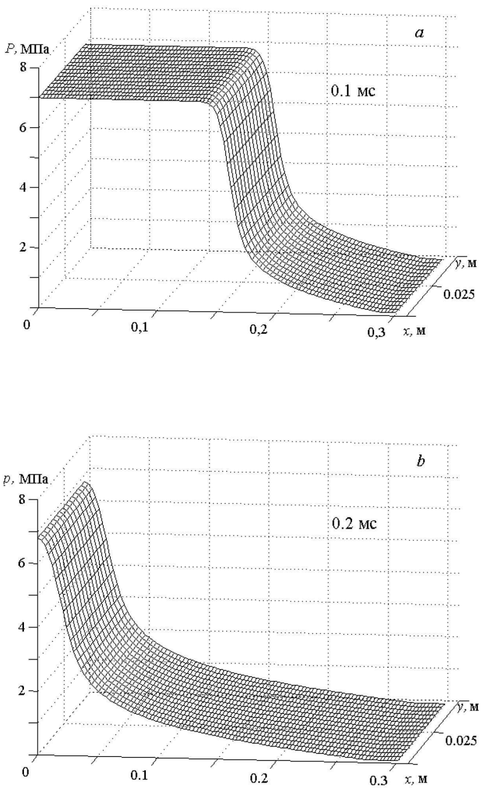


Рис. 6. Динамика поля давления в различные моменты времени (мс) в эйлеровых координатах для задачи истечения из трубы газонасыщенной жидкости с малым содержанием газа ($\alpha_l = 0.9999$)

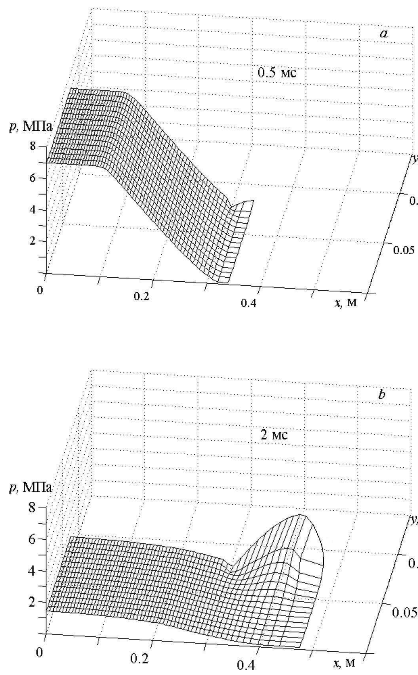


Рис. 7. Динамика поля давления газожидкостной смеси в различные моменты времени (мс) в эйлеровых координатах (содержание газа азота 0.05)

и разлет потока происходит только в направлении оси x ($v_y = 0$).

На рис. 7, 8(a) приведены результаты расчетов по истечению газожидкостной смеси из трубы с газосодержанием $\alpha_{g0} = 0.05$. В отличие от предыдущей задачи имеет место сверхзвуковой режим истечения с интенсивным расширением газовой фазы и ее разлетом при истечении из открытого участка сосуда (см. распределение объемного газосодержания на рис. 8(a)). На фрагменте (b) рис. 8 показаны результаты расчетов истечения газожидкостной смеси $\alpha_{g0} = 0.05$ из сужающегося сосуда ($\operatorname{tg} D = 0.15$). По сравнению с задачей истечения из цилиндрического сосуда (рис. 8(a)), скорость и дальность разлета газа из сужающегося сосуда более интенсивна в направлении v_x.

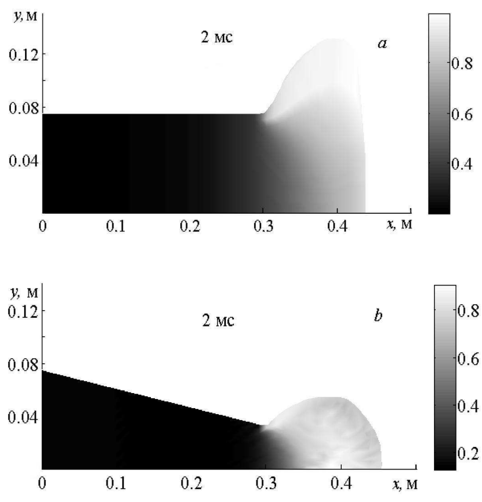


Рис. 8. Мгновенные распределения объемного содержания газовой фазы в момент времени 2 мс ($\alpha_g = 0.05$): *a* — в случае истечения из трубы; *b* — истечение из конуса с тангенсом угла сужения $\operatorname{tg} D = 0.15$

6. Заключение

В настоящей работе предложена двумерная с цилиндрической симметрией двухфазная модель газожидкостной смеси для описания нестационарных процессов истечения из сосудов различной геометрии. Численная реализация модели получена на основе метода Уилкинса. Проведено тестирование модели на примере решения задач в одномерном, односкоростном приближениях. Получены пространственные распределения давления, скорости и газосодержания для задач нестационарного истечения газонасыщенной жидкости при различных газосодержаниях из цилиндрических и сужающихся сосудов. Проанализирован режим истечения в зависимости от начальных условий. Авторами планируется продолжение исследований различных режимов пространственных течений двухфазной газопарожидкостной смеси с учетом фазовых переходов.

Список литературы

[1] Pinhasi G.A., Ullmann A., DayanA. 1D plane numerical model for boiling liquid expanding vapor explosion (BLEVE) // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2007. T. 50. C. 4780–4795.

[2] Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2012 № 4. (в печати).

[3] Ивашнев О. Е. Самоподдерживающиеся ударные волны в неравновесно кипящей жидкости // Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. М., 2009. 40 с.

[4] Edwards A.R., O' Brien T.P. Studies of phenomena connected with the depressurization of water reactors // Journal of The British Nuclear Energy Society. 1970. Vol. 9, № 1–4. P. 125–135.

[5] Казаков Ю.В., Федоров А.В. Расчет разлета сжатого объема газовзвеси // ПМТФ. 1987. № 5. С. 139–144.

[6] Иванов А.С., Козлов В.В., Садин Д.В. Нестационарное истечение двухфазной дисперсной среды из цилиндрического канала конечных размеров в атмосферу // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 3. С. 60—66.

[7] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.

[8] Вычислительные методы в гидродинамике. /Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг. М.: Мир. 1967. 384 с.

[9] Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н. Параметрический анализ режимов ударно-волнового воздействия на газожидкостные среды // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. (в печати).

[10] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука. 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.

[11] Губайдуллин А.А. Введение в волновую динамику газожидкостных сред. ТюмГНГУ. 2006. 86 с.

[12] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1977. 440 с.

[13] Седов Л.И., Коробейников В.П., Марков В.В. Теория распространения взрывных волн // Труды математического института АН СССР. 1986. Т. 175. С. 178–216.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.5

Исследование влияния диффузии газа на динамику пузырька в акустическом поле[1]

Волкова Е.В.[*,**], **Насибуллаева Э.Ш.**[*,**], **Ахатов И.Ш.**[**,***]

[*]Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,
[**]Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», БашГУ, Уфа,
[***]Department of Mechanical Engineering, North Dakota State University, Fargo, USA

Решается задача диффузии газа между сферически–симметричным газовым пузырьком и жидкостью в изотропном акустическом поле. Задача решается как для одиночного пузырька, так и для пузырька в монодисперсном кластере. Разработан численный метод решения диффузионной задачи. Для осциллирующей части диффузионной задачи проведены численные эксперименты для различных амплитуд внешнего давления. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных по аппроксимационной теории, и с помощью численного метода, представленного в данной работе. Исследовано насколько сильно влияет учет изменения массы при расчете динамики пузырька. Для обширного параметрического исследования проводится распараллеливание алгоритма и оценка эффективности распараллеливания.

1. Введение

Акустическая кавитация — это образование в жидкости полостей, заполненных газом, паром или их смесью (так называемых, кавитационных пузырьков) благодаря прохождению акустической волны большой интенсивности через жидкость. Исследование роста или растворения пузырьков, подвергающихся воздействию сильного акустического поля за счет диффузии газа является важной задачей во многих химических и физических процессах.

Другим интересным явлением является сонолюминесценция одиночного пузырька [1,2]. Из экспериментов по сонолюминесценции одиночного пузырька было получено, что пузырек может колебаться непрерывно несколько дней без изменения своего размера.

Различные факторы могут влиять на образование устойчивых кавитационных пузырьков: направленная диффузия, частота звукового поля, тип жидкости, поверхностное натяжение, количество растворенного газа в жидкости, вязкость и т.п. В данной работе внимание сфокусировано в основном на влиянии направленной диффузии на динамику одиночного пузырька или пузырька в кластере при воздействии сильным акустическим полем.

Изучению динамики как одиночного пузырька, так и пузырька в кластере посвящена обширная литература. Но до настоящего времени при исследовании диффузионной задачи, как правило, использовались аппроксимационные модели, которые не могут дать полного представления о данном процессе (см., например, [3–5]). Кроме того, во всех этих работах не бралось во внимание влияние изменения массы пузырька, обусловленное диффузией, на динамику самого пузырька.

Основной целью данной работы является исследование того, как сильно влияет изменение массы газа в пузырьке на динамику пузырька, совершающего сферически–симметричные радиальные колебания под действием акустического поля. Для этого авторами данной статьи были разработаны численный метод и математическая модель, которая позволяет решать диффузионную задачу для сферического пузырька в изотропном акустическом поле для пузырьков, совершающих сильно нелинейные колебания.

Следует отметить, что прямые расчеты требуют относительно небольших шагов по времени для обеспечения вычислительной устойчивости и детального решения динамики пузырька, а это требует большого количества машинного времени для вычисления многих периодов колебаний. Кроме того, параметрические исследования требуют большого числа расчетов. Это накладывает определенные требования к численным методам, которые должны быть надежными и достаточно быстрыми.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040) и РФФИ (гранты №№ 11–08–00823, 11–01–97007).

Мы уделили внимание данным вопросам, в частности, при распараллеливании и оценке эффективности работы разработанного программного обеспечения.

2. Постановка задачи

2.1. Основные уравнения

В работе рассматривается сферически–симметричный газовый пузырек в изотропном поле давления. Моделирование задачи основывается на следующих допущениях: теплообмен в жидкости отсутствует; изменение размеров пузырька за период колебания происходит только за счет диффузии; разница между скоростью жидкости на поверхности и скоростью изменения радиуса пузырька считается незначительной для уравнения Келлера–Миксиса.

В невозмущенном начальном состоянии, которое будет обозначаться нижним индексом «0», выражения для давления p_g, плотности ρ_g и массы m_g газа имеют следующий вид:

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \rho_{g0} = \frac{p_{g0}}{R_g T_0}, \quad m_{g0} = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho_{g0},$$

где a — радиус пузырька; ρ_g — плотность газа; p_g — давление газа в пузырьке; m_g — масса газа в пузырьке; σ — поверхностное натяжение; R_g — универсальная газовая постоянная; T — температура окружающей жидкости.

Пузырек колеблется под действием акустического поля, изменяющегося по закону синуса: $p_a(t) = p_0 - \Delta P \sin \omega t$, где p_a — давление в жидкости вдали от пузырька; ΔP — амплитуда звукового давления; ω — круговая частота. Предполагается, что длина волны звукового давления во много раз превышает размеры пузырька $\omega a \ll C$, где C — скорость звука в жидкости.

Скорость переноса массы через подвижную границу пузырька определяется через градиент концентрации газа c по следующей формуле

$$\dot{m}_g = 4\pi a^2 \rho_l D \left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=a},$$

где ρ_l — плотность жидкости; D — коэффициент диффузии; r — сферическая координата. Полагая поведение пузырька политропным, получим следующую формулу для давления газа p_g в пузырьке:

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}}\right)^\gamma = \left(\frac{m_g}{m_{g0}}\right)^\gamma \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma}.$$

Здесь γ — показатель адиабаты.

При квазиизотермических условиях масса газа меняется очень медленно. В этом случае справедливо

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left(\frac{m_g}{m_{g0}}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma}.$$

Динамика одиночного пузырька описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением Келлера–Миксиса [6]

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\dot{a}}{C}\right) a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \left(1 - \frac{\dot{a}}{3C}\right) = \\ = \left(1 + \frac{\dot{a}}{C}\right) \frac{P - p_a}{\rho_l} + \frac{a}{\rho_l C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[P - p_a], \end{aligned} \qquad (1)$$

в котором

$$P = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}\right)\left(\frac{m_g}{m_{g0}}\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma} - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\mu}{a}\dot{a},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; μ — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Начальные условия для уравнения (1):

$$a\,(0) = a_0, \quad \dot{a}\,(0) = 0.$$

Динамика пузырька в монодисперсном кластере и динамика самого кластера описываются следующей системой уравнений [7]:

$$\begin{aligned} a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 &= \frac{P - p_c}{\rho_l}, \\ R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= \frac{p_c - p_a}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p_c - p_a\right], \\ Na^2\dot{a} &= R^2\dot{R}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $p_c = p_c(t)$ — давление жидкости в кластере; $R = R(t)$ — радиус кластера; N — число пузырьков.

Уравнение диффузии растворенного в жидкости газа в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{a^2\dot{a}}{r^2}\frac{\partial c}{\partial r} = D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right), \qquad (3)$$

где c — массовая концентрация газа, растворенного в жидкости; $\dfrac{a^2\dot{a}}{r^2}$ — радиальное поле скоростей. Поле скорости в жидкости зависит от времени, пространственно неоднородно и возникает в области с подвижной границей. Граничное условие на поверхности пузырька вычисляется по закону Генри:

$$c|_{r=a} = c_a = H \cdot p_{g0} \cdot \left(\frac{m_g}{m_{g0}}\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma},$$

где H — константа Генри. Предполагается, что пузырек образовался в жидкости, которая изначально имела однородную концентрацию газа c_∞. Исходя из этого, начальное и граничное условия вдали от стенок пузырька будут иметь следующий вид

$$c|_{r,t=0} = c_\infty = H \cdot p_{g0}.$$

Из уравнения диффузии (3) необходимо вычислить поток массы из пузырька в жидкость:

$$j = -\rho_l D \left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=a}.$$

Аналогично работе [3] для устранения вычислительных проблем, связанных с подвижной границей, граница зафиксирована с помощью переменной Лагранжа $\zeta = r^3 - a^3$.

Обозначая $\widetilde{c} = c - c_\infty$, $\widetilde{c}_a = c_a - c_\infty$ и вводя новую переменную для обозначения времени

$$\tau(t) = 9D \int\limits_0^t a^4(t')\,dt', \quad \tau(0) = 0,$$

уравнение диффузии (2) перепишется в виде

$$\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\left(1 + \frac{\zeta}{a^3}\right)^{4/3} \frac{\partial \widetilde{c}}{\partial \zeta}\right], \tag{4}$$

где a и $\widetilde{c}_a$ рассматриваются как функции времени τ. Начальные и граничные условия уравнения (4) имеют следующий вид:

$$\widetilde{c}|_{\zeta=\infty} = 0, \quad \widetilde{c}|_{\zeta=0} = \widetilde{c}_a, \quad \widetilde{c}|_{\tau=0} = 0.$$

2.2. Разделение задачи

Граничное условие, зависящее от времени в (4), создает трудную для вычисления ситуацию. При больших числах Пекле поле концентрации будет характеризоваться осциллирующим поведением ближе к границе пузырька. Это происходит из-за граничного условия Генри. Дальше от стенок пузырька будет наблюдаться медленное изменение концентрации. Таким образом, для поля концентрации будет адекватным разбиение задачи на две согласно [3]. Первая задача соответствует осциллирующей части граничного условия. Вторая, гладкая, соответствует постоянной части. Это постоянное граничное условие не берется произвольно, а вытекает из решения осциллирующей задачи.

Для разделения задачи на две необходимо ввести следующее осреднение по периоду

$$\langle f(\zeta, t)\rangle_\tau = \frac{\int\limits_0^T f(\zeta, t)\, a^4(t)dt}{\int\limits_0^T a^4(t)dt}$$

для одного периода акустической волны T.

Используя это осреднение, граничное условие у стенки пузырька можно записать в виде

$$\widetilde{c}|_{\zeta=0} = H \cdot p_{g0} \left\langle \left(\frac{m_g}{m_{g0}}\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma}\right\rangle_\tau - c_\infty + H\times$$
$$\times p_{g0}\left[\left(\frac{m_g}{m_{g0}}\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma} - \left\langle\left(\frac{m_g}{m_{g0}}\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma}\right\rangle_\tau\right].$$

Тогда осциллирующая задача запишется в следующем виде

$$\frac{\partial \widetilde{c}_{osc}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\left(1 + \frac{\zeta}{a^3}\right)^{4/3} \frac{\partial \widetilde{c}_{osc}}{\partial \zeta}\right]$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$\widetilde{c}_{osc}|_{\zeta=0} = H \cdot p_{g0} \cdot \left[\left(\frac{p_g}{p_{g0}}\right) - \left\langle\left(\frac{p_g}{p_{g0}}\right)\right\rangle_\tau\right],$$
$$\widetilde{c}_{osc}|_{\tau=0} = \widetilde{c}_{osc}|_{\zeta=\infty} = 0.$$

А гладкая задача будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial \widetilde{c}_{sm}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\left(1 + \frac{\zeta}{a^3}\right)^{4/3} \frac{\partial \widetilde{c}_{sm}}{\partial \zeta}\right]$$

с граничными и начальными условиями

$$\widetilde{c}_{sm}|_{\zeta=0} = H \cdot p_{g0} \cdot \langle\left(\tfrac{p_g}{p_{g0}}\right)\rangle_\tau - c_\infty$$
$$\widetilde{c}_{sm}|_{\tau=0} = \widetilde{c}_{sm}|_{\zeta=\infty} = 0.$$

Сумма осциллирующего и гладкого решений будет решением для полной задачи, т.е.

$$\widetilde{c}(\zeta, \tau) = \widetilde{c}_{osc}(\zeta, \tau) + \widetilde{c}_{sm}(\zeta, \tau).$$

В дальнейшем в данной работе будет рассматриваться только решение осциллирующей задачи.

3. Численная реализация

Численное исследование уравнения Келлера–Миксиса для одиночного пузырька (1) и системы уравнений для пузырькового кластера (2) осуществлялось с помощью метода Дормана–Принца восьмого порядка точности [8]. Также для проверки решения использовалась встроенная процедура Matlab ode45 для решения ОДУ методом Рунге–Кутта 4–5 порядка точности. Вычисления усложнились после того, как был произведен расчет переноса массы газа, растворенного в жидкости, через подвижную стенку пузырька.

Решение задачи должно исчезать экспоненциально при приближении к бесконечности, таким образом, граница может быть установлена для некоторой конечной величины $\zeta = \zeta_c$.

После всех преобразований уравнение диффузии (4) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\kappa(\zeta,\tau)\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right],$$

$$u|_{\zeta=\zeta_c} = 0, \quad u|_{\zeta=0} = u_a, \quad u|_{\tau=0} = 0$$

и решается по схеме Кранка–Николсона. Здесь $u = \widetilde{c}$ является функцией от времени τ, и

$$\kappa(\zeta,\tau) = \left(1 + \frac{\zeta}{a^3}\right)^{4/3}.$$

Обозначим шаг по времени h_τ и пространству h_ζ. Если ввести следующие значения:

$$\begin{gathered}\tau_n = nh_\tau, \quad n = 0,1,\ldots, \\ \zeta_m = mh_\zeta, \quad m = 0,1,\ldots,M, \\ u_m^n = u(\zeta_m,\tau_n), \\ \kappa_m^n = \kappa(\zeta_m,\tau_n), \\ f_m^n = f(\zeta_m,\tau_n),\end{gathered}$$

и заменить исходные уравнения дискретным аналогом, то получим

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{h_\tau} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\kappa^{n+1}(\zeta)\frac{\partial u^{n+1}}{\partial \zeta}\right]\right\} + \\ +\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\kappa^{n}(\zeta)\frac{\partial u^{n}}{\partial \zeta}\right]\right\}.$$

После того, как все неизвестные собраны в левой части, введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}A^{(n+1)} = \left[\kappa^{n+1}(\zeta_{m+1/2})\left(u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}\right) - \right. \\ \left. -\kappa^{n+1}(\zeta_{m-1/2})\left(u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}\right)\right], \\ A^{(n)} = \left[\kappa^{n}(\zeta_{m+1/2})\left(u_{m+1}^{n} - u_m^{n}\right) - \right. \\ \left. -\kappa^{n}(\zeta_{m-1/2})\left(u_m^{n} - u_{m-1}^{n}\right)\right].\end{gathered}$$

Тогда получим следующее дискретное уравнение

$$u_m^{n+1} - \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2}A^{(n+1)} = u_m^n + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2}A^{(n)},$$

которое может быть записано в следующем виде

$$\begin{gathered}\left(I - \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2}B_{n+1}\right)X^{n+1} = \\ = \left(I + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2}B_n\right)X^n + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2}\left(F^{n+1} + F^n\right),\end{gathered} \tag{5}$$

где B_n — симметричная трехдиагональная матрица, состоящая из коэффициантов κ, размером $(M-1)\times(M-1)$. Вектор решений X^n и силовой вектор F^n имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}X^n = \left(u_1^n, u_2^n, \ldots, u_{M-1}^n\right)^T, \\ F^n = \left(\kappa_{-1/2}^n u_a, 0, \ldots, 0\right)^T.\end{gathered}$$

Для решения системы (5) использовался метод прогонки.

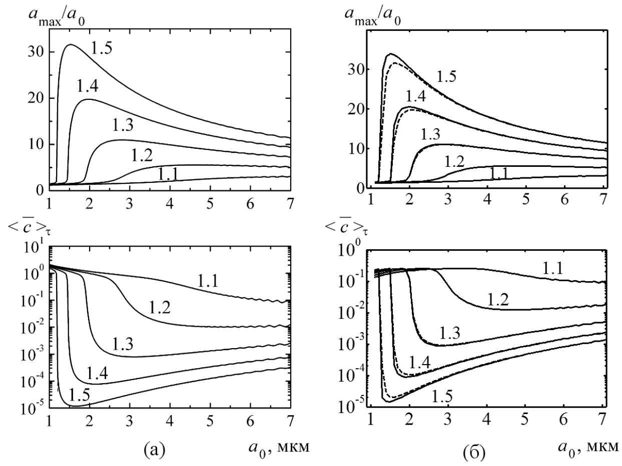


Рис. 1. Нормированный радиус одиночного газового пузырька $a_{\max}/a_0$ (сверху); осредненная концентрация газа около стенки пузырька $\langle\overline{c}\rangle_\tau$ (внизу) в зависимости от начального радиуса пузырька a_0 для различных амплитуд давления $\Delta P = 1.1 \div 1.5\cdot 10^5$ Па. Результаты получены (а) в работе [4] и (б) в настоящей работе (сплошные линии — для кривых с учетом изменения массы газа на 20-м периоде колебания пузырька; штриховые линии — для кривых без учета изменения массы газа)

4. Результаты численного моделирования

Для проверки правильности вычислений в задаче о динамике одиночного газового пузырька авторами данной работы использовалась работа [3], поэтому результаты получены для пузырьков газа в воде при температуре 20°C и при следующих значениях параметров: $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $p_0 = 10^5$ Па, $C = 1500$ м/с, частота $\omega = 2\pi\cdot 20$ кГц. Получено хорошее соответствие с данными, опубликованными в работе [3], а также при сравнении результатов вычислений со встроенной процедурой Matlab для решения систем ОДУ. Для вычисления динамики пузырька в кластере использовались также следующие параметры: $R_0 = 10^{-3}$ м, $N = 10^4$.

На рис. 1 представлено сравнение результатов расчетов в случае одиночного газового пузырька с аналогичными результатами, полученными в работе [4], где применялась аппроксимационная теория для колебаний пузырька с большой амплитудой и для больших чисел Пекле. Верхние графики показывают нормированный радиус пузырька $a_{\max}/a_0$, а нижние — кривые осредненной концентрации газа около стенки пузырька $\langle\overline{c}\rangle_\tau$ для различных амплитуд управляющего давления $\Delta P = 1.1\div 1.5\cdot 10^5$ Па. Рис. 1(б) позволяет сравнить решения, полученные с помощью представленного в данной работе численного метода, с результатами работы [4], полученными по аппроксимационной модели, которая была предложена в работе [3] (рис. 1(а)). Видно, что характер кривых для осредненной газовой концентрации, полученных в настоящей работе, отличается от кривых, полученных в [4], особенно для малых начальных размеров пузырька. Действительно, на нижнем графике рис. 1(б) осредненная концентрация растет при малых a_0, в то время как для подобных кривых на рис. 1(а) она уменьшается. Кроме того значения осредненной концентрации в первом и во втором случае отличаются на один порядок.

Кроме того на рис. 1(б) показано как учет изменения массы за счет диффузии в уравнении (1) влияет на динамику системы. Результаты представлены для 20-го периода колебания пузырька: сплошная линия — с учетом массы, штриховая — без учета массы. Видно, что уже для $\Delta P = 1.4 \cdot 10^5$ Па в окрестности максимума для максимального радиуса пузырька (минимума — для осредненной газовой концентрации) влияние массы становится заметным, причем, чем выше ΔP, тем больше масса влияет на характер кривых. При дальнейших расчетах учет массы начнет сказываться и для меньших значений амплитуд давления.

На рис. 2 представлено аналогичное рис. 1 сравнение результатов для пузырька в монодисперсном кластере, при этом расчеты по аппроксимационной модели брались из работы [5]. Выводы, представленные выше для одиночного пузырька, можно сделать и для случая пузырька в кластере, с той разницей, что поскольку максимальный отклик радиуса пузырька в кластере ниже, чем у одиночного пузырька, то масса начинает «проявляться» при расчете значительно большего числа периодов колебаний пузырька. На рис. 2(б) результаты показаны для 90-го периода колебания.

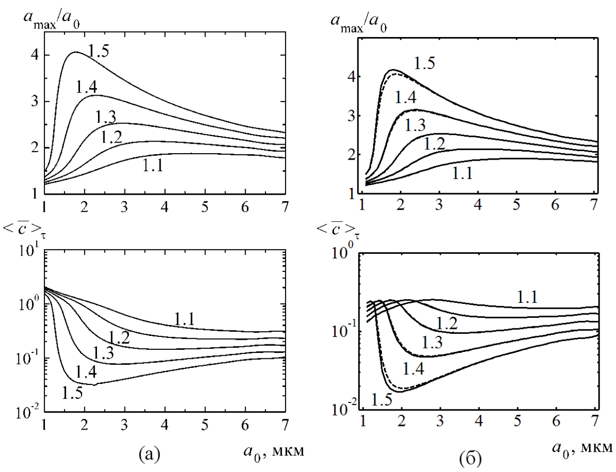


Рис. 2. Нормированный радиус газового пузырька в монодисперсном кластере $a_{\max}/a_0$ (сверху); осредненная концентрация газа около стенки пузырька $\langle \overline{c} \rangle_\tau$ (внизу) в зависимости от начального радиуса пузырька a_0 для различных амплитуд давления $\Delta P = 1.1 \div 1.5 \cdot 10^5$ Па. Результаты получены (а) в работе [5] и (б) в настоящей работе (сплошные линии — для кривых с учетом изменения массы газа на 90-м периоде колебания пузырька; штриховые линии — для кривых без учета изменения массы газа)

5. Оптимизация и распараллеливание

Параметрическое исследование задачи требует обработки большого числа различных параметров системы, меняющихся в различных диапазонах значений. Это приводит к десяткам и даже сотням запусков программы с определенными параметрами, так что приобретают значение алгоритмы оптимизации и распараллеливания. Были определены и оптимизированы наиболее «медленные» места в коде, что привело к ускорению последовательной работы программы в 60 раз. Так как моделирование динамики пузырька для различных параметров может быть выполнено отдельно, код легко распараллеливается по независимым циклам.

На рис. 3 показано время работы программы в зависимости от числа точек по пространству на различном числе ядер. Как и ожидалось, программа показывает хорошую масштабируемость по мере увеличения количества рабочих потоков. Производительность измерялась на системе с 12 ядрами Intel Xeon 5660 2.8 GHz.

6. Заключение

В данной работе решается задача диффузии газа между сферически–симметричным газовым пузырьком и жидкостью в изотропном акустическом поле. Задача решается как для одиночного пузырька, так и для пузырька в монодисперсном кластере. Разработан численный метод решения диффузионной задачи, проведены численные эксперименты для различных амплитуд акустического поля для осциллирующей части диффузионной задачи. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных по аппроксимационной теории, и с помощью численного метода, представленного в данной работе. Исследовано как сильно влияет учет изменения массы при расчете динамики пузырька.

Показано, что аппроксимационные теории хорошо описывают случаи малой амплитуды управляющего давления и пузырьков относительно больших размеров. В случае пузырьков малых началь-

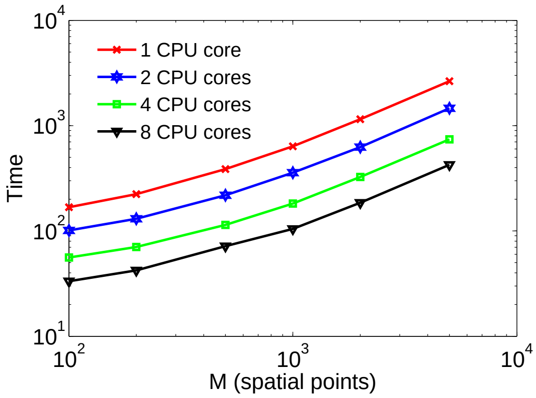


Рис. 3. Время выполнения программы в зависимости от числа точек на 8, 4, 2 и 1 ядрах CPU

ных радиусов и/или колебаний пузырьков при высоких амплитудах акустического поля численное решение может существенно отличаться от асимптотических решений. В таких случаях необходимо решать полную диффузионную задачу. Для этого может быть полезен метод, разработанный в данной работе.

Кроме того было установлено, что изменение массы пузырька за счет диффузии может существенным образом сказываться на давлении газа в пузырьке, следовательно, это изменение должно быть учтено при исследовании динамики пузырька. Показано, что изменение массы в пузырьке, который находится в кластере, начинает влиять на его динамику через значительно больший промежуток времени, чем на динамику одиночного пузырька того же радиуса при той же амплитуде акустического поля.

Последовательный код программы оптимизирован, получено ускорение в 60 раз. Проведена параллелизация алгоритма на CPU с использованием многоядерного процессора Intel Xeon 5660, 2.8 GHz.

Авторы выражают благодарность за помощь при постановке задачи и ценные замечания Гумерову Н.А.

Список литературы

[1] Barber B.P., Putterman S.J. Observation of synchronous picosecond sonoluminescence // Nature (London). 1991. Vol. 352. P. 318–320.

[2] Gaitan D.F., Crum C.C., Church C.C., Roy R.A. Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble // J. Acoust. Soc. Am. 1992. Vol. 91. P. 3166–3183.

[3] Fyrillas M.M., Szeri A.J. Dissolution or growth of soluble spherical bubble // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 277. P. 381–407.

[4] Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.-D., Parlitz U., Lauterborn W. The Role of Surface Tension in Stable Single–Bubble Sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 2. P 227–230.

[5] Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш. Исследование диффузионной устойчивости пузырьков в кластере // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 40–48.

[6] Keller J.B., Miksis M. Bubble oscillations of large amplitude // J. Acoust. Soc. Am. 1980. Vol. 68, № 2. P. 628–633.

[7] Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш. Динамика пузырькового кластера в акустическом поле // Акуст. ж. 2005. Т. 51, № 6. С. 709–717.

[8] Хайрер Э., Нчрсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 517.9

Симметрийные свойства дифференциальных уравнений переноса дробного порядка[1]

Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе рассматриваются некоторые особенности применения методов группового анализа к дифференциальным уравнениям дробного порядка. Обсуждается проблема точечной замены переменных в операторе дробного дифференцирования и обосновывается общий вид такой замены, сохраняющей вид оператора Римана-Лиувилля. Приводится формула продолжения инфинитезимального оператора группы на дробную производную от функции по функции и простым примером иллюстрируется необходимость рассмотрения у уравнений дробного порядка локальных и нелокальных симметрий, зависящих, в частности, от начальных условий задачи. Обсуждаются виды преобразований эквивалентности для уравнений дробного порядка и приводятся результаты групповой классификации диффузионно-волнового уравнения. На примере дробно-дифференциальных уравнений переноса показано, что разработанные методы могут быть использованы вместе с методом инвариантных подпространств для построения частных решений.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка [1, 2] в последнее время находят все более широкое применение в качестве математических моделей аномальных процессов, протекающих в сложных средах, и обусловленных такими свойствами среды как память, перемежаемость, пространственная нелокальность и др. Особенно широкое применение данные уравнения получили в теории процессов аномального переноса вещества и энергии для описания суб- и супердиффузии, диффузионно-волновых процессов, аномальной теплопроводности и др. [3, 4]. Аналитические методы исследования свойств и построения решений таких уравнений, особенно нелинейных, развиты слабо. Поэтому представляется актуальным развитие методов группового анализа для исследования этого класса уравнений.

В работах [5–8] методы построения точечных групп преобразований, допускаемых дифференциальными уравнениями, были развиты для уравнений, содержащих производные дробного порядка типа Римана–Лиувилля

$$\left({}_cD_x^\alpha y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_c^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \quad (1)$$

и Капуто

$$\left({}_c^C D_x^\alpha y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_c^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \quad (2)$$

где $n = [\alpha] + 1$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Были построены формулы продолжения инфинитезимального оператора группы на интегралы и производные дробного порядка вида (1), (2), разработаны алгоритмы нахождения допускаемой группы для уравнений, содержащих эти производные, решены некоторые задачи групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных дробного порядка.

Данная работа состоит из четырех разделов, каждый из которых посвящен обсуждению особенностей, возникающих при переносе некоторых алгоритмов классического группового анализа на дифференциальные уравнения с производными дробного порядка. В разделе 2 рассматриваются точечные замены переменных в операторах дробного дифференцирования: обсуждается условие инвариантности формы оператора, а также приводятся частные случаи замен переменных, переводящих оператор типа Римана–Лиувилля в другие известные операторы дробного дифференцирования. В разделе 3 впервые приводится обобщение формулы продолжения на дробные производные от функции по функции. Там же простым примером иллюстрируется наличие у уравнения дробного порядка локальных и нелокальных симметрий, зависящих, в

[1]Работы выполнена в рамках договора 11.G34.31.0042 между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым профессором Н.Х. Ибрагимовым и ФГБОУ ВПО УГАТУ

частности, от начальных условий задачи. Раздел 4 посвящен краткому обсуждению проблемы преобразований эквивалентности в уравнениях с дробными производными; приводится результат групповой классификации диффузионно-волнового уравнения. Наконец, в разделе 5 обсуждаются вопросы совместного использования метода инвариантных подпространств [9] и группового анализа для построения решений нелинейных уравнений переноса дробного порядка.

2. Замены переменных в производных дробного порядка

В общем случае, произвольная замена переменных $\bar{x}=\varphi(x,y)$, $\bar{y}=\psi(x,y)$ не сохраняет вида оператора дробного дифференцирования. В частности, при такой замене дробная производная Римана–Лиувилля (1) порядка $\alpha\in(0,1)$ переходит в левостороннюю дробную производную от функции $\psi(x,y)$ по функции $\varphi(x,y)$, определяемую как

$$\left({}_cD^{\alpha}_{\varphi[x]}\psi\right)[x]= \\ =\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{D_x\varphi[x]}\frac{d}{dx}\int_{\varphi^{-1}[c]}^{x}\frac{\psi[t]D_t\varphi[t]}{(\varphi[x]-\varphi[t])^{\alpha}}dt. \tag{3}$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение $f[x]\equiv f(x,y(x))$. Определение и основные свойства производных от функции по функции см., например, в [1].

Из анализа (3) достаточно просто может быть найден общий вид точечной замены переменных, сохраняющей структуру оператора ${}_cD^{\alpha}_x$. Поскольку оператор дробного дифференцирования является линейным, то замена зависимой переменной также должна быть линейной: $\bar{y}=\psi_0(x)+y\psi_1(x)$, а замена независимой переменной не должна зависеть от y: $\bar{x}=\varphi(x)$. Для сохранения ядра $(x-t)^{-\alpha}$ функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\varphi(x)-\varphi(t)=f(x)g(t)(x-t), \tag{4}$$

где $f(x)$, $g(t)$ — некоторые функции, также подлежащие определению. Меняя в уравнении (4) переменные $x\to t$, $t\to x$, находим, что $g=f$. Далее, дифференцируя уравнение (4) по x и t, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции f, общее решение которого имеет вид $f(x)=(c_1+c_2x)$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Зная f, из уравнения (4) находим общий вид $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{c_3+x}{c_1+c_2x}.$$

Для сохранения нижнего предела интегрирования должно выполняться условие $\varphi(c)=c$, откуда

$$c_3=c(c_1+cc_2-1).$$

Утверждение. Общий вид локальной замены переменных, позволяющей сохранить структуру оператора ${}_cD^{\alpha}_x$, имеет вид:

$$\bar{x}=\frac{cc_1+(x-c)}{c_1+c_2(x-c)},\quad \bar{y}=\psi_0(x)+y\psi_1(x). \tag{5}$$

Из (5), в частности, следует, что не допускается перенос по x, поскольку он приводит к изменению нижнего предела интегрирования.

Тем не менее, замены переменных, приводящие к изменению оператора дробного дифференцирования с сохранением его важнейшего свойства — линейности, оказываются в ряде случаев весьма полезны. В рамках группового подхода такие замены связаны с преобразования эквивалентности относительно элементов структуры операторов дробного дифференцирования, рассматриваемых в качестве произвольных элементов.

Рассмотрим дробную производную порядка $\alpha\in(0,1)$ функции $y(x)$ по функции $g(x)$:

$${}_cD^{\alpha}_{g(x)}y=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\int_c^x\frac{y(t)g'(t)}{(g(x)-g(t))^{\alpha}}dt. \tag{6}$$

Дробная производная (1) при $\alpha\in(0,1)$ является частным случаем (6) при $g(x)=x$.

В качестве изменяемого при замене переменных элемента в структуре (6) могут рассматриваться: 1) предел интегрирования c, 2) функция $g(x)$, 3) порядок дробного дифференцирования α. Приведем ряд примеров таких замен переменных, переводящих оператор Римана–Лиувилля в другие известные виды операторов дробного дифференцирования.

1) Перенос по x

$$\bar{x}=x+a,\quad \bar{y}=y \tag{7}$$

сохраняет тип оператора и изменяет лишь нижний предел интегрирования:

$$\left({}_cD^{\alpha}_xy\right)(x)=\left({}_{\bar{c}}D^{\alpha}_{\bar{x}}\bar{y}\right)(\bar{x}),\quad \bar{c}=c+a.$$

2) Замена переменных

$$\bar{x}=x^a,\quad \bar{y}=y \tag{8}$$

приводит к замене оператора Римана–Лиувилля на оператор типа Эрдейи–Кобера [1]:

$$\left({}_cD^{\alpha}_xy\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{\bar{x}^{b-1}}\frac{d}{d\bar{x}}\int_{\bar{c}}^{\bar{x}}\frac{\bar{y}(\bar{t})\bar{t}^{b-1}}{(\bar{x}^b-\bar{t}^b)^{\alpha}}d\bar{t}$$

$$b=1/a,\quad \bar{c}=c^a.$$

Такая замена часто выполняется при поиске инвариантных решений для уравнений аномального переноса дробного порядка на группе растяжений [5].

3) Замена переменных

$$\bar{x} = e^{x}, \quad \bar{y} = y$$

приводит к замене оператора Римана–Лиувилля на оператор дробной производной типа Адамара [1]:

$$\left({}_{c}D_{x}^{\alpha}y\right)(x) = \frac{\bar{x}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\bar{x}}\int_{e^{\bar{c}}}^{\bar{x}} \frac{\bar{y}(\bar{t})}{\left(\ln\dfrac{\bar{x}}{\bar{t}}\right)^{\alpha}}\frac{d\bar{t}}{\bar{t}}.$$

3. Формулы продолжения и нелокальные симметрии

Рассмотрим одно-параметрическую группу точечных преобразований

$$\begin{gathered}\bar{x} = \varphi(x,y,a), \quad \bar{y} = \psi(x,y,a);\\ \varphi|_{a=0} = x, \quad \psi|_{a=0} = y.\end{gathered} \tag{9}$$

В работе [6] на основе инфинитезимального подхода были получены формулы продолжения для производных дробного порядка типа Римана–Лиувилля (1) и Капуто (2). Данный подход может быть расширен и на общий случай дробных производных от функции по функции вида (6).

Пусть инфинитезимальное преобразование для (9) имеет вид:

$$\bar{x} \approx x + a\xi(x,y), \quad \bar{y} \approx y + a\eta(x,y).$$

При выводе формул продолжения важным является вид замены переменной интегрирования в операторе дробного дифференцирования. Очевидный вид замены, когда переменная интегрирования t изменяется по тому же правилу, что и независимая переменная x, не является оптимальным, поскольку приводит к появлению параметра a в нижнем пределе интегрирования, что существенно усложняет дальнейшие преобразования. Более оптимальной является замена переменных, сохраняющая пределы интегрирования, и имеющая вид

$$\bar{t} = t + a\xi(x,y)\frac{g(t)-g(c)}{g(x)-g(c)}\frac{g'(x)}{g'(t)}.$$

Можно показать, что инфинитезимальное преобразование дробной производной (6) имеет вид

$$\left({}_{c}D_{g(\bar{x})}^{\alpha}\bar{y}\right) = \left({}_{c}D_{g(x)}^{\alpha}y\right) + a\zeta_{\alpha},$$

где

$$\zeta_{\alpha} = {}_{c}D_{g(x)}^{\alpha}(\eta - \xi y') + \xi g'(x)\,{}_{c}D_{g(x)}^{\alpha+1}y. \tag{10}$$

При $g(x) = x$ (10) переходит в полученную ранее [6] формулу продолжения для производной типа Римана–Лиувилля, а при целых α совпадает с известными классическими формулами продолжения на производные целых порядков [10].

Замечание 1. В отличие от производных целого порядка, раскрывать скобки в правой части (10) в общем случае нельзя, поскольку дробная производная от отдельных слагаемых η и $\xi y'$ может не существовать.

Замечание 2. Формула продолжения (10) может использоваться и при построении нелокальных симметрий.

Проиллюстрируем замечание 2 простым примером. Рассмотрим уравнение

$${}_{0}D_{x}^{\alpha+1}y = 0, \quad \alpha \in (0,1), \tag{11}$$

которое имеет известное общее решение $y = x^{\alpha-1}(c_1 x + c_2)$. По определению дробной производной, уравнение (11) может быть записано в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\,{}_{0}I_{x}^{1-\alpha}y = 0,$$

где

$$\left({}_{0}I_{x}^{1-\alpha}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

— левосторонний интеграл дробного порядка $1-\alpha$.

После нелокальной замены $z = {}_{0}I_{x}^{1-\alpha}y$ уравнение (11) запишется в виде $z'' = 0$, которое допускает восьми-параметрическую группу. Обращая нелокальную замену, находим $y = {}_{0}D_{x}^{1-\alpha}z$. Используя формулу продолжения (10) и формулу Лейбница для дробного дифференцирования произведения двух функций

$${}_{0}D_{x}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\,{}_{0}D_{x}^{\alpha-k}f\,D^{k}g,$$

можно построить продолжение группы уравнения $z'' = 0$ на дробную производную ${}_{0}D_{x}^{1-\alpha}z$. При этом необходимо учитывать, что поскольку $z(0)$ существует, то существует и дробная производная ${}_{0}D_{x}^{1-\alpha}z'$. Имеем

$$\begin{gathered}
\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{z(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
\tilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
\tilde{X}_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha-1)z^{(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
\tilde{X}_4 = z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{z(0)zx^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
\tilde{X}_5 = x\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},
\end{gathered}$$

$$\tilde{X}_6 = z\frac{\partial}{\partial z} + z^{(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$
$$\tilde{X}_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial z} + \Big[(2\alpha-1)xz^{(1-\alpha)} + $$
$$+(1-\alpha^2)z^{(-\alpha)}\Big]\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$
$$\tilde{X}_8 = xz\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial z} + \Big[(\alpha z' - 1)z^{(1-\alpha)} +$$
$$+(1-\alpha^2)z'z^{(-\alpha)} + \alpha z\Big]\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$

где $z^{(1-\alpha)} \equiv {}_0D_x^{1-\alpha}z$. Отсюда, после соответствующей замены переменных, находим симметрии уравнения (11):

$$\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_2 = x^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha-1)y\frac{\partial}{\partial y},\\
X_4 = y^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^{(\alpha-1)}(0)y^{(\alpha-1)}x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_5 = x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_6 = y\frac{\partial}{\partial y},\\
X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + [(2\alpha-1)xy + (1-\alpha^2)Iy]\frac{\partial}{\partial y},\\
X_8 = xy^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x} + [\alpha yy^{(\alpha-1)} -\\
-(1-\alpha)xyy^{(\alpha)} + (1-\alpha^2)y^{(\alpha)}Iy]\frac{\partial}{\partial y}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $y^{(\alpha-1)} \equiv {}_0I_x^{1-\alpha}y$, $Iy \equiv {}_0I_xy$.

Симметрии X_2, X_3, X_5, X_6 являются локальными, остальные симметрии являются нелокальными. Отметим, что входящее в операторы X_1 и X_4 начальное значение $y^{(\alpha-1)}(0)$ является естественным начальным условием при постановке задачи Коши для дробно-дифференциальных уравнений.

Ранее, в работе [6], из принципа инвариантности для уравнения (11) было получено пять локальных симметрий, включая оператор проектирования

$$X_9 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + \alpha xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Данный оператор не может быть получен из (12), но наиболее близким к нему является X_7, полученный из оператора проектирования для уравнения $z'' = 0$. Нетрудно проверить, что нелокальный оператор

$$X_{10} \equiv X_7 - X_9 = [(\alpha-1)xy + (1-\alpha^2)Iy]\frac{\partial}{\partial y}$$

допускается уравнением (11). При этом в предельном случае $\alpha = 1$ оператор X_{10} обращается в нуль, т.е. X_7 совпадает с X_9.

4. Преобразования эквивалентности

Как и в случае уравнений с производными целых порядков, уравнения с производными дробных порядков могут содержать функциональные параметры, конкретный вид которых неизвестен — так называемые, произвольные элементы. Тем не менее, понятия произвольного элемента и преобразования эквивалентности для таких уравнений могут быть расширены за счет того, что в качестве произвольного элемента могут рассматриваться не только элементы структуры уравнения, но и элементы структуры самих операторов дробного дифференцирования, входящих в уравнение.

Если произвольный элемент не является элементом структуры операторов дробного дифференцирования, то преобразования эквивалентности, соответствующие этому элементу, будем называть *классическими* или *преобразованиями эквивалентности 1-го рода.*

Методика построения преобразований эквивалентности 1-го рода неразрывно связана с задачей групповой классификации уравнения. В качестве примера рассмотрим задачу групповой классификации для диффузионно-волнового уравнения:

$${}_0D_t^{\alpha+1}u = \left(f(u)u_x\right)_x, \quad 0<\alpha<1. \tag{13}$$

В данном случае группа преобразований эквивалентности ищется в классе уравнений, в которых произвольный элемент f является функцией только u. Поэтому преобразования эквивалентности должны допускаться системой, включающей уравнение (13) и уравнения

$$f_x = 0, \quad f_t = 0.$$

Решая соответствующие определяющие уравнения, получаем, что преобразование произвольного элемента имеет вид

$$\bar{f}(u) = c_1 f(c_2 u + c_3),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Результат групповой классификации формулируется следующим образом.

Для произвольной функции $f(u)$ алгебра Ли оказывается двумерной и ее базис составляют операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{2t}{\alpha+1}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Данная алгебра допускает расширение в случае $f(u) = u^\beta$ с произвольным β:

$$X_3 = \frac{\beta}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},$$

а также при следующих частных значениях параметра:

$$\beta = -\frac{4}{3} \qquad X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 3xu\frac{\partial}{\partial u};$$
$$\beta = -2(1+\alpha^{-1}) \quad X_4 = t^2\frac{\partial}{\partial t} - \alpha tu\frac{\partial}{\partial u};$$
$$\beta = 0 \qquad X_\infty = h(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $h(x,t)$ — произвольное решение уравнения (13) с $f(u) = 1$.

Таким образом, преобразования эквивалентности 1-го рода для уравнений дробного порядка являются прямым обобщением классических преобразований эквивалентности на уравнения этого типа.

Существенно больший интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения представляют случаи, когда в качестве произвольного элемента выступает некоторый элемент оператора дробного дифференцирования. В результате такого преобразования при сохранении общей структуры уравнения происходит преобразование типа оператора дробного дифференцирования, как это было показано в разделе 2. Такие преобразования будем называть *преобразованиями эквивалентности 2-го рода.*

Например, для уравнения

$${}_cD_x^\alpha y = f(y)$$

преобразования (7) и (8) являются преобразованиями эквивалентности 2-го рода.

Отметим, что преобразование самого общего вида $\bar{x} = \varphi(x,y,a)$, $\bar{y} = \psi(x,y,a)$ могут оказаться допустимыми, если считать функцию g в определении (6) функцией $g(x,y(x))$. Такое преобразование эквивалентности должно будет сохранять только алгебраическую структуру уравнения, образующуюся при рассмотрении всех производных дробного порядка в качестве произвольных элементов. Поэтому на практике класс преобразований эквивалентности 2-го рода всегда должен быть ограничен и оговорен.

5. Построение решений с помощью метода инвариантных подпространств

Метод инвариантных подпространств, развитый в работах В.А. Галактионова и С.Р. Свирщевского (см. [9] и приведенные там источники), позволяет построить решения нелинейных уравнений эволюционного типа:

$$Du_t = F[u], \tag{14}$$

где $F[u] \equiv F(u, u_x, u_{xx}, ...)$ — нелинейный дифференциальный оператор. Решения при этом ищутся в виде линейной комбинации некоторых базисных функций

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) f_i(x). \tag{15}$$

Согласно [9], линейное подпространство

$$W_n = \langle f_1(x), \ldots\ldots f_n(x)\rangle \tag{16}$$

является *инвариантным* относительно оператора $F[u]$, если $F[y] \in W_n$ для $y \in W_n$, т.е.

$$F[C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n] = \sum_{i=1}^n \Phi_i(C_1, \ldots, C_n) f_i.$$

Инвариантные подпространства и их свойства для большого числа конкретных функций $F[u]$ приведены в [9].

Если задано некоторое инвариантное подпространство (16) уравнения (14), то все частные решения вида (15) удовлетворяют системе обыкновенных уравнений

$$\begin{cases} Du_1(t) = \Phi_1(u_1, \ldots, u_n), \\ \ldots \\ Du_n(t) = \Phi_n(u_1, \ldots, u_n). \end{cases} \tag{17}$$

Как правило, для систем вида (17) методы группового анализа не дают конструктивных алгоритмов для построения их решений. Вместе с тем, обобщение метода на дифференциальные уравнения дробного порядка вида

$$D_t^\alpha u_t = F[u]$$

приводит к системам вида (17) с дробной производной в левой части уравнений. Такие системы, в отличие от систем с производными первого порядка, при принятых ограничениях имеют допускаемые алгебры Ли конечной размерности (в силу ограниченности класса преобразований, сохраняющего форму оператора дробного дифференцирования), которые могут быть использованы для построения их решений.

В качестве простого примера рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha u = uu_x. \tag{18}$$

Оператор $F[u] = uu_x$ имеет инвариантное подпространство $\{1, x\}$ и его решение имеет вид

$$u = C_1(t) + xC_2(t).$$

Здесь C_1, C_2 должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} D^\alpha C_1 = C_1 C_2, \\ D^\alpha C_2 = C_2^2, \end{cases}$$

которая допускает три оператора

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha C_2 \frac{\partial}{\partial C_2}, \quad X_2 = C_1 \frac{\partial}{\partial C_1}, \quad X_3 = C_2 \frac{\partial}{\partial C_1}.$$

Используя операторы X_1, X_2, получаем

$$C_1(t) = ct^{-\alpha}, C_2(t) = t^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)/\Gamma(1-2\alpha),$$

и

$$u = ct^{-\alpha} + xt^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)/\Gamma(1-2\alpha).$$

Уравнение аномальной диффузии с коэффициентом $k(u) = u$ и правой частью

$$F[u] = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

имеет ровно два различных 2-мерных инвариантных подпространства, которые дают следующее решение:

$$u = C_1(t)f_1(x) + C_2(t)f_2(x):$$

1. $f_1(x) = 1, f_2(x) = x^2$:

$$F[C_1 + C_2 x^2] = 6C_2^2 x^2 + 2C_1 C_2;$$

2. $f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = x^2$:

$$F[C_1\sqrt{x} + C_2 x^2] = 6C_2^2 x^2 + \frac{15}{4} C_1 C_2 \sqrt{x}.$$

1. $f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x^2$: система

$$\begin{cases} D^\alpha C_1 = 2C_1 C_2, \\ D^\alpha C_2 = 6C_2^2 \end{cases}$$

допускает два оператора:

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha C_2 \frac{\partial}{\partial C_2}, \quad X_2 = C_1 \frac{\partial}{\partial C_1},$$

которые приводят к решению

$$C_1 = ct^\beta, \quad C_2 = kt^{-\alpha},$$

где

$$k = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{6\Gamma(1-2\alpha)}, \quad \beta: \quad \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} = \frac{k}{3}.$$

2. $f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = x^2$: система

$$\begin{cases} D^\alpha C_1 = \frac{15}{4} C_1 C_2, \\ D^\alpha C_2 = 6C_2^2 \end{cases}$$

допускает два оператора

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha C_2 \frac{\partial}{\partial C_2}, \quad X_2 = C_1 \frac{\partial}{\partial C_1},$$

которые дают решение

$$C_1 = ct^\beta, \quad C_2 = kt^{-\alpha},$$

где

$$k = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{6\Gamma(1-2\alpha)}, \quad \beta: \quad \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} = \frac{5k}{8}.$$

Список литературы

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[2] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach // Phys. Rep. 2000. V. 339, Pp. 1–77.

[4] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.

[5] Buckwar E, Luchko Yu. Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 227. Pp. 81–97.

[6] Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 125–135.

[7] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta. 2009. T 136. 014016.

[8] Group-Invariant Solutions of Fractional Differential Equations. Nonlinear Science and Complexity, Springer. 2011. P. 51–59.

[9] Galaktionov V., Svirshchevskii S. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2009. 498 p.

[10] CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / N.H. Ibragimov (ed.). CRC Press, Boca Raton, V. 1. 1994. 430 p.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529:534.2

Акустические волны в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками[1]

Гафиятов Р.Н.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Представлена математическая модель течения двухфракционной смеси жидкости с парогазовыми пузырьками разных газов и размеров с учетом фазовых превращений. Получено дисперсионное соотношение и построены дисперсионные кривые, определяющие распространение акустических возмущений. С помощью метода быстрого преобразования Фурье выполнены расчеты по распространению импульсных возмущений давления.

1. Введение

В настоящее время значительный интерес представляют исследования волновой динамики дисперсных сред. Значительное количество работ по акустике пузырьковых жидкостей посвящено теоретическому исследованию распространения гармонических возмущений в монодисперсных смесях. Различные проблемы акустики многофазных сред рассмотрены в известных монографиях [1–4]. Работа [5] посвящена описанию основных особенностей двухфазных сред пузырьковой структуры, приведен обзор работ по распространению волн в жидкостях с пузырьками постоянной массы и исследований по волновой динамике жидкостей, содержащих пузырьки пара или растворимого газа. В [6] для смеси жидкости с газовыми пузырьками получена дисперсионная зависимость волнового числа от частоты колебаний и теплофизических свойств фаз в плоском случае, показана необходимость учета сжимаемости несущей фазы для задач акустики пузырьковых жидкостей. Модель распространения плоских волн давления малой амплитуды в смеси жидкости с пузырьками газа представлена в работе [7]. Показано, что модель работает хорошо при объемных содержаниях дисперсной фазы 1–2% и только для дорезонансных частот. В [8] изучено распространение сферических и цилиндрических волн давления малой амплитуды в двухфазных смесях жидкости с пузырьками нерастворимого газа с учетом акустической разгрузки пузырьков, получено единое общее дисперсионное соотношение. В [9] получено дисперсионное соотношение, определяющее распространение гармонических возмущений в двухфазных смесях жидкости с пузырьками пара и газа для сферического и цилиндрического случая. Показано сильное влияние значения концентрации пара в пузырьках на затухание импульсных волн. В [10] изучена акустика двухфракционных смесей жидкости с пузырьками разных газов без учета фазовых превращений.

В настоящей работе впервые изучается динамика слабых возмущений в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками различных размеров и разного состава с учетом фазовых превращений в обеих фракциях.

2. Дисперсионное соотношение

Рассмотрим случай двухфракционной смеси жидкости с парогазовыми пузырьками различных размеров и состава при наличии фазовых превращений в каждой фракции. Записывается линеаризованная система уравнений, которая будет иметь вид аналогичный [9], но с учетом двухфракционности состава дисперсной фазы. Из этой системы получается следующая дисперсионная зависимость комплексного волнового числа K_* от частоты ω:

$$\left(\frac{K_*}{\omega}\right) = \frac{1}{C_f^2}+$$

[1]Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ (грант МК-1316.2010.1. и грант НШ-834.2012.1) по программе Президиума РАН № 23П, при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10–01–00098) и Министерства образования и науки РФ (государственный контракт № 14.740.11.0351).

$$
+\frac{\alpha_{10}\alpha_{20}^{\mathrm{I}}p_0}{N_R^{\mathrm{I}}\rho_{10}}\left(1+\frac{H_1^{\mathrm{I}}+H_1^{\mathrm{II}}+H_2^{\mathrm{II}}\left(\frac{M_4^{\mathrm{II}}}{M_3^{\mathrm{II}}}-\frac{b_1^{\mathrm{II}}M_4^{\mathrm{I}}}{b_1^{\mathrm{I}}M_3^{\mathrm{II}}}\right)}{\frac{M_3^{\mathrm{I}}}{b_1^{\mathrm{I}}}\left(\frac{H_2^{\mathrm{I}}b_1^{\mathrm{I}}}{M_3^{\mathrm{I}}}+\frac{H_2^{\mathrm{II}}b_1^{\mathrm{II}}}{M_3^{\mathrm{II}}}\right)}\right)+
$$

$$
+\frac{\alpha_{10}\alpha_{20}^{\mathrm{II}}p_0}{N_R^{\mathrm{II}}\rho_{10}}\left(1+\frac{H_1^{\mathrm{I}}+H_1^{\mathrm{II}}+H_2^{\mathrm{I}}\left(\frac{M_4^{\mathrm{I}}}{M_3^{\mathrm{I}}}-\frac{b_1^{\mathrm{I}}M_4^{\mathrm{II}}}{b_1^{\mathrm{II}}M_3^{\mathrm{I}}}\right)}{\frac{M_3^{\mathrm{II}}}{b_1^{\mathrm{II}}}\left(\frac{H_2^{\mathrm{I}}b_1^{\mathrm{I}}}{M_3^{\mathrm{I}}}+\frac{H_2^{\mathrm{II}}b_1^{\mathrm{II}}}{M_3^{\mathrm{II}}}\right)}\right), \quad (1)
$$

где $C_f = \dfrac{C_1}{\alpha_{10}}$, $H_1^j = \dfrac{m^j}{b_1^j\tau_{T1}^j}\left(b_1^jM_2^j + N_1^jM_4^j\right)$,

$$
H_2^j = \frac{m^j}{b_1^j\tau_{T1}^j}\left(b_1^jM_1^j - N_1^jM_3^j\right),
$$

$$
M_1^j = G^j - M_2^j - \frac{L_1^jN_3^j}{L_4^j - \dfrac{m^{\circ j}-1}{1-k_{V0}^j}N_2^j},
$$

$$
M_2^j = \frac{N_2^jL_1^j}{N_R^j}\frac{1}{L_4^j - \dfrac{m^{\circ j}-1}{1-k_{V0}^j}N_2^j},
$$

$$
M_3^j = \frac{N_3^j\dfrac{m^{\circ j-1}}{1-k_{V0}^j} - L_2^jN_3^j}{L_4^j - \dfrac{m^{\circ j-1}}{1-k_{V0}^j}N_2^j} + L_3^j + M_4^j,
$$

$$
M_4^j = \frac{L_4^j - L_2^jN_2^j}{\left(L_4^j - \dfrac{m^{\circ j-1}}{1-k_{V0}^j}N_2^j\right)N_R^j},\ b_1^j = \frac{c_1\tau_{T2}^j}{c_2^j\tau_{T1}^j},
$$

$$
N_R^j = -\frac{\rho_{10}^{\circ}}{p_0}\frac{i\omega(a_0^j)^2G_R^j}{3(G_R^jt_A^j+1)},\ G_R^j = \frac{1}{t_R^j} - i\omega,
$$

$$
t_R^j = \frac{(a_0^j)^2}{4\nu_1},\ t_A^j = \frac{a_0^j}{C_1(\alpha_{20}^j)^{1/3}},
$$

$$
\tau_{T1}^j = \frac{4c_1\rho_{20}^{\circ j}(a_0^j)^2}{3Nu_1\lambda_1},\ \tau_{T2}^j = \frac{4c_2^j\rho_{20}^{\circ j}(a_0^j)^2}{3Nu_2^j\lambda_2^j},
$$

$$
N_1^j = \frac{i\omega\tau_{T1}^j}{2m^j} - 1,\ N_2^j = i\omega\tau_{T2}^j - 1,
$$

$$
N_3^j = k_2^j(c_2^j - R_{20}^j) - 1 + G^j,\ L_1^j = E^j(i\omega\tau_m^j - 1),
$$

$$
L_2^j = -\frac{l_0k_2^j}{(1-k_{V0}^j)T_0} + \Delta R^j - L_1^j(1+b_1^j),
$$

$$
L_3^j = 1 - G^j(1+b_1^j),\ L_4^j = L_1^j + \Delta R^jN_2^j,
$$

$$
k_2^j = \frac{i\omega\tau_{T2}^j}{c_2^j},\ G^j = k_{V0}^jE^j,\ E^j = \frac{p_0R_{V0}^j}{l_0\rho_{V0}^{\circ j}}(1-k_{V0}^j),
$$

$$
\Delta R^j = \frac{R_{V0}^j - R_{G0}^j}{R_{20}^j},\ R_{20}^j = k_{G0}^jR_{G0}^j + k_{V0}^jR_{V0}^j,
$$

$$
m^{\circ j} = \frac{\rho_{20}^{\circ j}}{\rho_{10}^{\circ}},\ m^j = \frac{\rho_{20}^j}{\rho_{10}},\ j = \mathrm{I},\mathrm{II}.
$$

Данная дисперсионная зависимость (1) определяет распространение акустических возмущений в двухфракционной смеси жидкости с парогазовыми пузырьками различных газов (разных начальных радиусов a_0^{I}, a_0^{II} и начальных объемных содержаний $\alpha_{20}^{\mathrm{I}}, \alpha_{20}^{\mathrm{II}}$) с учетом межфазного диффузионного массообмена.

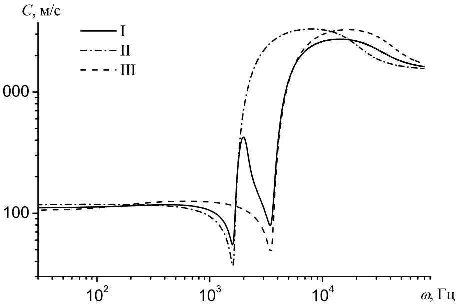


Рис. 1. Зависимость фазовой скорости от частоты колебаний для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III)

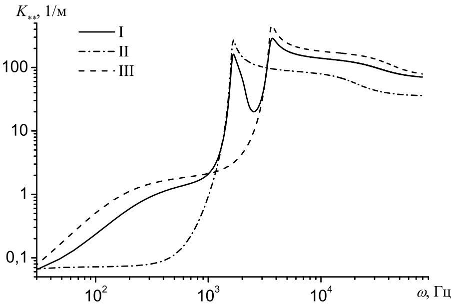


Рис. 2. Зависимость коэффициента затухания от частоты колебаний для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III)

3. Результаты расчетов

На рис. 1, 2 показано сравнение зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущений для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III). Расчетные зависимости построены с помощью дисперсионного соотношения (1). Рис. 1, 2 построены при следующих значениях параметров смеси: $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 327$ K, кривые I построены для значений $\alpha_2^{\mathrm{I}} = \alpha_2^{\mathrm{II}} = 0.005$, $a_0^{\mathrm{I}} = 2\cdot10^{-3}$ м, $a_0^{\mathrm{II}} = 10^{-3}$ м, кривые II – $\alpha_2 = 0.01$, $a_0 = 2\cdot10^{-3}$ м, кривые III – $\alpha_2 = 0.01$, $a_0 = 10^{-3}$ м. Как видно из рис. 1, 2 учет двухфракционности состава дисперсной фазы сме-

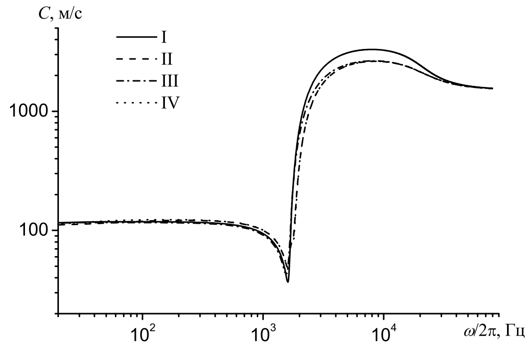


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от частоты колебаний для монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (I), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (II), с паровоздушными пузырьками и пузырьками углекислого газа с водяным паром(III), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия (IV)

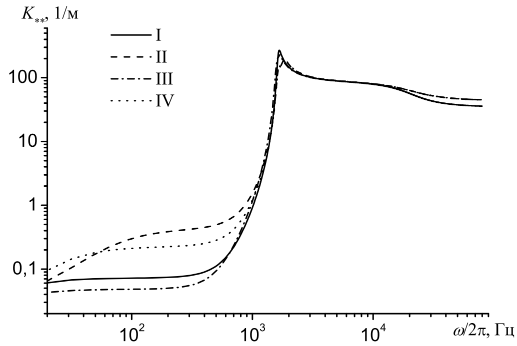


Рис. 4. Зависимость коэффициента затухания от частоты колебаний для монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (I), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (II), с паровоздушными пузырьками и пузырьками углекислого газа с водяным паром(III), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия (IV)

си приводит к возникновению двух локальных минимумов для зависимости фазовой скорости и двух локальных максимумов для зависимости коэффициента затухания от частоты (I), в отличие от случая смеси жидкости с пузырьками одного радиуса (кривые II и III). Это обусловлено различием значений резонансных частот собственных колебаний пузырьков каждой из фракций.

На рис. 3, 4 показано сравнение зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты для монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (I), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (II), с паровоздушными пузырьками и пузырьками углекислого газа с водяным паром (III), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия (IV). Кривые I построены при значениях $\alpha_2 = 0.01$, $a_0 = 2\cdot 10^{-3}$ м, кривые II, III и IV - $\alpha_2^{\mathrm{I}} = \alpha_2^{\mathrm{II}} = 0.005$, $a_0^{\mathrm{I}} = a_0^{\mathrm{II}} = 2\cdot 10^{-3}$ м. Как видно, замена части паровоздушных пузырьков в монодисперсной пузырьковой смеси на пузырьки гелия без учета фазовых превращений приводит к росту значения коэффициента затухания в низкочастотной области, что связано с существенно большим значением коэффициента температуропроводности гелия по сравнению с воздухом. Учет массообмена в пузырьке гелия, т.е. добавление еще одного диссипативного механизма приводит к еще большему усилению затухания.

Рассмотрим теперь эволюцию импульсов давления типа гауссовой кривой, создаваемых на границе пузырьковой среды, когда начальная форма импульсов описывается функцией вида

$$p(0,t) = \exp[-((t-t_*)/N)^2],$$

где t_* — половина длительности импульса; N — параметр, определяющий ширину пика импульса. Расчеты проводились с помощью дисперсионного соотношения (1), при использовании подпрограмм быстрого преобразования Фурье [11], по методике, изложенной в [4].

На рис. 5 показано сравнение эволюции импульса давления для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III). Кривые I построены при значениях $\alpha_2^{\mathrm{I}} = \alpha_2^{\mathrm{II}} = 0.005$, $a_0^{\mathrm{I}} = 10^{-3}$ м, $a_0^{\mathrm{II}} = 2\cdot 10^{-3}$ м; кривые II — $\alpha_2 = 0.01$, $a_0 = 10^{-3}$ м; кривые III — $\alpha_2 = 0.01$, $a_0 = 2\cdot 10^{-3}$ м. Расчетные профили построены на расстоянии 1 м и 2 м от места инициирования импульса соответственно. Видно, что затухание импульсов давления для двухфракционного случая больше по сравнению с монодисперсными смесями воды с паровоздушными пузырьками и меньше — с пузырьками гелия с водяным паром. Это соответствует характеру коэффициента затухания в низкочастотной области на рис. 2.

4. Заключение

Изучено распространение акустических волн в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками различных размеров и состава с

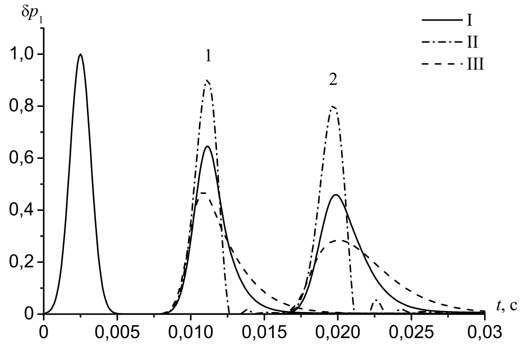


Рис. 5. Эволюция импульсного возмущения давления в двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III)

учетом фазовых превращений в каждой из фракций. Учет двухфракционности состава дисперсной фазы смеси жидкости с парогазовыми пузырьками разных размеров приводит к появлению двух локальных максимумов в зависимости коэффициента затухания от частоты в области значений резонансных частот парогазовых пузырьков. Установлено, что замена части паровоздушных пузырьков в монодисперсной смеси воды на пузырьки гелия с водяным паром приводит к увеличению коэффициента затухания, а при замене на пузырьки углекислого газа с водяным паром — к уменьшению коэффициента затухания в низкочастотной области. С помощью метода быстрого преобразования Фурье выполнены расчеты по распространению импульсных возмущений давления малой амплитуды в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками.

Список литературы

[1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1,2. М.: Наука, 1987.

[2] Накоряков В. Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 246 с.

[3] Temkin S. Suspension acoustics: An Introduction to the Physics of Suspensions. New York: Cambridge University Press, 2005. 398 p.

[4] Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1998. 153 с.

[5] Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Волны в жидкостях с пузырьками // В сб.: Итоги науки и техники, сер. МЖГ. ВИНИТИ. 1982. Т. 17. С. 160–249.

[6] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей жидкости при распространении волн в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1081.

[7] Kerry W. Commander, Andrea Prosperetti. Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments // J. of the Acoustical Society of America. 1989. V. 85, № 2. P. 732.

[8] Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические возмущения разной геометрии в смеси жидкости с пузырьками нерастворимого газа // Известия ВУЗов. Проблемы энергетики. 2005. Т. 1–2. С. 3–10.

[9] Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками пара и газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 2. С. 188–192.

[10] Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в двухфракционной смеси жидкости с пузырьками разных газов и различного начального радиуса // Известия ВУЗов. Проблемы энергетики. 2009. Т. 3–4. С. 3–9.

[11] Гапонов В.А. Пакет программ быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов. Препринт №14-76. Новосибирск: Изд-во ИТФ СО АН СССР. 1976. 19 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529

Численное моделирование разлива над непроницаемым грунтом[1]

Гильманов С.А.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Биишевой, Стерлитамак

Разного рода гидродинамические процессы в подавляющем большинстве случаев могут иметь неблагоприятные с точки зрения экологии и экономики последствия. Это требует разработки адекватных мер для организации ликвидации последствий таких явлений. Математическое моделирование разливов имеет прикладное значение для разработки технологического оборудования, предназначенного для уменьшения влияния последствий разливов и его предупреждения.

1. Введение

Под мгновенным разливом столба жидкости понимают гидродинамический процесс, при котором в начальный момент времени каким-либо образом убираются стены, ограничивающие столб жидкости. Это может быть разрушение стены в силу различных причин или иной процесс. Разрушение столба жидкости под действием силы тяжести является актуальной и интересной задачей прикладной гидродинамики.

Время, в течение которого столб теряет свою цилиндрическую форму является малым по сравнению с временем, необходимым для того чтобы разлив принял стационарную конфигурацию. В литературе условно выделяют три этапа при разрушении столба жидкости [1,2]. Первый этап — инерционный — здесь основную роль играют силы тяжести и силы инерции; второй — переходный этап — здесь начинает сказываться влияние сил сопротивления со стороны поверхности растекания. Третий этап — стационарный, когда сила тяжести уравновешивается силами сопротивления со стороны окружающей среды. В литературе существуют и другие подходы [3, 4] к моделированию разрушения столба жидкости. Мгновенные разливы представляют собой достаточно быстрые движения жидкости, которые могут охватывать большие области на поверхности грунта. Также рост зеркала разлива ведет к росту испарения жидкости. Натурные эксперименты показывают, что для количественного согласования теории и эксперимента требуется уточнение моделей. Наибольшие отклонения поведения реальных разливов от результатов численного моделирования наблюдается на краях разлива, причем эти отклонения имеют тенденцию к увеличению с течением времени [2].

В работе исследован разлив жидкости конечного объема радиально-симметричной конфигурации. Полученные решения позволяют уточнить и обобщить ранее полученные результаты.

2. Моделирование разлива

Моделирование разлива рассмотрим на основе теории мелкой воды. Такой подход справедлив для разлива в том случае, когда его радиус значительно больше высоты $R \gg h$, а вертикальные скорость и ускорение пренебрежимо малы по сравнению с горизонтальными. Схема разлива представлена на рис. 1.

2.1. Математическая модель

Уравнение неразрывности может быть представлено в следующем виде [2]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rhv) = 0, \tag{1}$$

здесь $h = h(r, t)$ — высота слоя жидкости над горизонтальной поверхностью над радиальной координатой r в момент времени t; $v = v(r, t)$ — соответствующая усредненная по высоте скорость. Уравнение баланса импульсов принято в виде [5], где пренебрегаем силами сопротивления:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -g\frac{\partial h}{\partial r}, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11–01–97014-р_поволжье_а) и ГНТП РБ (Программа 3).

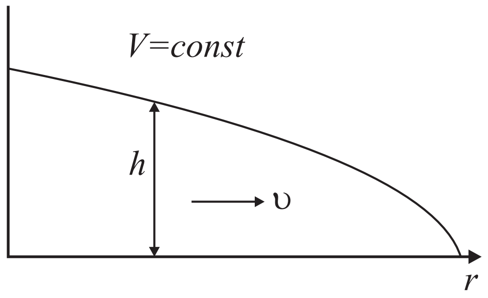


Рис. 1. Схема разлива в радиальном разрезе

здесь g — ускорение силы тяжести. Сохранение объема жидкости представлено как:

$$2\pi \int\limits_0^{R(t)} rhdr = V_0, \qquad (3)$$

здесь $R(t)$ — зависимость радиуса растекания от времени.

2.2. Автомодельное решение

Решение системы (1)–(2) будем искать в виде:

$$h(r,t) = a(t)f(\xi), \xi = \frac{r}{b(t)}, \upsilon(r,t) = \dot{b}(t)V(\xi). \qquad (4)$$

Здесь и в дальнейшем точки над a и b означают производные по времени. Указание переменных далее опущено. Подстановка (4) в (1),(2) и некоторое преобразование дает

$$\frac{\dot{a}b}{a\dot{b}} = \frac{1}{f}(\xi\frac{df}{d\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi f V)) \qquad (5)$$

для уравнения неразрывности и

$$\frac{a\dot{b}\ddot{b} + ab\dddot{b} - \dot{a}b\ddot{b}}{\dot{b}(\dot{a}b - 2a\ddot{b})} = \frac{V-\xi}{V}\frac{dV}{d\xi} \qquad (6)$$

для уравнения баланса импульсов. Левые части (5) и (6) являются функциями от времени, а правые — от автомодельной переменной ξ. Тогда воспользуемся методом разделения переменных, предложенным Фурье [6]. Решение левой части (5) указанным методом дает общее решение в виде

$$a = Db^C, \qquad (7)$$

где C — параметр; D — постоянная интегрирования. Правая часть (5) не дает однозначного решения в силу того, что состоит из двух неизвестных функций.

Аналитическое решение дает правая часть (6) в неявной форме:

$$(\xi - \frac{V}{1+E})\sqrt[E]{V} = G, \qquad (8)$$

здесь E — параметр уравнения (6); G — постоянная интегрирования. В частных случаях удается получить выражение для V в явной форме. Некоторые из этих выражений приведены ниже:

$$E = 0,\ V = \xi,\ V = G = \mathrm{const}, \qquad (9)$$

$$E = -\frac{1}{2}, V = \frac{\sqrt{1+G\xi}-1}{G}, V = -\frac{\sqrt{1+G\xi}+1}{G}, \qquad (10)$$

$$E = 1,\ V = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - 2G}. \qquad (11)$$

Подстановка, например, второго решения (9) в правую часть (5) дает аналитическое решение для f в виде:

$$f = \frac{H}{\xi}(\xi - G)^{C+1}, \qquad (12)$$

а первого решения (10) имеет следующее аналитическое решение:

$$f = \frac{H}{\xi}\frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 2G})^{-2-C}}{\sqrt{\xi^2 - 2G}}, \qquad (13)$$

здесь H — константа интегрирования.

Интегрирование левой части (6) осуществлено численно при помощи задания начальных значений b, $\dot{b}$ и $\ddot{b}$ с учетом (7).

С течением времени столб жидкости разливается, его высота уменьшается, а радиус растет, поэтому должно быть выполнено $\dot{a} < 0$, $\dot{b} > 0$. Для постепенного замедления разлива должно быть выполнено условие $\ddot{b} < 0$. Совершим подстановку (4) в (3) и получим выражение в виде произведения:

$$2\pi ab^2 \int\limits_0^{\xi_0} \xi f d\xi = V_0. \qquad (14)$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия $2\pi ab^2 = V_0$ и $\int\limits_0^{\xi_0} \xi f d\xi = 1$, что приведет к некоторому сужению множества решений. Сравнение последнего выражения с (7) дает следующие значения для C и D:

$$D = \frac{V_0}{2\pi},\ C = -2. \qquad (15)$$

Выражения (12) и (13) при этом примут вид:

$$f = \frac{H}{\xi}\frac{1}{(\xi - G)},\ f = \frac{H}{\xi}\frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 2G})^{-4}}{\sqrt{\xi^2 - 2G}}. \qquad (16)$$

Определим значения ξ_0 для этих зависимостей как функции от величин G, H:

$$\xi_0 = G(1 - exp(H^{-1})), \qquad (17)$$

$$H\xi_0^2((\xi_0^2 - 2G)^{\frac{1}{2}}(\xi_0^2 - G - \xi_0(\xi_0^2 - 2G)^{\frac{1}{2}}) = 8G^4. \qquad (18)$$

Как видно из (18) второе выражение не решается явно относительно ξ_0.

3. Заключение

Рассмотрена постановка задачи о разливе жидкости конечного объема на инерционном этапе. Уравнения, описывающие процесс разлива при помощи обобщенной автомодельной переменной, сведены к виду, удобному для решения. Получены некоторые аналитические выражения для автомодельной скорости и автомодельного профиля. Указано, что временные функции в общем виде не имеют аналитических решений, однако могут быть решены численно.

Список литературы

[1] Гамзаев Х.М. Моделирование растекания нефтяной пленки по поверхности моря // ПМТФ. 2009 год. Т. 50, № 2. С. 127–130.

[2] Spannuth M.J., Neufeld J.A., Wettlaufer J.S., Grae Worster M. Axisymmetric viscous gravity currents flowing over a porous medium // J.Fluid Mech. 2009. V. 622, № 1. P. 135–144.

[3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Издание 5-е. Т. VI. Гидродинамика. М: Физматлит, 2006. 736 с.

[4] Герлах С.А. Загрязнение морей. Л: Гидрометеоиздат, 1985. 262 с.

[5] Шагапов В.Ш., Гильманов С.А. Растекание жидкости по поверхности, сопровождаемое впитыванием в грунт // ПМТФ. 2010 год. Т. 51, № 5. С. 88–94.

[6] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, Издание 4-е. 1966. 444 с.

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.546:536.421

Особенности образования гидрата в пористых пластах при продувке газом

Гималтдинов И.К., Хасанов М.К., Столповский М.В., Кильдибаева С.Р.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Биишевой, Стерлитамак

Теоретически исследуются процессы образования газогидрата в насыщенных изначально газом и водой пористых средах конечной протяженности при продувке их холодным газом. Исследовано влияние исходных параметров пористой среды, а также условий продувки на особенности эволюции полей гидратонасыщенности и температуры. Показано, что при некоторых параметрах нагнетаемого газа возможна остановка границы фазового перехода.

1. Введение

Образование газовых гидратов в пористых структурах в настоящий момент имеет широкие промышленные перспективы, связанные, в первую очередь, с возможностью хранения газа в гидратном состоянии. В основу гидратного способа хранения газа положено то обстоятельство, что при одинаковых условиях в единице объема в гидратном состоянии содержится значительно больше газа, чем в свободном состоянии [1, 2].

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим задачу об образовании газогидрата в пористом пласте длины L при закачке холодного газа. В этом случае интенсивность образования гидрата лимитируется отводом скрытой теплоты гидратообразования. При теоретическом описании процессов тепломассопереноса при закачке газа в пласт примем следующие допущения: пористость постоянна, газ — калорически совершенный, скелет пористой среды, гидрат и вода — несжимаемы и неподвижны. Система основных уравнений, описывающая процессы фильтрации и теплопереноса, сопровождающиеся образованием газогидрата в пористой среде, и представляющая собой законы сохранения масс и энергии, закон Дарси и уравнение состояния для газа в плоскоодномерном случае при отмеченных выше допущениях имеет вид [3]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_g m S_g + \rho_h m S_h G\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g m S_g \upsilon_g\right) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_l S_l + m\left(1-G\right)\rho_h S_h\right) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c T\right) + \rho_g c_g m S_g \upsilon_g \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \\
+\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_h S_h L_h\right),\\
m S_g \upsilon_g = -\frac{k_g}{\mu_g}\frac{\partial p}{\partial x},\\
p = \rho_g R_g T,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где m — пористость; G — массовая концентрация газа в гидрате; ρ_j и S_j ($j = sk,\ h,\ l,\ g$) — истинные плотности и насыщенности пор j-ой фазы; υ_g, k_g, c_g и μ_g — соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость и динамическая вязкость газовой фазы; p — давление; T — температура; L_h — удельная теплота гидратообразования; ρc и λ — удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы; индексы sk, h, l и g относятся к параметрам скелета, гидрата, воды и газа соответственно. Анализ показывает, что при отмеченных выше допущениях можно пренебречь переменностью удельной объемной теплоемкости ρc и коэффициентом теплопроводности системы λ. Данная система уравнений дополняется зависимостью коэффициента проницаемости для газа от газонасыщенности, заданной на основе формулы Козени:

$$k_g = k_0 S_g^3,$$

где k_0 — абсолютная проницаемость пласта.

В общем случае при образовании гидрата возникают три характерные области: ближняя, насыщенная газом и гидратом, дальняя, заполненная газом и водой, а также промежуточная область, в которой газ, гидрат и вода находятся в состоянии термодинамического равновесия. При этом возникают две фронтальные границы $x = x_{(i)}$ ($i = n, d$), разделяющие между собой указанные области. На этих поверхностях, где терпят скачки насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла, выполняются соотношения, следующие из условий баланса массы и тепла:

$$\begin{gathered}\left[m\left(S_h\rho_h\left(1-G\right)+S_l\rho_l\right)\dot{x}_{(i)}\right]=0,\\ \left[m\left(\rho_g S_g\left(\upsilon_g-\dot{x}_{(i)}\right)-\rho_h S_h G\dot{x}_{(i)}\right)\right]=0,\\ \left[\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right]=\left[m\rho_h L_h S_h\dot{x}_{(i)}\right].\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $[\psi]$ — скачок параметра ψ на границе между зонами; $\dot{x}_{(s)}$ — скорость движения этой границы. Температура и давление на этих границах полагаются непрерывными. В трехфазной области, где одновременно присутствуют газ, вода и гидрат, и происходит процесс образования газогидрата, принимается условие равновесия фаз [1]:

$$T=T_0+T_*\ln\left(\frac{p}{p_{s0}}\right), \tag{3}$$

где T_0 — исходная температура системы; p_{s0} — равновесное давление, соответствующее исходной температуре; T_* — эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата. Пусть пористый пласт в начальный момент времени насыщен газом и водой, давление p_0 и температура T_0 которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии и изначально одинаковы во всем пласте:

$$t=0:\quad S_l=S_{l0},\quad T=T_0,\quad p=p_0\quad (x\geq 0).$$

Через границу пласта закачивается газ (одноименный исходному), давление p_e и температура T_e которого соответствуют условиям образования газогидрата и поддерживаются на этой границе постоянными:

$$x=0:\quad T=T_e,\quad p=p_e\quad (t>0).$$

На правой границе пласта примем условие отсутствия кондуктивного потока тепла и постоянство давления (равное давлению в начальный момент времени p_0):

$$x=L:\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad p=p_0\quad (t>0).$$

На основе системы уравнений (1) можно получить уравнения пьезо- и теплопроводности, которые описывают распределения давления и температуры в ближней и дальней областях:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{T}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\aleph^{(P)}}{T}\frac{\partial p}{\partial x}\right),\\ \frac{\partial T}{\partial t}=\aleph^{(T)}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\rho_g k_g c_g}{\mu_g\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x},\end{gathered} \tag{4}$$

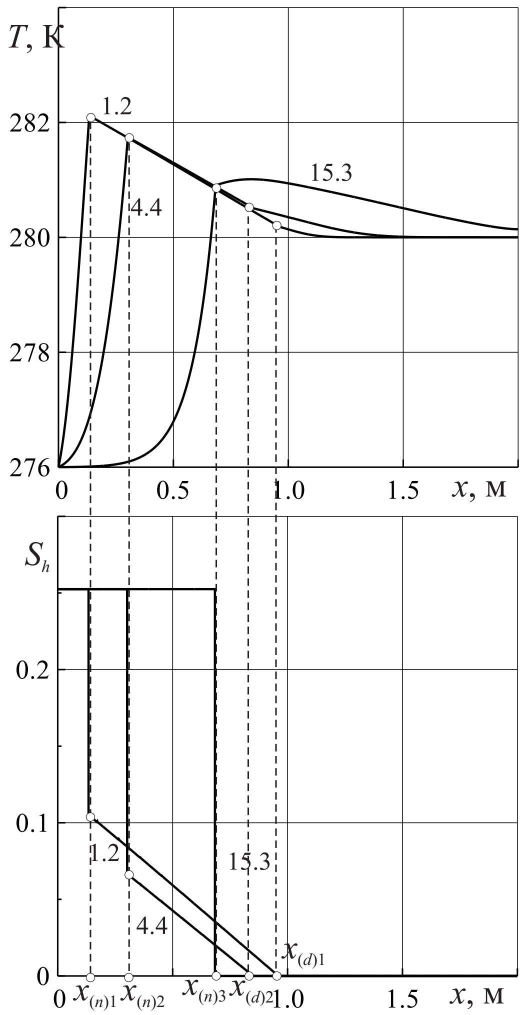


Рис. 1. Распределение температуры и гидратонасыщенности при продувке пласта. Плоско-одномерная задача: $p_e=7$ МПа. Числа на кривых — время в часах

где $\aleph^{(T)}=\lambda/\rho c$ и $\aleph^{(P)}=k_g p/\mu_g m S_g$ — коэффициенты температуропроводности и пьезопроводности.

В промежуточной области на основе системы (1) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{pS_g}{T}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_g}{\mu_g}\frac{p}{T}\frac{\partial p}{\partial x}\right)-\rho c\frac{GR_g}{L_h}\frac{\partial T}{\partial t}+\\ \frac{\rho_g c_g k_g}{\mu_g}\frac{GR_g}{L_h}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda\frac{GR_g}{L_h}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\\ \frac{\partial S_h}{\partial t}=\frac{1}{\Delta T}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\rho_g k_g c_g}{m\rho_h\mu_g L_h}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}-\\ -\frac{\lambda}{m\rho_h L_h}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\end{gathered} \tag{5}$$

где $\Delta T=m\rho_h L_h/\rho c$.

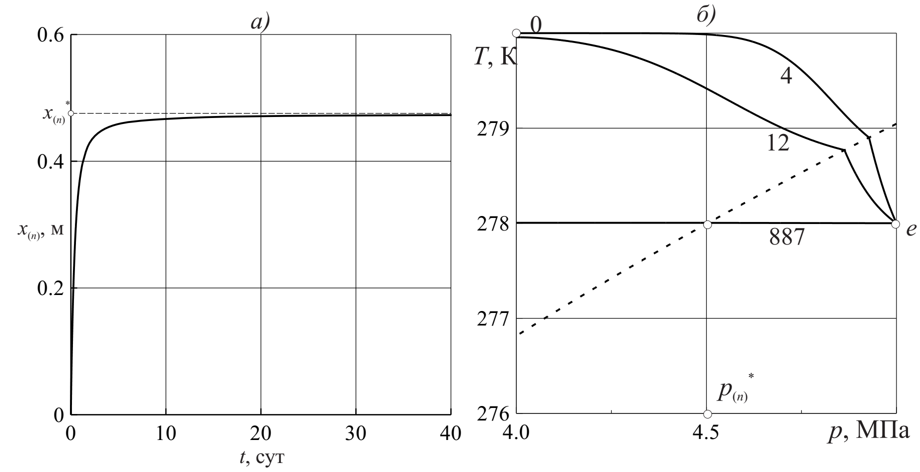


Рис. 2. а) Зависимость положения фронта гидратообразованиия от времени при продувке пласта газом. Плоско-симметричная задача: $p_e = 5$ МПа. б) Фазовая диаграмма процесса образования гидрата при продувке пласта газом. Числа на кривых выражают время в часах

3. Результаты расчетов

Для численного решения задачи (4), (5) с начально-граничными условиями и условиями (2) на границах фазового перехода введем равномерную сетку с шагом Δx. Так как решение ищется в областях с двумя неизвестными границами фазовых переходов, то будем использовать метод ловли фронтов в узлы пространственной сетки. Суть данного метода заключается в следующем: за один временной шаг фронт x_n перемещается по координате x ровно на один шаг, а узел, соответствующий границе x_d, находится в ходе решения задачи. При этом значения параметров на границе фазовых переходов, а также значение временного шага, определяются из системы (2). Все расчеты были проведены для системы «пористая среда–твердый газогидрат–газ», со следующими параметрами: $m = 0.1$, $G = 0.12$, $S_{l0} = 0.2$, $k_0 = 10^{-13}$, $\mu_g = 10^{-5}$ Па·с, $\lambda = 2$ Вт/(м·К), $\rho c = 2.6\cdot 10^6$ Дж/(кг·К), $L_h = 5\cdot 10^5$ Дж/кг, $\rho_h = 900$ кг/^{3}, $\rho_l = 900$ кг/^{3}, $T_0 = 280$ К, $T_* = 10$ К, $p_0 = 4$ МПа, $p_{s0} = 5.5$ МПа, $c_g = 1560$ Дж/(кг·К). При этом шаг по пространственной координате полагался равным $\Delta x = 0.001$ м. Анализ полученных решений при нагнетании газа под давлениями $p_e = 5$ МПа и $p_e = 7$ МПа показал, что результаты расчетов на начальном этапе процесса образования газового гидрата в пластах конечной протяженности практически совпадают с результатами автомодельной постановки задачи, т.е. в зависимости от параметров нагнетания газа и пористой среды газогидрат может образовываться как на фронтальной поверхности, так и в протяженной области.

На рис. 1 для плоскоодномерного случая представлены распределения температуры и гидратонасыщенности при продувке пласта длины $L = 2$ м газом под давлением $p_e = 7$ МПа, температурой $T_e = 276$ К. При таких параметрах нагнетаемого газа образование газогидрата в начальный момент времени происходит в протяженной области. Из рисунка следует, что с течением времени дальняя граница $x = x_{(d)}$ движется назад, навстречу ближней границе $x = x_{(n)}$. Действительно, в момент времени $t = 1.2$ ч координата дальней подвижной границы была равна $x_{(d)1} = 1$ м, а в момент времени $t = 4.4$ ч — $x_{(d)2} = 0.8$ м. При этом наблюдается падение значения гидратонасыщенности в этой области. Таким образом, в зоне трехфазного равновесия происходит частичное разложение ранее образовавшегося гидрата. Это обусловлено конвективным сносом нагретого газа за счет образования газогидрата на границе $x = x_{(n)}$ и его течения в объемной области. В момент времени $t = 15.3$ ч процесс гидратообразования происходит уже на фронтальной поверхности $x = x_{(n)}$, что соответствует изменению на этой поверхности величины гидратонасыщенности от $S^-_{h(n)} = S_{he}$ до $S^+_{h(n)} = 0$.

На рис. 2(а) представлена зависимость положения фронта образования газогидрата от времени при нагнетании газа в пласт длиной $L = 1$ м с температурой $T = 278$ К. Для параметров, характеризующих исходное состояние системы приняты следующие значения: $p_0 = 4$ МПа, $T_0 = 280$ К, абсолютная проницаемость пласта $k_0 = 10^{-14}$. Как следует из рисунка, в случае продувки пласта при данных параметрах пласта и нагнетаемого газа, поверхность фазового перехода движется только до некоторого положения $x^*_{(n)}$, затем ее движение прекращается. Это соответствует остановке границы фазового перехода и означает, что часть порового пространства будет оставаться не занятой гидратом.

Для объяснения такого поведения движения поверхности $x = x_{(n)}$ рассмотрим представленные на рис. 2(b) фазовую диаграмму и распределение давления в пласте. Здесь сплошная кривая glh определяет условие фазового равновесия между газом, водой и газогидратом. Точкой «0» изображено состояние, соответствующее начальному состоянию пористой среды, точкой «e» — условие на левой границе пористой среды $x = 0$. Как видно из рисунка, с течением времени температура пласта становится равной температуре нагнетаемого газа. Давление и однозначно связанная с ним равновесная температура имеют вид прямой, убывающей вглубь пласта. Поэтому, имеется такая точка $x = x^*_{(n)}$, в которой равновесная температура совпадает с температурой пласта. Таким образом, для образования газогидрата в пласте в случае продувки его газом необходимо, чтобы температура нагнетаемого газа удовлетворяла следующему условию:

$$T_e < T_0 + T_* \ln\left(\frac{p_e}{p_{s0}}\right) \quad (t > 0,\ \ x = 0).$$

Список литературы

[1] Бык С.,Ш. Газовые гидраты. М: Химия, 1980.

[2] Истомин В.А. Газовые гидраты в природных условиях. М: Недра, 1992.

[3] Шагапов В.Ш. Численное исследование процессов образования газогидрата в пористой среде конечной протяженности при продувке газом // ПМТФ. 2011. Т.52, № 4. С. 116–126.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.59; 534.2; 534.6

Динамика пузырькового слоя вблизи поверхности океана в условиях существования внутренней волны и циркуляций Лангмюра

Гримшоу Р.*, Островский Л.А., Топольников А.С.***, Хуснутдинова К.Р.**,*****

*Университет Лафборо, Лафборо, Великобритания,
**Университет Колорадо, Боулдер, США,
***Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе исследуется эволюция пузырькового слоя вблизи поверхности океана, обусловленная макромасштабным перемещением слоев жидкости. В качестве источников такого перемещения изучаются такие природные явления, как распространение внутренней волны на границе пикноклина и лангмюровские циркуляции. На основе полидисперсной модели пузырькового слоя исследуется влияние различных механизмов воздействия на динамику пузырьков в контексте описания природных явлений, наблюдаемых в натурных экспериментах.

1. Введение

Изучение волновых процессов в приповерхностном слое океана представляет интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения. В работе [1] авторами впервые предложено теоретическое объяснение эффекта перераспределения пузырькового слоя в условиях существования внутренней волны, которое наблюдалось в экспериментах в Японском море [2]. На основе численной реализации математической модели динамики пузырькового слоя для случая синусоидальной волны установлено, что увеличение концентрации пузырьков над гребнем внутренней волны обусловлено двумя механизмами. При сильном ветре (порядка 10 м/с), когда обрушение поверхностных волн происходит по всей акватории, горизонтальный перенос пузырьков вызван полем скорости, создаваемым внутренней волной. При относительно слабом ветре (до 3–5 м/с) увеличение концентрации пузырьков в области над гребнем внутренней волны связано с локализацией очагов обрушения поверхностных волн при взаимодействии с внутренней волной.

Одним из существенных упрощений модели, использованной в работе [1], является предположение о том, что в каждой точке жидкости все пузырьки имеют одинаковый радиус. В настоящей работе применяется полидисперсная модель, которая учитывает неоднородность радиусов пузырьков. Это позволяет точнее описать динамику пузырькового слоя и снизить число эмпирических параметров в уравнениях. По сравнению с работой [1] используется более реалистичная модель для описания параметров внутренней волны [3]. Учет нелинейных эффектов в задаче о распространении волны вдоль границы раздела двух жидкостей приводит к решению с кноидальной волной, которая по форме больше соответствует той, что наблюдалась в экспериментах [2]. Кроме этого в настоящей работе представлены новые результаты по моделированию динамики пузырькового слоя в однослойной жидкости с циркуляциями Лангмюра.

2. Математическая модель

Для описания эволюции пузырькового слоя во времени и пространстве используется уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) + \frac{\partial}{\partial z}(nv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_v \frac{\partial n}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_v \frac{\partial n}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{da}{dt} n\right) + q. \qquad (1)$$

Здесь t — время; x и z — горизонтальная и вертикальная координаты; a — радиус пузырьков; $n = n(a, x, z, t)$ — плотность распределения пузырьков в жидкости, которая связана с объемной концентрацией пузырьков N соотношением:

$$N(x, z, t) = \int_{a_1}^{a_2} n(a, x, z, t) da,$$

где a_1 и a_2 — минимальный и максимальный радиусы пузырьков; K_v — коэффициент турбулентной диффузии [1]; $q = q(a, x, z, t)$ — скорость образования пузырьков в результате обрушения поверхностных волн; u и v — компоненты вектора скорости перемещения пузырьков в жидкости, причем

$$v(a, x, z, t) = w(x, z, t) + v_\infty(a),$$

где w — вертикальная составляющая скорости жидкости; v_∞ — скорость всплытия пузырька, определяемая уравнениями [4]:

$$v_\infty = \frac{2}{9}\frac{a^2 g\rho_l}{\mu_l}\left[\left(y^2+2y\right)^{1/2} - y\right],\ y = 10.82\frac{\mu_l^2}{\rho_l^2 g a^3},$$

ρ_l и μ_l — плотность и коэффициент динамической вязкости воды; g — ускорение свободного падения.

Усредненная по радиусу вертикальная составляющая скорости пузырьков V может быть определена из уравнения:

$$V(x, z, t) = \frac{1}{N}\int_{a_1}^{a_2} n(a, x, z, t)v(a, x, z, t)da.$$

Проинтегрировав уравнение (1) по радиусу от a_1 до a_2 получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial z}(NV) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_v\frac{\partial N}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_v\frac{\partial N}{\partial z}\right) - \left.\left(\frac{da}{dt}n\right)\right|_{a_1}^{a_2} + Q,\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$Q(x, z, t) = \int_{a_1}^{a_2} q(a, x, z, t)da.$$

Если предположить, что при достижении радиусом пузырька критического значения a_1 происходит его мгновенное растворение в жидкости, а $n(a_2, x, z, t) = 0$ (количество пузырьков радиуса a_2 ничтожно мало), то можно ввести скорость исчезновения пузырьков σ_*:

$$\sigma_* = \frac{1}{N}\left.\left(\frac{da}{dt}n\right)\right|_{a_1}^{a_2} = -\frac{1}{N}\frac{da_1}{dt}n(a_1, x, z, t),$$

и равенство (2) преобразуется к уравнению, которое использовалось в работе [1] для монодисперсного пузырькового слоя:

$$\begin{gathered}\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial z}(NV) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_v\frac{\partial N}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_v\frac{\partial N}{\partial z}\right) - \sigma_* N + Q.\end{gathered}$$

Для моделирования растворения газа в пузырьках в результате молекулярной диффузии воспользуемся уравнением [1]:

$$\frac{d}{dt_b}\left(\frac{4}{3}\pi\rho_g a^3\right) = -4\pi a D\kappa\left(p_g - p_a\right)\mathrm{Nu}, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt_b} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(u - \frac{K_v}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \left(v - \frac{K_v}{n}\frac{\partial n}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{da}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\end{gathered} \tag{4}$$

— полная производная по времени; ρ_g — плотность газа в пузырьке; D — коэффициент молекулярной диффузии; p_a — атмосферное давление; κ — коэффициент абсорбции, связывающий концентрацию растворенного в воде газа с давлением в жидкости $C_\infty = \kappa p$; Nu — число Нуссельта:

$$\mathrm{Nu} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Pe}^{1/3}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{av_\infty}{D}.$$

Важно отметить, что в уравнении (3) плотность и давление в газе являются функциями времени, пространственных координат и радиуса пузырьков, поскольку

$$p_g = p(x, z, t) + \frac{2\sigma}{a}, \tag{5}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Число Нуссельта Nu также зависит от радиуса пузырька, поэтому уравнение (3) описывает скорость изменения радиуса пузырька в данной точке пространства с фиксированным начальным значением радиуса.

Зависимость плотности газа от давления в пузырьке определяется из уравнения сохранения температуры газа внутри него [1]:

$$\frac{d}{dt_b}\left(\frac{p_g}{\rho_g}\right) = 0. \tag{6}$$

Из равенств (3)–(6) выводится уравнение для скорости изменения радиуса пузырька:

$$\begin{gathered}\frac{da}{dt} = \left[-\frac{a}{3p_g}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \left(u - \frac{K_v}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right.\right. \\ \left.\left. + \left(v - \frac{K_v}{n}\frac{\partial n}{\partial z}\right)\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \frac{D\kappa\left(p_g - p\right)\mathrm{Nu}}{a\rho_g}\right] \times \\ \times \left[1 - \frac{2\sigma}{3p_g a}\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{7}$$

Граничные условия для уравнения (1) выглядят следующим образом:

$$n(a, 0, z, t) = n(a, L, z, t),$$

$$\frac{\partial n}{\partial a}(a_1, x, z, t) = 0, \quad n(a_2, x, z, t) = 0,$$

$$\left(\frac{K_v}{n}\frac{\partial n}{\partial z} - v_\infty\right) n\Big|_{z=0} = \int_{-H}^{0} q(a,x,z,t)dz,$$
$$\frac{\partial n}{\partial z}(a,x,-H,t) = 0.$$

Система дифференциальных уравнений (1), (6) и (7) решается численно с помощью неявной схемы 1-го порядка аппроксимации для трехмерной расчетной области $\Omega = \{(a,x,z) : a_1 \le a \le a_2, 0 \le x \le L, -H \le z \le 0\}$. Пространственные и временные распределения полей скорости и давления при этом вычисляются аналитически из решения задачи о распространении кноидальной волны вдоль границы раздела двух несжимаемых жидкостей [3], либо задаются полуэмпирическими формулами, как в случае циркуляции Лангмюра.

3. Установившееся течение жидкости с пузырьками газа в ячейках Лангмюра

Циркуляциями Лангмюра называются упорядоченные циркуляции жидкости, возникающие в верхней части водоема в перпендикулярной плоскости к направлению ветра. При скорости ветра более 3–5 м/с на водной поверхности хорошо различимы характерные полосы, направленные вдоль действия ветра и представляющие собой скопления пены, водорослей, пузырьков и прочих мелких неоднородностей. При этом расстояния между полосами в океане могут достигать нескольких сотен метров, а сами полосы имеют особенность подстраиваться под изменение направления ветра в течение нескольких минут.

Несмотря на имеющееся многообразие теорий, объясняющих природу возникновения лангмюровских циркуляций, в настоящее время отсутствует единая точка зрения на механизмы их формирования. Для задания поля скорости внутри циркуляционных ячеек Лангмюра воспользуемся полуэмпирической моделью работы [5]. Горизонтальная и вертикальная компоненты скорости в этом случае определяются равенствами:

$$u = \frac{\partial S}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial S}{\partial x},$$

где

$$S = \kappa_1 \frac{L_x w_{Lmax} \sin(\pi x/L_x)\sin(\pi z/L_z)}{\pi \cosh(\pi y/L_x) + \kappa_2}. \qquad (8)$$

Здесь

$$w_{Lmax} = 10^{-3} \times (8.5W - 3) \qquad (9)$$

— максимальная скорость жидкости, направленная вниз и зависящая от скорости ветра W (м/с);

$$L_x = 0.079W + 1.76, \quad L_z = 0.539W - 0.432$$

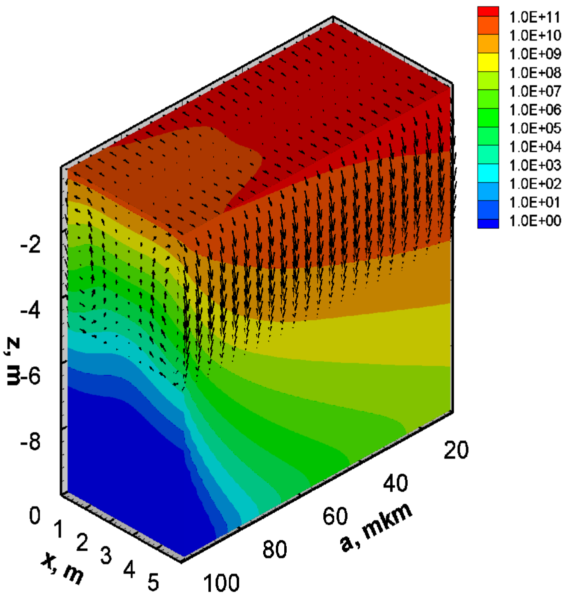


Рис. 1. Распределение $n(a,x,z)$ (м$^{-4}$) и поле скорости в условиях существования лангмюровской циркуляции

— длина и высота одной ячейки Лангмюра.

Значение коэффициента κ_1 в уравнении (8) выбирается таким образом, чтобы при заданной скорости ветра W обеспечить выполнение условия (9).

Для известных значений компонентов скорости давление в ячейке Лангмюра находится из численного решения уравнения:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 2\rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right) =$$
$$= 2\rho_l \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z}\right)^2\right)$$

с граничными условиями:

$$p(x,0) = p_a, \quad p(x,-L_z) = p_a + \rho_l g L_z,$$
$$p(-L_x, z) = p(L_x, z).$$

При постоянных скорости и направлении ветра лангмюровские циркуляции не изменяются во времени, поэтому задача об определении распределения пузырьков в приповерхностном слое океана является стационарной. Ее решение ищется посредством численного интегрирования системы уравнений (1), (6) и (7) по времени с произвольно выбранными начальными условиями до обеспечения сходимости.

На рис. 1 показаны плотность распределения пузырьков в жидкости и поле скорости в плоскости XZa. Численное решение построено для следующих параметров задачи: $\rho_l = 1000$ кг/м^3, $p_0 =$

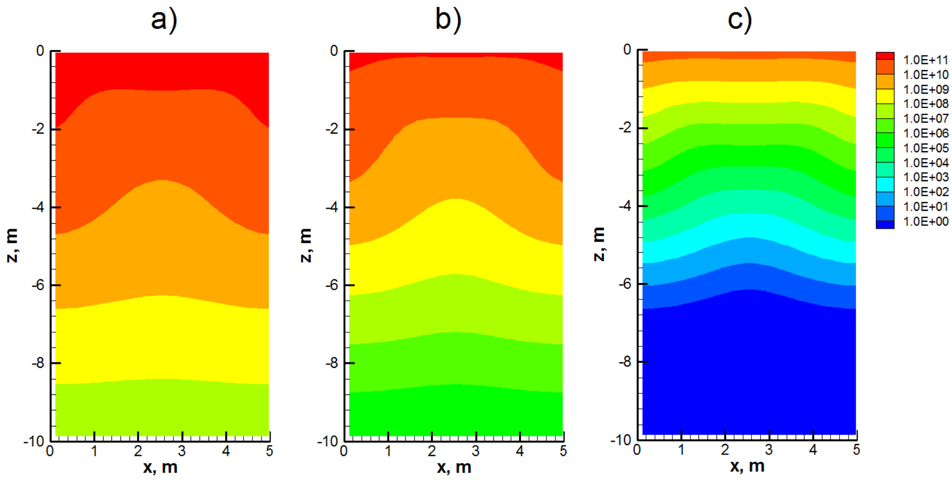


Рис. 2. Распределения $n(a_{fix}, x, z)$ (м$^{-4}$) для $a_{fix} = 10$ мкм (a), $a_{fix} = 50$ мкм (b) и $a_{fix} = 100$ мкм (c) в условиях существования лангмюровской циркуляции

101325 Па, $a_1 = 10$ мкм, $a_2 = 100$ мкм, $\sigma = 0.036$ Н/м, $D = 2 \times 10^{-9}$ м^2/с, $\kappa = 2.1 \times 10^{-7}$ кг/(м^3·Па), $\mu_l = 10^{-3}$ Па·с, $W = 10$ м/с, $L = 2L_x$, $H = -2L_z$.

Согласно экспериментальным наблюдениям при расчетной скорости ветра обрушение волн происходит непрерывно на всей водной поверхности. Для моделирования интенсивности впрыска пузырьков используется зависимость

$$q(a, x, z, t) = q_0 a^{\tau} \delta(z),$$

где $\tau = -1.5$ [6]; δ — дельта–функция Дирака, а q_0 определяется из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных данных для неподвижной жидкости (более подробно см. [1]).

Численное решение, соответствующее рис. 1, получено на равномерной сетке, состоящей из 20 ячеек в направлении оси X, 100 ячеек в направлении оси Z и 45 ячеек в направлении оси радиусов. В соответствии с выбором расчетной области движение жидкости происходит только в зоне $z \geq -H/2$, причем максимальные отрицательные значения вертикальной скорости достигаются в плоскостях $x = 0$ и $x = L$. Циркуляции Лангмюра способствуют перераспределению концентрации пузырьков вблизи поверхности воды: максимальные значения n при фиксированных значениях глубины и радиуса пузырька достигаются на боковых плоскостях расчетной области.

На рис. 2 представлены распределения n для трех различных значений радиусов пузырьков: $a = 10$ мкм (a), $a = 55$ мкм (b) и $a = 100$ мкм (c). Согласно полученным результатам концентрация пузырьков в воде существенно зависит от их радиусов. Среднее значение концентрации пузырьков малого радиуса ($a \approx 10$ мкм) вблизи поверхности составляет $10^7 - 10^8$ м$^{-4}$, что примерно в 100 раз больше, если сравнивать с концентрацией пузырьков среднего радиуса ($a \approx 50$ μm). Большие пузырьки ($a \approx 100$ μm) существуют только в приповерхностном слое жидкости ($z > -5$ м, $n > 100$ м$^{-4}$). При этом распределения объемной плотности пузырьков для различных радиусов качественно не отличаются: изолинии $n = \text{const}$ во всех случаях симметричны, имеют локальный максимум значений при $x \approx 2.5$ м и локальные минимумы на границах расчетной области.

4. Моделирование пузырькового слоя при взаимодействии внутренней и поверхностных волн

При относительно слабом ветре со скоростью, не превышающей 5 м/с, обрушение поверхностных волн приобретает очаговую структуру. Если при этом в верхнем слое жидкости существуют упорядоченные течения, то они способствуют консолидации таких очагов в соответствие со своей структурой.

В работе [1] были получены выражения для скорости генерации пузырьков на поверхности воды Q в уравнении (2) в зависимости от длины и амплитуды поверхностных волн и характеристик внутренней волны. Применительно к описанию генерации пузырьков фиксированного радиуса a выражение для мгновенной скорости впрыска будет выглядеть следующим образом:

$$q(a, x, z, t) = \frac{\partial \tilde{n}(a, x, z, t)}{\partial t}$$

при условии $\tilde{n}(a, x, z, t) > 0$ и $q(a, x, z, t) = 0$ в противном случае.

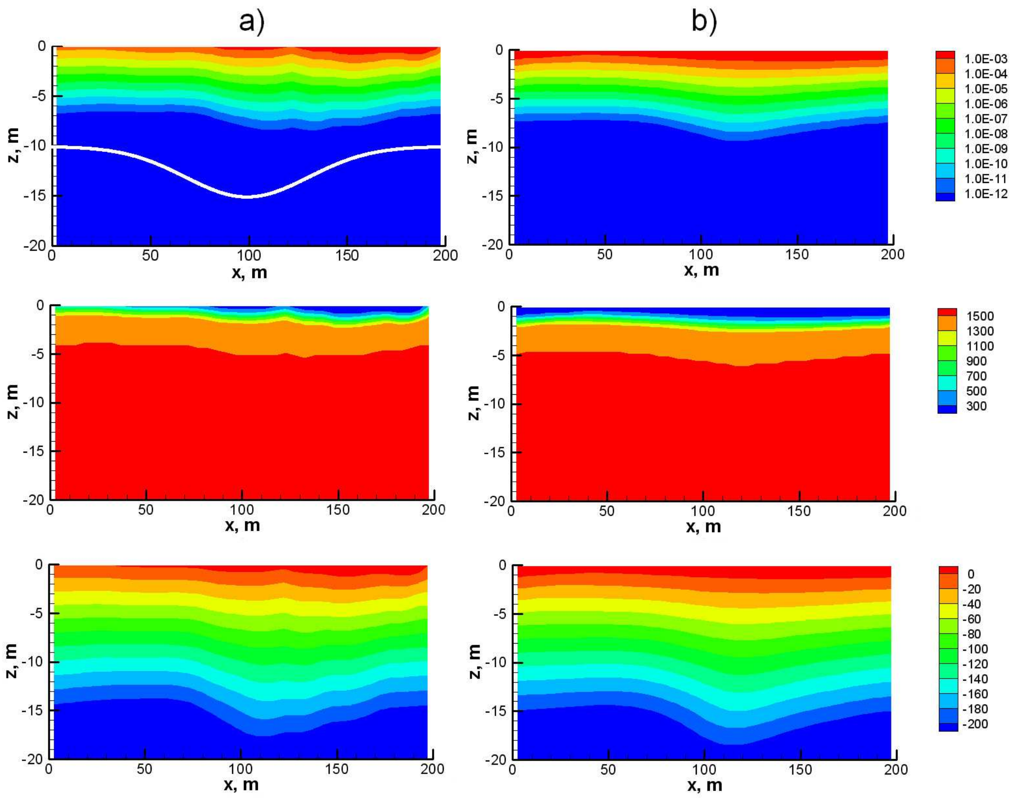


Рис. 3. Распределения объемной концентрации газа α_g (верхний ряд), скорости звука c (м/с, средний ряд) и коэффициента обратного рассеяния $10\lg M_v$ (нижний ряд) в жидкости с кноидальной внутренней волной амплитудой 5 м при скорости ветра $W = 2.5$ м/с для двух значений длины поверхностных волн: 2.6 м (a) и 2.5 м (b). Внутренняя волна (положение показано на верхнем левом графике) распространяется слева направо

Здесь

$$\tilde{n}(a,x,z,t) = \frac{3\,(\tau+4)\,\epsilon \tilde{E}_2 a^{\tau}}{4\pi\rho_l g\gamma^2\left(a_2^{\tau+4} - a_1^{\tau+4}\right)}\exp\left(\frac{z}{\gamma}\right),$$

где $\epsilon = 0.003$, $\gamma = 0.25k$ — характерная глубина проникновения пузырьков при обрушении поверхностной волны, равная четверти амплитуды волны k [6]; $\tilde{E}_2(a,x,t)$ — зависящая от фазы внутренней волны энергия поверхностной волны, затрачиваемая на генерацию пузырьков [1].

На рис. 3 показаны пространственные распределения объемной концентрации газа α_g, скорости звука c и коэффициента обратного рассеяния $10\lg M_v$ при скорости ветра $W = 2.5$ м/с. Распределения построены для фиксированного момента времени, когда гребень кноидальной внутренней волны, движущейся слева направо с амплитудой 5 м и длиной 200 м, находится в середине расчетной области при $x = 100$ м. Нестационарное решение задачи ищется для следующих параметров: $L = 200$ м, $H = 42$ м, $h = 12$ м (статическая глубина верхнего слоя жидкости), $\rho_{l1} = 999.256$ кг/м^3 (плотность верхнего слоя), $\rho_{l2} = 1000$ кг/м^3 (плотность нижнего слоя). Величины α_g, c и M_v выражаются через основные параметры задачи по формулам [1], [3]:

$$\alpha_g = \frac{4}{3}\pi\int_{a_1}^{a_2} n(a,z)a^3\,da,$$

$$c^2 = \frac{\rho_g\rho_l c_g^2 c_l^2}{\left(\alpha_g\rho_g + (1-\alpha_g)\rho_l\right)\left(\alpha_g\rho_l c_l^2 + (1-\alpha_g)\rho_g c_g^2\right)},$$

$$M_v(x,z,t) = \int_{a_1}^{a_2} n(a,x,z,t)\sigma_v\,da,$$

$$\sigma_v = \frac{4\pi a^2}{\left((\omega_0/\omega)^2 - 1\right)^2 + \Psi^2},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{3\gamma_g p_g}{\rho_l}}, \quad \Psi = \Psi_t + \Psi_r + \Psi_v,$$

$$\Psi_t = \sqrt{\frac{3\rho_l\lambda_g(\gamma_g-1)^2\omega_0}{4\pi\rho_g C_{pg}\gamma_g p_g}}, \quad \Psi_r = \sqrt{\frac{3\gamma_g p_g}{\rho_l c_l^2}},$$

$$\Psi_v = \frac{2\mu_l\omega_0}{3\pi\gamma_g p_g},$$

где $c_g = 290$ м/с и $c_l = 1500$ м/с — скорости звука в газе и жидкости; $\gamma_g = 1.4$ — показатель адиабаты; $C_{pg} = 1005$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; $\lambda_g = 0.025$ кг·м/(с^3·К) — коэффициент теплопроводности газа; $\omega_0 = 600$ кГц — частота внешнего сигнала, который использовался в экспериментах [2].

Рассматриваются численные решения для поверхностных волн с амплитудой 0.1 м и двумя различными значениями длины волны: 2.6 м (рис. 3(a)) и 2.5 м (рис. 3(b)). В расчетах используется трехмерная сетка, состоящая из 40 ячеек в направлении X (с пространственным шагом 5 м), 168 ячеек в направлении Z (шаг 0.25 м) и 18 ячеек в направлении a ($\Delta a = 5$ мкм). Решение, показанное на рис. 3, получено для момента времени $t \approx 1700$ с, когда оно может считаться независимым от начальных условий, поскольку по истечении этого периода внутренняя волна продвинулась на расстояние в 5.5 раз превышающее размер вычислительной области по оси X.

Из сравнения графиков на рис. 3 следует, что распределения параметров становятся более неоднородными при увеличении длины волны. Это связано с тем, что размер области поверхности, на которой происходит обрушение волн, напрямую зависит от длины волн: чем короче волны, тем быстрее они обрушиваются и, следовательно, тем равномернее происходит приток пузырьков. При этом существуют критические значения длины поверхностных волн, когда обрушение происходит по всей акватории, либо не происходит вообще. Для условий решаемой задачи они равны 2.032 м и 2.643 м соответственно.

Максимальная по длине внутренней волны концентрация газа и соответствующие ей минимальные значения скорости звука и коэффициента обратного рассеяния, как это следует из рис. 3, достигаются в области перед гребнем (задний склон внутренней волны), что полностью согласуется с экспериментальными наблюдениями [2]. При этом поверхностные волны вносят коротковолновые возмущения (рис. 3(a)), которые могут создавать локальные неоднородности в масштабе распространения внутренней волны.

5. Заключение

На основе предложенной модели для описания динамики полидисперсного пузырькового слоя проведено численное моделирование эволюции пузырьков газа в приповерхностном слое океана в условиях существования внутренней волны при слабом ветре и при сильном ветре в случае наличия ланг-мюровских циркуляций. Установлено, что концентрация пузырьков в жидкости существенно зависит от величины их радиусов, что делает необходимым учет неоднородности пузырькового слоя. Получено качественное объяснение эффекта копирования пузырьковым слоем профиля внутренней волны. При этом показано, что структура пузырькового слоя чувствительна по отношению к длине поверхностных волн: опрокидывания длинных волн вносят коротковолновые возмущения, которые могут создавать локальные неоднородности в масштабе распространения внутренней волны.

Список литературы

[1] Grimshaw R.H.J., Khusnutdinova K.R., Ostrovsky L.A., Topolnikov A.S. Structure formation in the oceanic subsurface bubble layer by an internal wave field // Phys. Fluids. 2010. V. 22. 106603.

[2] Серебряный А.Н., Галыбин Н.Н. Эффект воздействия внутренних волн на приповерхностный слой воздушных пузырьков в море // Материалы XI школы-семинара академика Л.М. Бреховских «Акустика океана». Москва. 23–26 мая 2006 г. С. 378–382.

[3] Гримшоу Р., Островский Л.А., Топольников А.С., Хуснутдинова К.Р. Влияние внутренней волны на распространение звука в приповерхностном пузырьковом слое // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 8 / Под ред. С.Ф. Урманчеева. Уфа: Нефтегазовое дело, 2011. С. 53–63.

[4] Thorpe S.A. A model of the turbulent diffusion of bubbles below the sea surface // J. Phys. Oceanogr. 1984. V. 14. 841–854.

[5] Chiba D., Baschek B. Effect of Langmuir cells on bubble dissolution and air–sea gas exchange // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. C10046.

[6] Baschek B., Farmer D. M., Garrett C. Tidal fronts and their role in air-sea gas exchange // J. Mar. Res. 2006. V. 64. 483–515.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 519.6

Многокомпонентный анализ численных результатов для достоверной оценки погрешности при решении задач механики

Житников В.П., Шерыхалина Н.М.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Предлагаются методы многокомпонентного анализа результатов численного решения различных вычислительных задач, включающие формальный двухэтапный алгоритм фильтрации, выбор эталона и тестирование. Применение предложенных методов при решении задач механики позволяет получать достоверные оценки погрешности и уточнять численные данные на несколько порядков.

1. Введение

В данной работе предлагается усовершенствованная методика обработки данных численного эксперимента, которая была представлена в [1, 2]. Цели этой методики заключаются в получении оценки погрешности, ее проверке и обосновании достоверности, а также в уточнении и наглядном представлении результатов анализа работы численных алгоритмов и программ.

Методами интервального анализа достигнуты впечатляющие успехи в проведении доказательных вычислений. Тем не менее, существует множество разработанных численных методов и их программных реализаций, которые либо должны быть заменены практически полностью, либо они могут быть дополнены некоторой методикой постпроцессорной обработки результатов. Эта методика должна обеспечить физическую достоверность получаемых результатов и их оценок. Физическая достоверность может быть достигнута путем получения приближенного значения искомого параметра (называемого ниже эталоном), оценки его погрешности (интервала неопределенности) и проверки факта пересечения интервалов, полученных разными способами.

2. Математическая модель вычислительного процесса

Математическая модель процесса вычисления многими численными методами некоторой величины z может быть представлена в виде многокомпонентной зависимости

$$z_n = z+c_1 f_1(n)+c_2 f_2(n)+\ldots+c_L f_L(n)+\Delta(n), \quad (1)$$

где z — точное значение; z_n — приближенный результат, полученный при числе узловых точек, равном n; $f_1,\ldots, f_L$ — некоторые функции числа узлов. Все входящие константы и функции могут иметь как действительные, так и комплексные значения.

Для разностных формул численного дифференцирования, квадратурных формул Ньютона–Котеса, разностных методов решения задач для уравнений математической физики $f_j(n) = n^{-k_j}$, k_j — произвольные действительные числа [3]. Некоторым численным методам соответствуют функции $f_j(n) = \lambda_j^n$, где $|\lambda_j| < 1$.

В $\Delta(n)$ могут входить не вошедшие в сумму слагаемые того же вида, остаточный член, погрешность округления и многие другие составляющие, обусловленные как численным методом, так и конкретной программной реализацией. Поэтому $\Delta(n)$ не стремится к нулю при увеличении n, а в большинстве случаев возрастает.

Пусть имеется конечная последовательность $z_{n_i}^{(0)} = z_{n_i}$ $i = 1,\ldots, I$ вычисленных результатов. Тогда можно записать систему равенств:

$$\begin{aligned} z_{n_1} &= z+c_1 f_1(n_1)+\ldots+c_L f_L(n_1)+\Delta(n_1), \\ z_{n_2} &= z+c_1 f_1(n_2)+\ldots+c_L f_L(n_2)+\Delta(n_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n_I} &= z+c_1 f_1(n_I)+\ldots+c_L f_L(n_I)+\Delta(n_I). \end{aligned} \quad (2)$$

Если считать $\Delta(n_i)$ неизвестными искомыми параметрами наряду с z, $c_1,\ldots c_L$, то неизвестных в системе (2) всегда больше, чем равенств, и, она как система уравнений, имеет бесконечное множество решений, среди которых — точное.

Применяя методы регуляризации [4–6] можно получить оценку $\hat{z}$ этого точного решения z и оценку погрешности. Однако известные методы регуляризации требуют задания некоторой дополнительной априорной информации о неизвестных $\Delta(n_i)$ и, возможно, об искомых z, c_j. Оценки, полученные такими методами, зависят от этой дополнительной информации, поэтому их вряд ли можно рассматривать как оценки погрешности.

Во избежание некорректности предлагается разделить задачу на две: задачу идентификации математической модели по результатам численного эксперимента и задачу тестирования с помощью известных частных решений или других методов.

Первая задача заключается не в определении теоретических значений z, c_j, а в разложении z_n на составляющие (компоненты) по известному заранее или определяемому экспериментально базису, т.е. просто в представлении зависимости z_n в виде (1). Хотя математическая запись такой задачи по форме совпадает с‘(2), однако при этом $\Delta(n)$ и все другие входящие в (1) компоненты приобретают совершенно другой смысл, поскольку заведомо известно, что в $\Delta(n)$ не входят компоненты $f_j(n)$, $j = 1, \ldots, L$ и константа.

Эту задачу можно решить приближенно с помощью фильтрации, т.е. получить эталон $\hat{z}$ и оценку погрешности $\overline{\Delta}$. При этом полученный интервал неопределенности $\left[\hat{z} - \overline{\Delta}, \hat{z} + \overline{\Delta}\right]$ может не содержать точного значения z, например, из-за ошибки в программе.

Вторая задача — тестирование заключается в сравнении с известным частным точным решением (проверке попадания его в полученный интервал) или с приближенным решением, полученным независимо другим численным методом (проверке факта пересечения интервалов неопределенности). Этот способ использования дополнительной информации не влияет на оценки, полученные ранее независимым способом, а только подтверждает их или опровергает.

В [7] получена теоретическая оценка достоверности (доверительной вероятности) совместного результата решения этих двух задач.

3. Численная фильтрация

Численной фильтрацией [1, 2] называется последовательное устранение (подавление) компонент погрешности, т.е. определение отфильтрованных последовательностей $z_{n_i}^{(j)}$, j=1,..., L (j — порядковый номер фильтрации). Для равенств (2) фильтрация сводится к линейной комбинации $z_{n_i}^{(j)} = \alpha_j z_{n_i}^{(j-1)} + \beta_j z_{n_{i-1}}^{(j-1)}$, причем α_j и β_j определяются из решения системы двух уравнений

$$\alpha_j + \beta_j = 1, \quad \alpha_j f_j(n_{i-1}) + \beta_j f_j(n_i) = 0.$$

Отсюда получаем формулу фильтрации

$$\begin{gathered} z_{n_i}^{(j)} = z_{n_i}^{(j-1)} + \frac{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}}{R_j - 1},\ R_j = \frac{f_j(n_{i-1})}{f_j(n_i)}, \\ c_m^{(j)} = (\alpha_j R_m + \beta_j)\, c_m^{(j-1)} = c_m^{(j-1)} \frac{R_j - R_m}{R_j - 1}, \\ m = j+1, \ldots, L. \end{gathered} \tag{3}$$

В результате фильтрации получается новая последовательность, не содержащая компоненты $f_j(n)$, которая при условии сохранении вида остальных компонент (точнее, первой из оставшихся) может быть подвергнута повторной фильтрации для подавления следующей компоненты. Для сохранения вида компонент достаточно выполнение условия $R_j = \mathrm{const}$. Для $f_j(n) = \lambda_j^n$ (для действительного или комплексного λ_j) из этого условия следует $n_i - n_{i-1} = \alpha = \mathrm{const}_1$, $R_j = \gamma_j^{-\alpha}$, при этом каждая из показательных составляющих представляет собой геометрическую прогрессию.

4. Правило выбора эталона

Для формализации процедуры выбора эталона предлагается двухэтапный метод оценки погрешности. Повторяя фильтрацию, каждый раз приходим к последовательности вида (2), каждый член которой содержит, по крайней мере, два неизвестных: искомое z и погрешность.

Во избежание неопределенности предлагается разделить этапы оценки погрешности и определения искомого z. Для этого на первом этапе проводится фильтрация по формуле

$$z_{n_{i-1}}^{(0)} = z_{n_{i-1}} - z_{n_i}, \tag{4}$$

исключающая из последовательности z_{n_i} неизвестное искомое z. Тем самым, дальнейшая фильтрация по формуле (3) служит оценкой погрешности, независимой от выбора эталона z. Такая оценка лишена указанного в [2] недостатка правила Рунге и Ромберга («кажущегося уточнения»), вызванного зависимостью оценки от конкретной закономерности изменения погрешности, и субъективности, связанной «экспертным» выбором эталона.

Отметим, что преобразование (4) изменяет компоненты зависимости (1)

$$z_{n_{i-1}}^{(0)} = \ldots + \left[1 - R_j^{-1}\right] c_j^{(j-1)} f_j(n_{i-1}) + \ldots, \tag{5}$$

однако при $|R_j| \gg 1$ это изменение незначительно. Именно этим объясняется «привязка» результата фильтрации (4) к $n = n_{i-1}$.

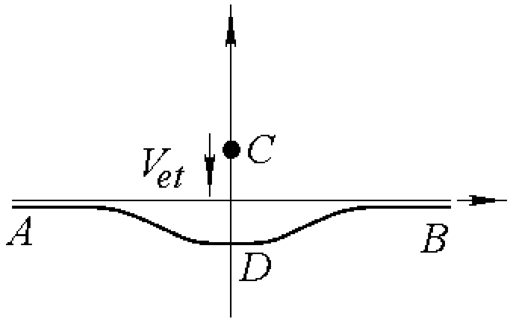


Рис. 1. Схема межэлектродного пространства

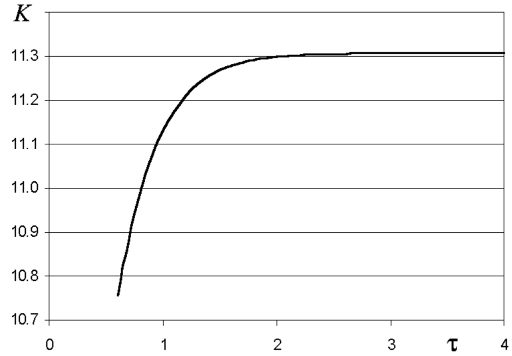


Рис. 2. Зависимость максимальной кривизны от времени

Полученная таким способом оценка позволяет выбрать наилучшие, с точки зрения минимума, погрешности (или комбинации близких по погрешности значений), соотношения n_i и $j = j_0$. Тем самым, мы приходим к задаче минимизации: при некотором постоянном $k = 0, 1, 2, \ldots$ найти минимум $\overline{\Delta}$ по i и j при ограничениях

$$\begin{array}{c} -\overline{\Delta} \le z_{n_i}^{(j)} \le \overline{\Delta}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\overline{\Delta} \le z_{n_{i+k}}^{(j)} \le \overline{\Delta}. \end{array} \tag{6}$$

Значения n_i и $j = j_0$, которые получаются при решении задачи минимизации, используются для определения значения $\hat{z} = z_{n_i}^{(j_0)}$ (эталона) путем фильтрации последовательности $z_{n_i}^{(0)} = z_{n_i}$ по формуле (3).

Тем самым, определена формальная процедура определения эталона $\hat{z} = z_{n_i}^{(j_0)}$. В совокупности с оценкой (6) определяется некоторое множество $\left[\hat{z} - \overline{\Delta}, \hat{z} + \overline{\Delta}\right]$ – интервал неопределенности.

Для определения других компонент зависимости (1) в [8] предложен метод идентификации, основанный на фильтрации, устраняющей из (1) константу и видоизменяющий (1) так, что на первом месте в разложении по очереди оказывается c_1, c_2 и т.д. Тогда последовательное определение этих констант проводится рассмотренным выше двухэтапным методом фильтрации.

5. Применение методов фильтрации на примере задачи Хеле–Шоу

В работе [9] решена плоская нестационарная задача Хеле–Шоу применительно к электрохимической обработке точечным электродом–инструментом (ЭИ) C, движущимся со скоростью V_{et} к обрабатываемой поверхности ADB (см. рис. 1). Дальнейшее исследование было затруднено высоким уровнем нерегулярной погрешности. В данной работе были использованы те же самые результаты вычислений. Путем разработки усовершенствованных методов численной фильтрации результатов расчета удалось не только уточнить рассчитанные параметры, но также получить и оценить характеристики, которые ранее были недоступны из-за погрешности.

При решении нестационарной задачи Хеле–Шоу имеют место жесткие ограничения ресурсов, так как требуется многократное решение систем линейных алгебраических уравнений большой размерности. Исследование процесса установления предельных конфигураций и параметров зависимостей по времени осложняется необходимостью выполнения вычислительных операций, приводящих к потере точности. Дополнительным источником нерегулярной погрешности является интерполяция, так как при измельчении сетки положение искомой точки относительно узлов может меняться трудно-предсказуемым способом. В качестве примера отметим, что при расчете координат поверхности с точностью 8–12 значащих десятичных цифр, параметры экспоненциальной зависимости $a + be^{-\lambda t}$ максимальной кривизны поверхности от времени могут иметь всего 1–3 точных знака.

В [9] были получены численные данные о зависимости максимальной кривизны обрабатываемой поверхности от времени (рис. 2). Вычисление кривизны требует вычисления второй производной от зависимостей координат от параметра, что может привести к потере примерно половины значащих цифр исходной зависимости. Кроме того, определение максимума требует интерполяции, а это приводит к появлению нерегулярной погрешности, связанной с переменностью положения точки максимума кривизны от ближайших узлов интерполяции при измельчении шага сетки.

Фильтрация этих данных обычными способами была затруднена в связи с наличием большой нерегулярной составляющей погрешности. Резуль-

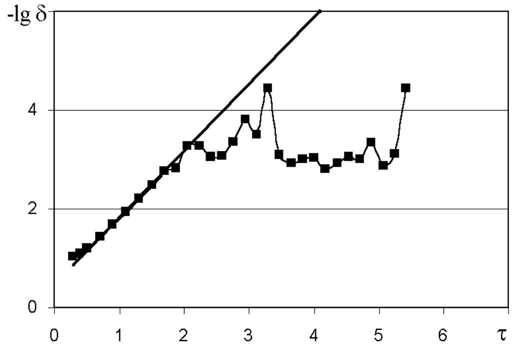


Рис. 3. Зависимости от времени погрешности кривизны нестационарной поверхности без дополнительной фильтрации

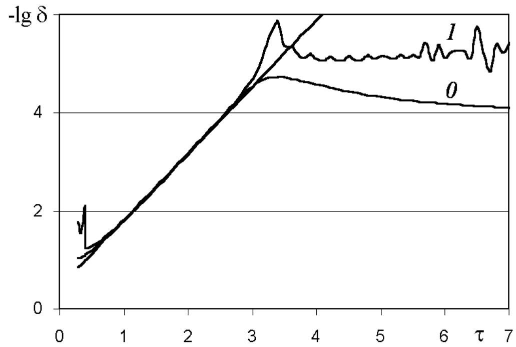


Рис. 4. Зависимости от времени погрешности кривизны нестационарной поверхности с дополнительной фильтрацией

таты обычной фильтрации [10] приведены на рис. 3 в виде зависимости $y = -\lg\delta$ ($y = -\lg\delta$, $\delta = |\Delta K/K|$ — относительное отличие кривизны от эталонного значения $K \approx -11.306$) от времени τ. Значение ординаты представляет собой точность, выраженную в количестве точных значащих десятичных цифр. Применение специальных способов фильтрации [11] не привело к существенному уменьшению этой нерегулярной погрешности.

В данной работе применялась предварительная фильтрация на этапе интерполяции. В основе этого метода фильтрации заложена математическая модель погрешности, которая имеет следующий вид

$$P_m(x) - f(x) = c\prod_{l=k}^{k+m}(x - x_l) + \\ + \sum_{i=k}^{k+m}\Delta_i \prod_{\substack{l=k \\ l\neq i}}^{k+m}\frac{x - x_l}{x_i - x_l} + \Delta(m), \qquad (7)$$

где $P_m(x)$ — интерполяционный многочлен степени m; $f(x)$ — искомая функция; c — неизвестная константа; x_l — узлы сетки; Δ_i — погрешности узловых значений функции; $\Delta(m)$ — остаточная погрешность, содержащая погрешность округления; k — номер начального узла интерполяционного многочлена.

Фильтрация при интерполяции сводится к построению другого интерполяционного многочлена той же степени (например, путем изменения номера первого узла k) и составлению линейной комбинации значений двух многочленов с суммой коэффициентов равной 1, такой, чтобы уничтожалось первое слагаемое погрешности (7).

При применении метода коллокаций для решения задач возникает дополнительная погрешность интерполяции (второе слагаемое (7)), вызванная переменной погрешностью Δ_i значений кривизны в узловых точках. Для уменьшения влияния этой составляющей погрешности было предложено изменить способ вычисления кривизны. Если до этого узловые значения кривизны вычислялись при решении задачи, и далее по узловым значениям кривизны строился интерполяционный многочлен, то в предложенном способе интерполяционный многочлен строится по узловым значениям координат, а кривизна вычисляется с помощью дифференцирования интерполяционного многочлена. Выигрыш заключается в более высокой скорости убывания погрешностей координат Δ_i в узловых точках (эксперимент показывает 4-й порядок точности против 2-го в первом способе). Это усилило эффект обычной фильтрации по числу узлов n, что также уменьшило нерегулярную погрешность (см. рис. 4, кривая 1).

6. Результаты дополнительной фильтрации

Увеличение точности позволило обнаружить новый эффект, который не был обнаружен ранее из-за погрешности: кривизна вначале растет по модулю примерно до 11.306, а затем убывает до 11.304 (рис. 4, кривая 0). При этом характерная скорость убывания существенно меньше, чем возрастания, что обнаруживается с помощью попарного вычитания (рис. 4, кривая 1).

В этом случае изменение компонент погрешности (5) учтено за счет видоизменения преобразований (4), (3):

$$z_{n_i}^{(0)} = \left(z_{n_i} - z_{n_{i+1}}\right)/\left(1 - R_1^{-1}\right),$$
$$z_{n_i}^{(j)} = \left[z_{n_i}^{(j-1)} + \frac{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}}{R_j - 1}\right]\frac{1 - R_j}{1 - R_{j+1}}, \qquad (8)$$
$$j = 1, 2, \ldots$$

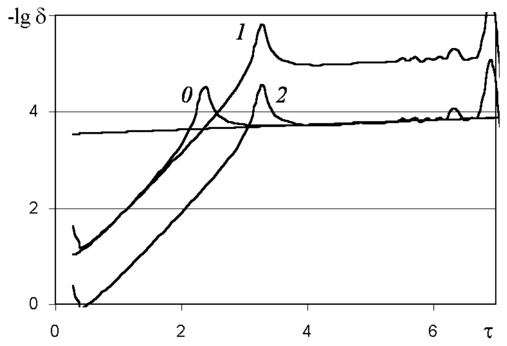


Рис. 5. Зависимости от времени погрешности кривизны нестационарной поверхности

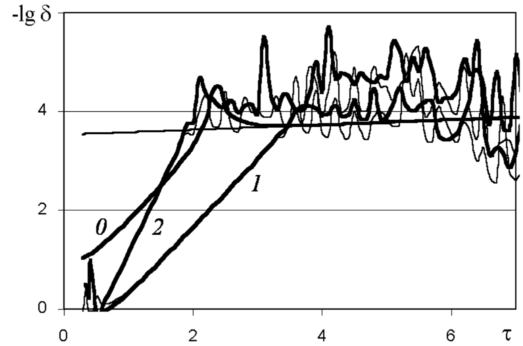


Рис. 6. Зависимости от времени погрешностей кривизны нестационарной поверхности, полученные с использованием различных способов фильтрации

На рис. 5 приведены результаты поправки (8) на быструю компоненту (кривая 1) и медленную компоненту (кривая 2). С помощью попарного сравнения был найден новый эталон ($K \approx -11.304$). Цифрой 0 обозначена исходная зависимость. Видно, что кривые 2 и 0 на участке, где преобладает медленная компонента, практически совпадают. На рисунок также нанесена прямая, полученная аппроксимацией методом наименьших квадратов участка кривой 0. Рассчитанный угловой коэффициент этой прямой имеет значение около 0.05 против 1.364, который имеет прямая на рис. 4, полученная тем же способом для другого участка кривой.

На рис. 6 представлены аналогичные зависимости, причем цифрой 1 обозначена зависимость, отфильтрованная от медленной составляющей. Видно, что первый участок приблизился к прямой, а точность, ограниченная нерегулярной погрешностью, увеличилась примерно на 1 значащую цифру. Цифрой 2 обозначена зависимость, отфильтрованная от составляющей с коэффициентом 1.364. Проявляется компонента с удвоенным угловым коэффициентом. Тонкими кривыми показаны результаты попарного вычитания.

Таким образом, как показывают численные исследования, с течением времени происходит установление значения максимальной кривизны на некотором предельном значении $K = -11.304 \pm 10^{-3}$. Интерес представляет определение закономерности установления предельного значения. Близость к прямым логарифмической зависимости $y = -\lg|\Delta K/K|$ говорит о том, что зависимость параметров формы (включая кривизну) от времени можно представить как сумму экспонент

$$z(\tau) = a + b_1 e^{-\lambda_1 \tau} + b_2 e^{-\lambda_2 \tau} + \ldots + \Delta(\tau),$$

$$y(\tau) = -\lg\left|\frac{z(\tau) - a}{a}\right|.$$

Влияние нерегулярной составляющей $\Delta(\tau)$ погрешности этой зависимости можно оценить как

$$\Delta y = \lg \frac{b_1 e^{-\lambda_1 \tau} + b_2 e^{-\lambda_2 \tau} + \Delta(\tau)}{b_1 e^{-\lambda_1 \tau} + b_2 e^{-\lambda_2 \tau}} \approx \frac{1}{\ln 10} \frac{\delta_{irr}}{\delta},$$

$$\delta = \left|\frac{b_1 e^{-\lambda_1 \tau} + b_2 e^{-\lambda_2 \tau}}{a}\right|, \quad \delta_{irr} = \left|\frac{\Delta(\tau)}{a}\right|.$$

Уровень погрешности округления $-\lg\delta$ (порядка 5-й значащей цифры) отмечается (на рис. 6) колебательным хаотическим характером кривой 1 при $\tau > 4$. Для получения результатов с заданным числом значащих цифр k ($\Delta y = 10^{-k}$) приходится ограничить исследуемую часть кривой ниже уровня $-\lg|\delta| \approx -\lg|\delta_{irr}| - k + \lg\ln 10$.

Угловой коэффициент зависимости $y(\tau)$ определяется через конечную разность

$$\begin{aligned} \frac{y(\tau+\varepsilon) - y(\tau-\varepsilon)}{2\varepsilon} &\approx \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{b_2}{b_1}\times \\ &\times e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\tau} + e^{\lambda_1 \tau}\frac{\Delta(\tau+\varepsilon) - \Delta(\tau-\varepsilon)}{2b_1\varepsilon}. \end{aligned} \tag{9}$$

Как следует из (9), погрешность содержит убывающее (при $\lambda_2 > \lambda_1$) и возрастающее при увеличении τ слагаемые. Это существенно ограничивает диапазон получения надежных оценок.

На рис. 7 цифрой 1 обозначена кривая, соответствующая отфильтрованной от медленной составляющей зависимости. Цифрой 2 обозначена повторно отфильтрованная методом (3) зависимость, цифрой 3 — еще раз отфильтрованная от составляющей с удвоенным коэффициентом. Для отфильтрованных зависимостей при $\tau > 1.5 - 2$ начинает преобладать возрастающая нерегулярная погрешность и максимально возможная точность ограничивается на уровне около 3 значащих цифр. Попарное вычитание (4) с поправкой (8) подтверждает полученные оценки (тонкие кривые).

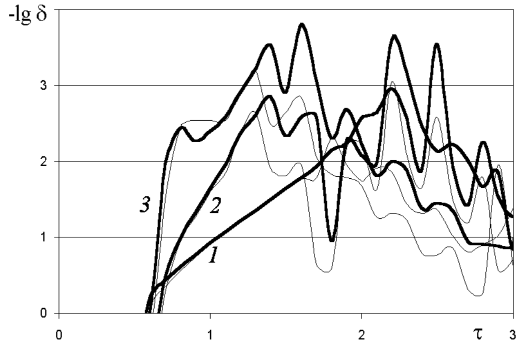


Рис. 7. Зависимости от времени погрешности углового коэффициента

Эффект медленного уменьшения модуля кривизны после возрастания можно объяснить особенностями нестационарного процесса. Но такое влияние может иметь также погрешность численного метода. Относительное изменение кривизны не превышает 2-х единиц в четвертом знаке, но делает невозможным оценку параметра λ_1 основной составляющей временной зависимости.

Фильтрация позволила обнаружить и устранить этот эффект и оценить показатели, характеризующие скорости протекания процессов.

7. Заключение

Таким образом, при решении задачи, рассмотренной в качестве примера, метод двухэтапной фильтрации данных со сравнением результатов двух этапов применялся как непосредственно при решении задачи (при численном интегрировании), так и для постпроцессорной обработки данных численного эксперимента. Это дало возможность получить достоверные оценки погрешности и существенно повысить эффективность численных алгоритмов. Проведенное тестирование с помощью точных частных решений подтвердило эти оценки.

С точки зрения практики при оценке погрешности могут быть полезны две задачи: первая — получение эталона с наибольшей возможной для данного эксперимента точностью, вторая — определение диапазона n и δ, в котором оценка погрешности по более простым правилам (типа Рунге и Ромберга) дает приемлемые результаты. Обе задачи решаются методами многокомпонентного анализа.

Список литературы

[1] Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Уточнение решений сложных вычислительных задач с помощью постпроцессорной обработки численных результатов // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 6. С. 61–65.

[2] Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Поречный‘С.С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. № 3(80). С. 105–110.

[3] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М.: Изд. дом МЭИ, 2008. 672 с.

[4] Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.

[5] Федотов А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1990. 280 с.

[6] Зверев Г.Н., Дембицкий С.И. Оценка эффективности геофизических исследований скважин. М.: Недра, 1982. 224 с.

[7] Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Оценка достоверности численных результатов при наличии нескольких методов решения задачи // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 6. С. 77–87.

[8] Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Решение задачи идентификации при оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2010. № 1(93). С. 105–110.

[9] Zhitnikov V.P., Fedorova G.I., Sherykhalina N.M., Urakov A.R. Numerical investigation of nonstationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele–Shaw problem // Journ. Eng. Math. 2006. Vol. 55, Nos. 1-4. Pp. 255–276.

[10] Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности‘// Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 53–60.

[11] Шерыхалина Н.М., Ошмарин А.А. Численная фильтрация данных, искаженных нерегулярной погрешностью // Вестник УГАТУ. 2006. Т. 8, № 1. С. 138–141.

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ 2012

УДК 517.957/.958

Построение точных решений уравнений анизотропной теплопроводности с помощью законов сохранения[1]

Ибрагимов Н.Х., Авдонина Е.Д.*

*Лаборатория «Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий»
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Недавно Н.Х. Ибрагимовым была доказана новая теорема о законах сохранения, используя понятие нелинейной самосопряженности, и предложен метод построения точных решений с помощью законов сохранения. В последующей работе авторов были построены законы сохранения для уравнений анизотропной теплопроводности. В данной работе предложенный метод применяется к уравнениям теплопроводности с источником в анизотропных средах. Получены новые точные решения этих уравнений.

1. Введение

Уравнение теплопроводности в анизотропной среде без источника имеет вид

$$u_t = [f(u)u_x]_x + [g(u)u_y]_y + [h(u)u_z], \qquad (1)$$

где функции $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ положительны согласно своему физическому значению. Аналогичное уравнение с источником имеет вид

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z + q(u). \qquad (2)$$

2. Законы сохранения двумерной модели с источником специального вида

Двумерное уравнение

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + q(u) \qquad (3)$$

с произвольными функциями $f(u)$, $g(u)$ и $q(u) \neq 0$ обладает тремя симметриями, а именно группами переносов по времени и пространственным координатам с генераторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}. \qquad (4)$$

Уравнение (3) с произвольным источником $q(u)$ не является нелинейно-самосопряженным и потому не может быть написано в консервативной форме. В нашей работе [1] показано, что при некоторых специальных формах источника $q(u)$ уравнение(3) нелинейно самосопряженно. Одна из таких нелинейно самосопряженных форм следующая:

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + \omega^2\mathcal{F}(u), \qquad (5)$$

где $\omega = \text{const}$ и

$$\mathcal{F}(u) = \int f(u)du. \qquad (6)$$

Соответственно, уравнение (5) обладает нетривиальными законами сохранения и, следовательно, может быть написано в консервативной форме. В работе [1] найдены законы сохранения уравнения (5), ассоциированные с симметрией относительно переноса по пространственной переменной x с генератором

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

А именно, оператор X_2 порождает следующие четыре сохраняющихся вектора:

$$\begin{gathered} C^1 = \sin(\omega x)\, u, \\ C^2 = -\sin(\omega x)\, f(u)u_x + \omega\cos(\omega x)\, \mathcal{F}(u), \\ C^3 = -\sin(\omega x)\, g(u)u_y; \end{gathered} \qquad (7)$$

$$\begin{gathered} C^1 = \cos(\omega x)\, u, \\ C^2 = -\cos(\omega x) f(u)u_x - \omega\sin(\omega x)\, \mathcal{F}(u), \\ C^3 = -\cos(\omega x)\, g(u)u_y; \end{gathered} \qquad (8)$$

$$\begin{gathered} C^1 = y\sin(\omega x)\, u, \\ C^2 = -y\sin(\omega x)\, f(u)u_x + \omega y\cos(\omega x)\, \mathcal{F}(u), \\ C^3 = -y\sin(\omega x)\, g(u)u_y + \sin(\omega x)\mathcal{G}(u); \end{gathered} \qquad (9)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (Постановление № 220, Договор № 11.G34.31.0042).

$$
\begin{gathered}
C^1 = y\cos(\omega x)\,u,\\
C^2 = -y\cos(\omega x)\,f(u)u_x - \omega y\sin(\omega x)\,\mathcal{F}(u),\\
C^3 = -y\cos(\omega x)\,g(u)u_y + \cos(\omega x)\mathcal{G}(u),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $\mathcal{F}$ первообразная функции $f(u)$ (формула (6)), а $\mathcal{G}$ — аналогичная первообразная для функции $g(u)$:

$$
\mathcal{G}(u) = \int g(u)du. \tag{11}
$$

3. Построение точных решений

Мы воспользуемся здесь законом сохранения

$$
D_t(C^1) + D_x(C^2) + D_y(C^3) = 0 \tag{12}
$$

для вектора (7) для того чтобы найти частное точное решение уравнения (5) с помощью метода предложенного в работе [2] (Часть 3: Использование законов сохранения для построения решений уравнений в частных производных). Согласно этому методу, мы заменяем закон сохранения (12) следующими более сильными условиями:

$$
D_t(C^1) = 0, \quad D_x(C^2) = 0, \quad D_y(C^3) = 0. \tag{13}
$$

Подставляя компоненту C^1 вектора (7) в первое уравнение системы (13), получаем

$$
D_t[\sin(\omega x)\,u] = \sin(\omega x)\,u_t = 0,
$$

откуда

$$
u_t = 0. \tag{14}
$$

Теперь подставим компоненту C^3 вектора (7) в третье уравнение системы (13) и получим

$$
(g(u)u_y)_y = 0. \tag{15}
$$

С учетом уравнений (14) и (15) исходное уравнение (5) принимает вид

$$
(f(u)u_x)_x + \omega^2\mathcal{F}(u) = 0. \tag{16}
$$

Из наших построений очевидно, что уравнение (16) равносильно второму уравнению системы (13). Наша задача — решить переопределенную систему уравнений (14), (15) и (16).

Уравнение (14) указывает на то, что мы имеем дело со стационарным решением $u = u(x, y)$.

Теперь решим уравнение (16). Для этого введем новую зависимую переменную z по формуле

$$
z = \mathcal{F}(u), \tag{17}
$$

и запишем уравнение (16) в виде

$$
z_{xx} + \omega^2 z = 0. \tag{18}
$$

Заметим, что последнее уравнение содержит переменную y как параметр. Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$
z = A_1(y)\sin(\omega x) + A_2(y)\cos(\omega x).
$$

С учетом обозначения (17) мы получаем решение уравнения (16) в следующем неявном виде:

$$
\mathcal{F}(u) = A_1(y)\sin(\omega x) + A_2(y)\cos(\omega x). \tag{19}
$$

Проверим, что функция u, заданная формулой (19), удовлетворяет уравнению (16). Дифференцируя обе части (19) по x, получаем

$$
\mathcal{F}'u_x = \omega[A_1\cos(\omega x) - A_2\sin(\omega x)].
$$

Но поскольку $\mathcal{F}'(u) = f(u)$, вышеприведенное уравнение дает

$$
(fu_x)_x = -\omega^2[A_1\sin(\omega x) + A_2\cos(\omega x)]. \tag{20}
$$

Уравнения (20) и (19) доказывают справедливость уравнения (16).

Остается удовлетворить условию (15). Дифференцируя обе части (19) по y, получаем

$$
\mathcal{F}'u_y = A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'(y)\cos(\omega x).
$$

Т.к. $\mathcal{F}'(u) = f(u)$, то

$$
u_y = \frac{1}{f(u)}[A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'(y)\cos(\omega x)]. \tag{21}
$$

Поэтому

$$
g(u)u_y = \frac{g(u)}{f(u)}[A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'(y)\cos(\omega x)]
$$

и, следовательно,

$$
\begin{gathered}
(gu_y)_y = \frac{g}{f}[A_1''(y)\sin(\omega(x) + A_2''(y)\cos(\omega x)]+\\
+[A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'\cos(\omega x)]\,\frac{fg' - gf'}{f^2}u_y.
\end{gathered}
$$

Подставив сюда выражение (21) для u_y, мы запишем уравнение (15) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
A_1''(y)\sin(\omega(x) + A_2''(y)\cos(\omega x)+\\
+\left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\right)\frac{1}{f}[A_1'(y)\sin(\omega x)+\\
+A_2'\cos(\omega x)]^2 = 0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Из уравнения (22) видно, что возможны два случая: либо

$$
A_1'(y) = A_2'(y) = 0, \tag{23}
$$

либо

$$A_1''(y) = A_2''(y) = 0, \quad \frac{g'}{g} = \frac{f'}{f} \cdot \tag{24}$$

Из условий (23) следует, что уравнение (5) имеет следующее точное решение, зависящее только от x :

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(A_1 \sin(\omega x) + A_2 \cos(\omega x)\right), \tag{25}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные.

В случае (24) мы делаем вывод, что уравнение (5) с линейно зависимыми функциями f и g,

$$g(u) = kf(u), \quad k = \text{const}, \tag{26}$$

имеет следующее точное решение:

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left((a_1 y + b_1)\sin(\omega x) + (a_2 y + b_2)\cos(\omega x)\right),$$

где a_i, b_i — произвольные постоянные.

Пример. Пусть

$$f(u) = \frac{1}{1+u^2},$$

тогда предыдущее утверждение состоит в том, что уравнение

$$u_t = \left(\frac{1}{1+u^2}\, u_x\right)_x + \left(k\frac{1}{1+u^2}\, u_y\right)_y + \omega^2 \arctan u$$

имеет следующее решение:

$$u = \tan\left((a_1 y + b_1)\sin(\omega x) + (a_2 y + b_2)\cos(\omega x)\right).$$

4. Заключение

Поступая таким образом со всеми остальными законами сохранения, мы получаем различные точные решения уравнений анизотропной теплопроводности.

Список литературы

[1] Ibragimov N.H., Avdonina E.D. Conservation laws of anisotripic heat equations. Archives of ALGA. Vol. 7/8, 2012. P. 13–22.

[2] Ibragimov N.H., Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws. Archives of ALGA. Vol. 7/8, 2010–2011. P. 1–99.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 536.37

Моделирование объемного нагрева влажной среды с учетом подвижности жидкости

Ильясов У.Р.*, Долгушев А.В.**

*Филиал Уфимского государственного авиационного технического университета, Ишимбай
**Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Биишевой, Стерлитамак

Рассмотрена задача объемного теплового воздействия на влажную пористую среду. Получены численные решения, проанализировано влияние подвижности жидкости на динамику процесса тепломассопереноса. Установлено, что подвижность жидкости приводит к более мягкому режиму сушки. Показано, что в низкопроницаемых средах жидкость можно считать неподвижной.

1. Введение

Использование микроволновой энергии позволяет значительно оптимизировать процессы сушки. В [1] рассмотрена задача сушки пористой среды объемными тепловыми источниками для случая малой влажности так, что можно пренебречь подвижностью жидкости. Определенный интерес представляет оценка влияния подвижности жидкости на процесс фильтрации. Отметим, что в ряде случаев интенсивность источников тепла можно считать равномерной по объему [2, 3].

2. Основные уравнения

Для описания процессов тепломассопереноса при равномерном объемном нагреве влажной пористой среды примем следующие допущения. Скелет пористой среды несжимаем и неподвижен ($\rho_s = \mathrm{const}$), пористость постоянна ($m = \mathrm{const}$). Температуры пористой среды и насыщающих фаз совпадают. Система уравнений, описывающая процесс сушки, включает уравнения баланса массы, энергии и закон Дарси:

$$\begin{gathered}
m\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_l S_l + rho_v S_v\right) + \\
r^{-n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n m(S_v\rho_v\upsilon_v + S_l\rho_l\upsilon_l)\right) = 0, \\
\rho c\frac{\partial T}{\partial t} + m(\rho_l S_l c_l \upsilon_l + \rho_v S_v c_v \upsilon_v)\frac{\partial T}{\partial x} = \\
= \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + mS_v\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \upsilon_v\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \\
+ml\rho_l\left(\frac{\partial S_l}{\partial t} + \upsilon_l\frac{\partial S_l}{\partial x}\right) + Q, \\
mS_i\rho_i = -\frac{k_i}{\mu_i}\frac{\partial p}{\partial r},
\end{gathered} \qquad (1)$$

$$m\rho c = (1-m)\rho_s c_s + m(\rho_v c_v S_v + \rho_l c_l S_l),$$

$$mS_l + S_v = 1.$$

где ρ_i, S_i и υ_i — плотность, объемное содержание фаз в порах и скорость фаз. Значения $n = 0$, 1 и 2 соответствуют плоской, радиальной и сферической симметриям. Индексы l, v относятся к жидкости и пару (*liquid, vapor*); k_i и μ_i — коэффициенты фазовой проницаемости и динамической вязкости фаз; ρc — удельнообъемная теплоемкость системы; $c_i, \lambda_i, (i = l, v)$ — удельная теплоемкость фаз и коэффициент теплопроводности фаз; λ — коэффициент теплопроводности системы; l — теплота фазового перехода; Q — плотность мощности объемных тепловых источников.

Для пара примем уравнение Менделеева–Клапейрона, а воду будем считать несжимаемой:

$$\rho_v = \frac{p}{R_v T}, \qquad \rho_l = \mathrm{const},$$

где R_v — приведенная газовая постоянная. В области совместного присутствия пара и жидкости примем условие

$$T_s(p) = T_* \ln^{-1}(p_*/p).$$

Для фазовых проницаемостей были использованы следующие выражения [4]:

$$k_i = k_0 K_i,$$

$$K_v = \begin{cases} (1+3S_l)\left(1-\dfrac{S_l}{0{,}9}\right)^{3{,}5}, & 0 \leqslant S_l < 0{,}9, \\ 0, \quad 0{,}9 \leqslant S_l \leqslant 1. \end{cases}, \qquad (2)$$

$$K_l = \begin{cases} \left(\dfrac{S_l - 0{,}2}{0{,}8}\right)^{3{,}5}, & 0{,}2 < S_l \leqslant 1, \\ 0, \quad 0 \leqslant S_l \leqslant 0{,}2. \end{cases}$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу объемного теплового воздействия на влажную пористую среду. В исходном состоянии пористый образец толщиной $2R$ ($R \leqslant 10^{-1}$ м) содержит воду с объемным влагосодержанием S_{l0} , кроме того, будем полагать, что в порах находится насыщенный пар при давлении p_0 и соответствующей этому давлению равновесной температуре $T = T_s(p)$.

В момент времени $t = 0$ в объеме возникают равномерно распределенные тепловые источники. Давление на внешней границе равно p_e. Начально-граничные условия запишутся в виде:

$$\begin{array}{l} t = 0, \quad p = p_0, \quad S_l = S_{l0}, \\ t > 0, \quad r = \pm R, \quad p = p_e. \end{array} \tag{3}$$

В случае высокоинтенсивного внешнего воздействия основной вклад на динамику температурного поля будет оказывать фазовый переход и подвод тепла в виде объемно-распределенных источников тепла. С учетом данного предположения уравнение притока тепла запишем в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + m S_l \rho_l c_l \upsilon_l \frac{\partial T}{\partial r} = m l \rho_l \frac{\partial S_l}{\partial t} + Q.$$

Из системы уравнений получим систему уравнений для определения давления и водонасыщенности в пористой среде

$$z\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa_v^{(p)} \frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho_v K_v + \rho_l K_l \tilde{\mu})\frac{\partial P}{\partial x}\right] + \frac{(\rho_l - \rho_v)q}{ml\rho_l} -$$
$$-(\rho_l - \rho_v)\kappa_v^{(p)}\tilde{\mu}\frac{K_l}{S_l}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial S_l}{\partial x}\kappa_v^{(p)}\tilde{\mu}\frac{K_l}{S_l}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial S_l}{\partial x} +$$
$$+\frac{(\rho_l - \rho_v)}{ml\rho_l}[mT_0\Theta_p'\kappa_v^{(p)}(\rho_v c_v K_v +$$
$$+\rho_l c_l K_l \tilde{\mu}) + mp_0(1 - S_l)\kappa_v^{(p)}K_v/S_v]\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2,$$
$$z = \frac{(\rho_l - \rho_v)\rho c T_0 \Theta_p'}{ml\rho_l} + \rho_{v0}(1 - S_l)\left(\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_*}\right) -$$
$$-\frac{(\rho_l - \rho_v)mp_0(1 - S_l)}{ml\rho_l}.$$

Здесь $\chi = \dfrac{k_* p_0}{m\mu_v}$; $\tilde{Q} = \dfrac{Q}{ml\rho_l}$; $\tilde{Q}_l = \dfrac{c_l}{ml}$; $\tilde{Q}_s = \dfrac{\rho_s c_s}{ml\rho_l}$; $\tilde{\rho}_i = \dfrac{\rho_i}{\rho_{v0}^0}$.

Таким образом, решение задачи об объемном тепловом воздействии на влажную пористую среду равномерно распределенными источниками тепла свелось к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных с начально-граничными условиями. Отметим, что в [1] удалось получить аналитическое решение для водонасыщенности S_{l0}.

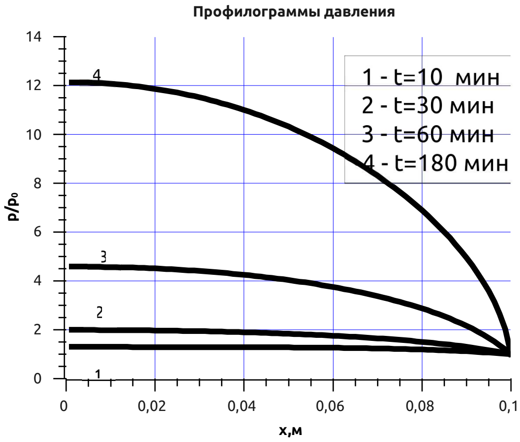


Рис. 1. Динамика изменения давления и водонасыщенности в центре образца ($r = 0$) при начальной водонасыщенности $S_{l0} = 0{,}5$

4. Анализ решений

На рис. 1 приведены зависимости максимального давления в высокопроницаемой среде ($k = 10^{-12}$ м^2) для исходной водонасыщенности $S_{l0} = 0{,}5$. Мощность источников $Q = 30$ кВт/м^3. Сплошная линия соответствует неподвижной жидкости, пунктирная — подвижной. Как видно из рис. 1 в случае подвижной жидкости внутрипоровое давление значительно ниже (пунктирная линия).

Для более влажных образцов ($S_l \geqslant 0{,}8$), влияние подвижности жидкости на максимальное поровое давление выражено еще сильнее (рис. 2). Это связано с тем, что подвижная жидкость перераспределяется в материале, увеличивая «живую» пористость в центре образца, тем самым давая возможность для оттока пара и сброса давления. Более наглядное представление о причине столь значительной разницы дает рис. 2.

На рис. 3 приведены распределения водонасыщенности в пористой среде в различные моменты времени. Сплошные линии — неподвижная жидкость, пунктирные — подвижная жидкость. Линии 1, 2 и 3 соответствуют моментам времени 20, 40 и 60 мин. Исходная водонасыщенность $S_l = 0{,}8$. В случае неподвижной жидкости (сплошные линии), первые 40 мин водонасыщенность в центре образца практически не изменяется (линии 1, 2, или см. рис. 2), что затрудняет отток пара и приводит к резкому возрастанию давления. Подвижная жидкость (пунктирные линии) за счет градиента давления и потока пара от центра материала к его внешним границам перераспределяется, позволяя сбросить поровое давление.

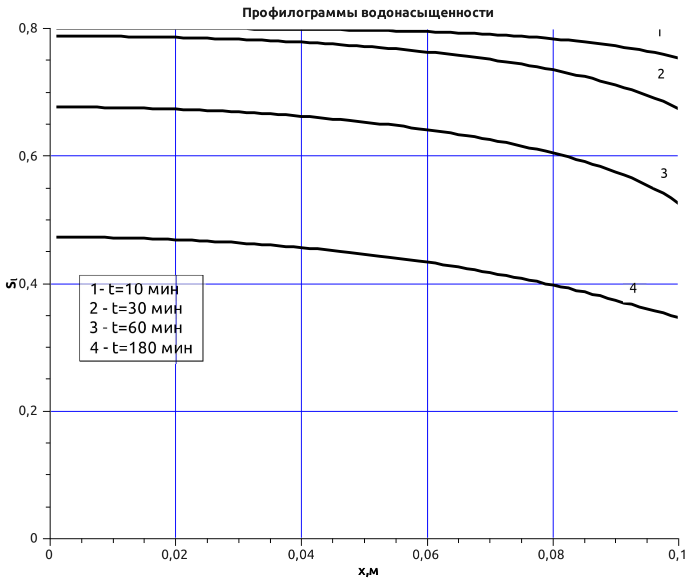


Рис. 2. Зависимости максимального давления и водонасыщенности при начальной водонасыщенности $S_{l0} = 0{,}8$

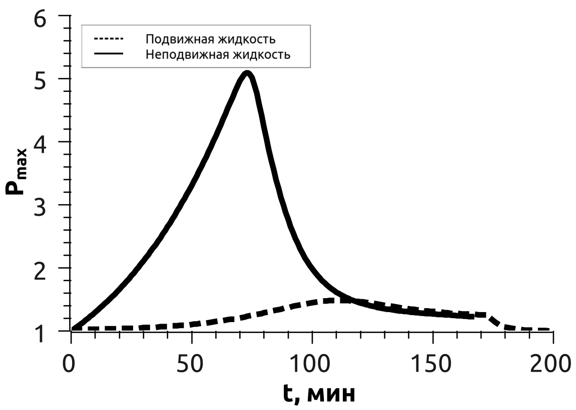


Рис. 3. Профилограммы водонасыщенности в различные моменты времени. Линии 1,2 и 3 соответствуют моментам времени 20, 40 и 60 мин

5. Выводы

Установлено что подвижность жидкости при равномерном объемном нагреве влажной пористой среды приводит к гораздо более мягкому режиму сушки. Это связано с перераспределением жидкости в материале и увеличением «живой» пористости, способствующей оттоку пара и сбросу давления.

Список литературы

[1] Ильясов У.Р. Особенности фильтрации при равномерном объемном нагреве пористой среды // Мавлютовские чтения: Российская научно-техническая конференция, посвященная 85-летию член-корр. РАН, д.т.н., профессора Р.Р. Мавлютова: сб. трудов в 5 т. Том 4. Механика жидкости и газа / Уфимск. гос. авиац. ун-т. Уфа: УГАТУ, 2011. С. 91–95

[2] Афанасьев А.М.,Сипливый Б.Н. Зависимость качества сушки СВЧ-излучением от глубины проникновения электромагнитной волны // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. №1. С. 95–99.

[3] Галкин В.П. Древесиноведческие аспекты технологических режимов и оборудование для микроволновой сушки пиломатериалов: автореферат дис. д-ра тех. наук. М.: МГУЛ, 2009. 38 с.

[4] Васильев В.И., Попов В.В., Тимофеева Т.С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. 126 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.5

Метод граничных элементов в численном исследовании трехмерных течений Стокса в каналах произвольной формы[1]

Иткулова Ю.А.

Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем» БашГУ, Уфа
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе исследуются медленные трехмерные течения вязкой жидкости в цилиндрической трубе и канале переменного сечения. Построена качественная триангуляция поверхности цилиндрической трубы, сглаженного и экспериментального каналов переменного сечения. Задача решалась численно методом граничных элементов в нескольких модификациях для периодического и непериодического потока. Проведено сравнение полученных численных результатов с аналитическим решением для течения Пуазейля.

1. Введение

На сегодняшний день нет однозначных представлений о движении жидкости в пористых средах или каналах сложной геометрии, которые моделируют пористый пласт, поэтому исследование течений жидкости в каналах произвольной формы представляет большой интерес как для научной, так и для промышленной сфер.

Работа посвящена численному исследованию трехмерных течений Стокса вязкой жидкости в каналах сложной геометрии методом граничных элементов. Рассматриваемые задачи будут лежать в основе численного изучения эффекта динамического запирания эмульсий в микроканалах [1]. Метод граничных элементов для течений Стокса описан в [2] и успешно применялся для численного моделирования медленных двумерных течений в каналах [3]. Экспериментальным изучением поведения жидкости в сужающемся канале занимался Boger D.V. [4]. Теоретические исследования подобной задачи представлены в работах [5].

Для решения задачи применяется современная численная методика, основанная на методе граничных элементов, что уменьшает размерность пространства на единицу, так как все расчеты связаны только с границей. Используются неструктурированные треугольные сетки, точно описывающие границу области, что позволяет моделировать течения жидкости в каналах сложной геометрии.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант 11.G34.31.0040).

2. Постановка задачи с периодическими и непериодическими условиями на границе

Рассматривалось течение вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью μ в ограниченном канале переменного сечения с гладкой поверхностью S при малых числах Рейнольдса (рис. 1). Движение жидкости описывалось уравнениями Стокса

$$\frac{1}{\mu}\nabla p = \nabla^2 \mathbf{u}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

Поверхность канала разбивается на два подмножества: $S = S^{(s)} \cup S^{(r)}$, где $S^{(r)}$ — жесткая граница (боковая поверхность канала) и $S^{(s)}$ — мягкая граница (торцы канала). Задача решалась со следующими граничными условиями:

– для непериодического потока

$$\begin{gathered} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(x),\ \mathbf{x} \in S, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}_0),\ \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}. \end{gathered} \tag{2}$$

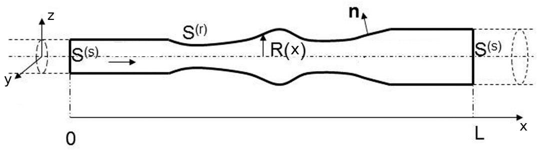


Рис. 1. Канал переменного сечения

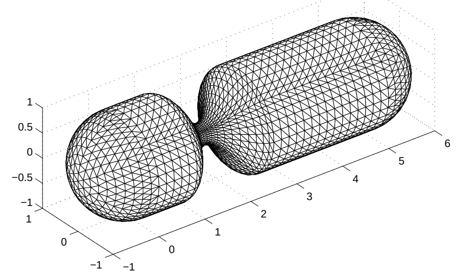


Рис. 2. Сглаженный канал переменного сечения

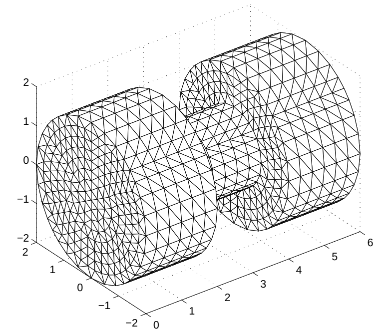


Рис. 3. Экспериментальный канал переменного сечения

– для периодического потока

$$\begin{gathered}\mathbf{u}(\mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in S^{(r)},\\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{f}^0(\mathbf{x}_0),\ \mathbf{x}_0\in S^{(s)},\\ \mathbf{u}\left(x,y,0\right)=\mathbf{u}\left(x,y,L\right),\\ \mathbf{f}\left(x,y,0\right)=-\mathbf{f}\left(x,y,L\right)+\mathbf{i}_z\Delta p.\end{gathered}\tag{3}$$

Обе постановки решались численно методом граничных элементов в нескольких модификациях.

3. Геометрия расчетной области

Предполагаем, что канал является осесимметричным радиуса $R(x)$ и длиной $x\in[0,\ L]$, где x — координата вдоль оси канала. Канал переменного сечения можно получить из кругового цилиндра аппроксимацией его вершин на аналитическую поверхность $R(x)$. Массивы граней таких моделей будут совпадать, т.е. фигуры будут с одинаковой топологией. Таким образом, построение трехмерной треугольной сетки канала переменного сечения сводится к задаче формирования подобной сетки для кругового цилиндра.

Триангуляция боковой поверхности кругового цилиндра была получена из триангуляции 4-х связанных граней параллелепипеда, полученного из куба. На торцах цилиндра производилась триангуляция Делоне, затем сетки склеивались.

К сожалению, построенная триангуляция канала переменного сечения не удовлетворяла критериям качества сетки, так как равномерное разбиение вдоль образующей канала в сужающей части давало «вытянутые» треугольники. Поэтому на горлышке канала необходимо было сгустить сетку. Для использования метода вершинных коллокаций в первой постановке задачи необходимо, чтобы поверхность была гладкой. Поэтому торцевые части пришлось вытянуть вдоль оси цилиндра. На рис. 2 представлена геометрия расчетной области канала для непериодического потока.

В случае периодического потока мы используем метод коллокаций в центре грани, для применения которого не требуется гладкости сетки. Таким образом, для моделирования течения жидкости с периодическими граничными условиями была получена триангуляция экспериментального канала, состоящего из трех цилиндров, двух колец и двух торцевых дисков (рис. 3)

4. Метод граничных элементов в нескольких модификациях

Уравнения Стокса itkulova-eq1) переписывались в граничных интегралах [2, 6]. Сначала определялся вектор нормального напряжения $\mathbf{f}$ на границе

$$\begin{gathered}\frac{1}{\mu}\int\limits_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{u}^0(\mathbf{y})-\\ -\int\limits_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}^0(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}),\ \mathbf{y}\in S,\end{gathered}\tag{4}$$

где $\mathbf{G}$ — фундаментальное решение уравнения Стокса; $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, определяются как

$$\begin{gathered}\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\mathbf{I}}{r}+\frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right),\\ \mathbf{T}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=-\frac{3}{4\pi}\frac{\mathbf{rrr}}{r^5},\\ \mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{y},\quad r=|\mathbf{r}|.\end{gathered}\tag{5}$$

Затем, значения скорости $\mathbf{u}$ в любой точке области $\mathbf{y}$ вычислялись через граничные интегралы

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mu}\int\limits_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}) +\\
+\int\limits_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}^0(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}),\ \mathbf{y}\in V.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Для проверки достоверности полученных результатов задача также была решена модифицированным методом граничных элементов, который заключается в следующем.

Нам известно точное решение для течения Пуазейля, которому задавалось возмущение

$$
\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}'. \tag{7}
$$

Граничные условия (2) для возмущений $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{f}'$ выглядят следующим образом

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}' = 0,\ \mathbf{x}\in S^{(s)}, \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u}^0,\ \mathbf{x}\in S^{(r)},\\
\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = 0,\ \mathbf{x}_0\in S^{(s)}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Из интегральных уравнений (4)–(6), которым также удовлетворяют возмущения $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{f}'$, находились их значения. С учетом (7) определялся вектор нормального напряжения $\mathbf{f}$ на границе и компоненты скорости $\mathbf{u}$ в любой точке области.

Для периодического потока уравнения Стокса (1) переписывались в граничных интегралах

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int\limits_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}) =\\
= \frac{1}{\mu}\int\limits_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y}\in S.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Интегральные уравнения (9) переписываются в матричном виде

$$
\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{f}, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{G}. \tag{10}
$$

Граничные условия будут выглядеть

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{f}_p = \mathbf{i}_x\Delta p,\\
\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_r, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_s, \quad \mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_s + \mathbf{f}_p,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где 1 — боковая поверхность; 2 — входное сечение; 3 — выходное сечение.

Из (9) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $(\mathbf{u}_s, \mathbf{f}_s, \mathbf{f}_r)$:

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix}
\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{13} & \mathbf{B}_{13}-\mathbf{B}_{12} & -\mathbf{B}_{11}\\
\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{23} & \mathbf{B}_{23}-\mathbf{B}_{22} & -\mathbf{B}_{21}\\
\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{33}-\mathbf{B}_{32} & -\mathbf{B}_{31}
\end{pmatrix}\times\\
\times\begin{pmatrix}\mathbf{u}_s\\ \mathbf{f}_s\\ \mathbf{f}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_{13}\mathbf{f}_p\\ \mathbf{B}_{23}\mathbf{f}_p\\ \mathbf{B}_{33}\mathbf{f}_p\end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

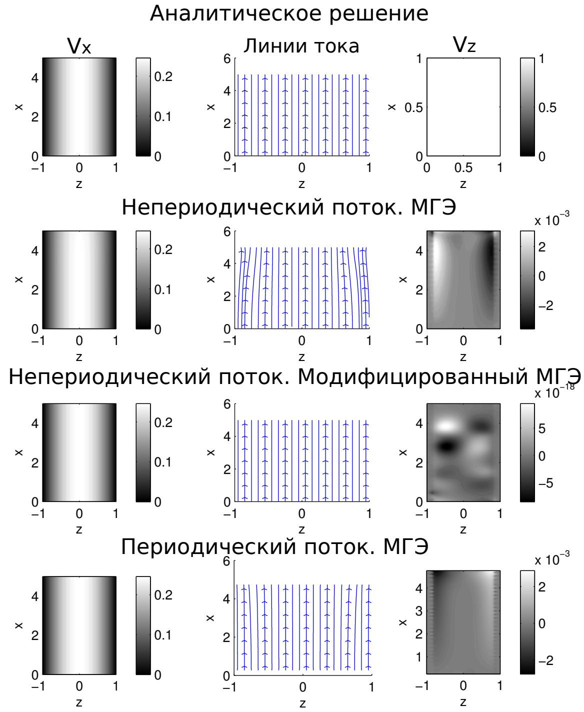


Рис. 4. Сравнение модификаций МГЭ с аналитическим решением

Сингулярные интегралы рассчитывались, используя известные тестовые решения: постоянное и линейное течения.

5. Результаты численного моделирования

Для тестирования программы использовался канал со входным и выходным сечениями радиуса $R = 1$, радиусом сужения $r = 0.5$ и длиной $L = 5$.

Проведено сравнение компонент вектора нормального напряжения $\mathbf{f}$ на границе методом граничных элементов в нескольких модификациях с аналитическим решением для течения Пуазейля для непериодического потока. Погрешность вычисления неизвестных значений на границе составила порядка 0.7%. Для периодического потока погрешность компонент вектора нормального напряжения $\mathbf{f}$ на границе составила порядка 0.24%, компонент вектора скорости $\mathbf{u}$ около 0.9%.

На рис. 4 представлены поля скорости и линии тока, вычисленные в осевом сечении цилиндра плоскостью Oxz, для течения Пуазейля с $N = 2598$ в методе вершинных колокаций и $N = 2704$ в методе колокаций с центром в грани элемента. Из ри-

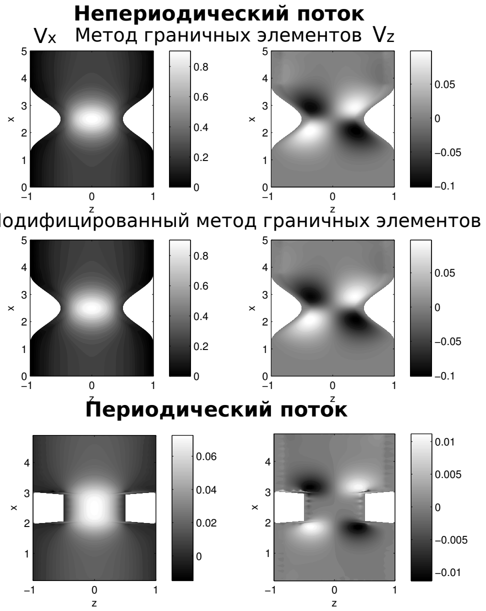


Рис. 5. Канал переменного сечения

сунка видно, что численные расчеты хорошо приближаются к аналитическому решению. Модифицированный метод граничных элементов, особенно для компонент скорости вдоль оси Oz, дает более точные результаты по сравнению с обычным методом граничных элементов.

Получены численные результаты для канала различного радиуса сужения методом граничных элементов в двух модификациях и проведено сравнение этих вариантов метода. В результате, относительная погрешность составила порядка 0.1–1.7% в зависимости от формы канала. По мере уменьшения радиуса сужения канала погрешность увеличивается и максимальное значение 1.7% принимает на цилидрическом канале. На рис. 5 представлены поля скорости для каналов разной геометрии и радиусом сужения $r = 0.5$. Сглаженный канал состоит из 2598 вершин и 5192 граней, экспериментальный — из 1354 вершин и 2704 граней. Таким образом количество расчетных узлов $N = 2704$ находится в пределах 3000 узлов. На границе сингулярные интегралы вычисляются не точно, что ведет к большой погрешности вычисления поля скорости в точках, лежаших близко к стенке канала. Наблюдаемый эффект на входе для периодического потока качественно совпадает с экспериментальным [4] и приближенным аналитическим решением [5].

Список литературы

[1] Ахметов А.Т., Саметов С.П. Особенности течения дисперсии из микрокапель воды в микроканалах // Письма в ЖТФ. 2010. Том 36, вып. 22. С. 21–28.

[2] Pozrikidis C. BoundaryIntegral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. 1992(Cambridge University Press, Cambridge, MA).

[3] Pozrikidis C. Creeping flow in two—dimensional channels // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 180. P. 495–514.

[4] Boger D.V. Viscoelastic flows through contractions // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 19. P. 157–182.

[5] Lubansky A.S., Boger D.V., Servais C. Burbidge A.S. Cooper-White J.J. An approximate solution to flow through a contraction for high Trouton ratio fluids // Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. Vol. 144. P. 87–97.

[6] Бреббия К. Методы граничных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 621.039

Гидродинамика и теплообмен двухфазного газожидкостного потока в элементах ТВС[1]

Кашинский О.Н.*, Прибатурин Н.А.*,, Лобанов П.Д.*, Курдюмов А.С.*, Рандин В.В.***

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
**Новосибирский филиал Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Новосибирск

Проведено исследование гидродинамики и теплообмена двухфазного потока в основных элементах теплообменных контуров ЯЭУ — осесимметричном кольцевом канале и сборке вертикальных стержней. Проведено исследование особенностей распределения газовой фазы в сечении рабочих участков установок. Получены зависимости напряжения трения и коэффициента теплообмена при различных расходных скоростях жидкости и газа. Рассмотрено взаимодействие одно- и двухфазного потоков с преградами, которые перекрывают часть поперечного сечения каналов — дистанционирующей решеткой в сборке стержней и перегородкой, закрывающей 25% поперечного сечения кольцевого канала. Полученные данные могут быть использованы для верификации современных расчетных кодов.

1. Введение

К настоящему времени двухфазное течение в сборках стержней и пространственно сложных каналах реакторных установок фактически не изучено, соответственно отсутствуют и закономерности такого течения. В литературе имеется большое количество работ, посвященных динамике отдельных пузырей и пузырьковых смесей. Большинство работ по исследованию динамики двухфазной газо- и парожидкостной смеси проведены в каналах простой геометрии, в основном в вертикальных трубах. Приведены карты режимов течения, описаны механизмы, приводящие к распределению газовой и жидкой фаз в поперечном сечении каналов, особенностям межфазных взаимодействий, получены эмпирические корреляции. В последнее время появились работы, где проблемы движения газожидкостных смесей разрешаются при помощи современных расчетных методик DNS и LES. Однако модели, полученные для труб, нельзя напрямую перенести на каналы с более сложной геометрией, например, такие, как сборки стержней или кольцевые каналы.

В связи с этим возникает необходимость проведения экспериментальных исследований характера движения газо- и парожидкостных потоков в каналах сложной геометрии. О большом интересе к подобным исследованиям свидетельствует появление отдельных работ, выполненных ведущими зарубежными исследовательскими группами в последние пять лет [1–4].

2. Экспериментальная установка

Работа выполнена на гидродинамическом стенде ИТ СО РАН, представляющем собой замкнутый по жидкой фазе и разомкнутый по газовой фазе контур. Циркуляционным насосом жидкость из бака подавалась на вход вертикально размещенного рабочего участка, в который устанавливалась модель кольцевого канала или сборки стержней, имитирующей течение в ТВС. Из рабочего участка жидкость по отводному трубопроводу попадала обратно в бак. Для поддержания температуры рабочей жидкости $25 \pm 0.2°$ С использовалась система термостатирования. Измерения среднего и пульсационного напряжений трения на стенке выполнены с помощью электродиффузионного метода [5]. Измерения распределения газосодержания проводились при помощи датчика проводимости. Измерения проводились в области, расположенной непосредственно за препятствием в кольцевом канале и за дистанционирующей решеткой в сборке стержней. Минимальные шаги измерений составляли 10 градусов по азимутальной координате и 5 мм по высоте рабочего участка. Последующая обработка записанных реализаций сигналов датчиков позволяла построить трехмерные распределения трения на стенке газосодержания. Измерения проводились при расходной скорости жидкости до 3 м/с.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук МК-5147.2012.8.

3. Результаты измерений

3.1. Кольцевой канал

Кольцевой канал является простейшей физической моделью течения в системе продольных стержней. Объектом исследования было одно- и двухфазное течения в осесимметричном кольцевом канале при создании возмущений, которые провоцируют значительные изменения структуры течения, в частности, турбулентных характеристик, локального теплообмена, распределения газосодержания. Возмущение потока в кольцевом канале было создано путем частичного перекрытия поперечного сечения. Такая геометрия позволяет получить поток со строго выраженной крупномасштабной трехмерной структурой, что вызвано перестроением линий тока жидкости при обтекании преграды. Рабочим участком является вертикальная труба из оргстекла внутренним диаметром $D_O = 42.2$ мм и длиной 3600 мм. По оси этой трубы установлена внутренняя металлическая труба с наружным диаметром $D_I = 20$ мм. Гидравлический диаметр кольцевого канала $D_h = 22.2$ мм. В рабочем участке реализуется восходящее течение жидкости. В кольцевом канале установлена преграда — металлическая пластина высотой 2 мм, перекрывающая четверть поперечного сечения кольцевого канала (рис. 1). Преграда находится на расстоянии $L_O = 2700$ мм от входа в рабочий участок. Данная преграда вносит сильное возмущение в течение, имеющее трехмерный характер. Для центрирования центральной трубы в канале выше преграды по потоку располагались центрирующие решетки, схема которых приведена на рис. 1(б). Штриховой линией показан диаметр внешней трубы, а сплошными линиями — перекрытие решеткой поперечного сечения потока. Эксперименты проводились при расходной скорости жидкости 0.45 м/с, число Рейнольдса, рассчитанное по эквивалентному диаметру канала, равно 11000. Внутренняя труба закреплялась на координатном устройстве, при помощи которого производилось ее перемещение вдоль вертикальной оси канала и вращение трубы. В результате можно было менять положение датчиков измерения трения, теплового потока, газосодержания относительно преграды, что позволяло проводить исследование поля течения и теплообмена как по продольной, так и по азимутальной координатам.

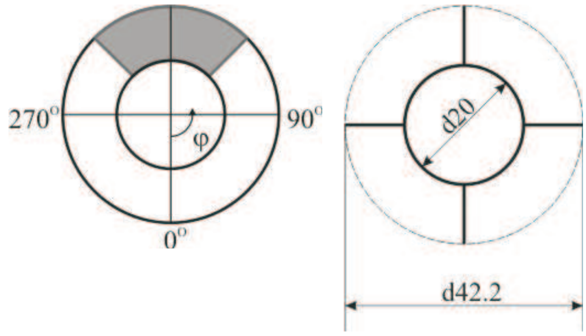


Рис. 1. Схемы поперечного сечения: а — кольцевого канала и перегородки; б — дистанционирующей решетки

Было проведено исследование локальных осредненных и пульсационных характеристик течения жидкости, имеющей трехмерную структуру. Получены азимутальные распределения напряжения трения и его пульсаций на различном расстоянии от перегородки. Показано, что в непосредственной близости от перегородки наблюдается сложная структура сигнала датчиков трения, содержащая выраженный минимум в затененной области сечения канала и два максимума, расположенных по краям этой зоны. При увеличении расстояния от перегородки наблюдается выравнивание сигнала датчика, однако слабое влияние перегородки заметно на расстоянии свыше 600 мм. Распределение турбулентных пульсаций напряжения трения на стенке трубы непосредственно за перегородкой характеризуется резким возрастанием в затененной области и небольшим снижением в свободном сечении канала. На расстоянии более 400 мм от перегородки измеренные значения интенсивности турбулентных пульсаций потока соответствуют таковым при турбулентном течении невозмущенной жидкости.

Для двухфазного газожидкостного течения проведено исследование распределения газа за возмущающей поток преградой. Данные об азимутальном распределении локального газосодержания за преградой приведены на рис. 2. За преградой формируется трехмерная вихревая структура. За счет вихрей происходит захват пузырей газа, что хорошо наблюдается визуально. Это приводит к появлению повышенного газосодержания в области за преградой. В свободном сечении канала газ проходит без задержек и газосодержание значительно ниже. Интересно, что в свободной от преграды области с увеличением расстояния от заслонки наблюдается переход профиля газосодержания от параболического к седлообразному. Пик газосодержания за заслонкой наблюдается на расстоянии более 350 мм от заслонки. Распределение локального газосодержания по высоте канала после заслонки приведено на рис. 3. Вид А показывает сечение, которое соответствует минимальному (слева) и максимальному(справа) отклонению от преграды. Заметно, что за преградой формируется область с повышенным газосодержанием. В продольном сечении канала за-

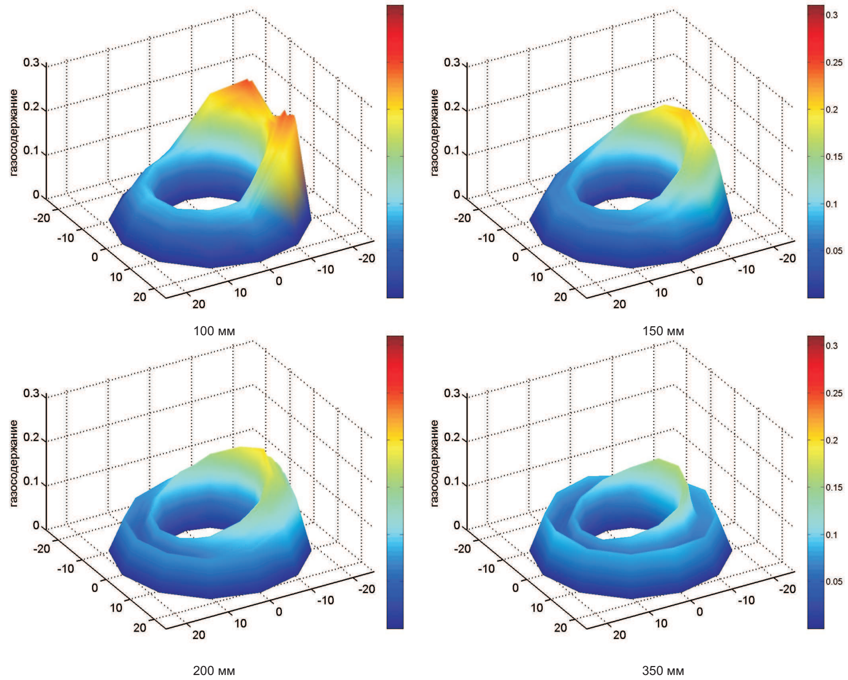


Рис. 2. Распределение локального газосодержания в поперечном сечении в кольцевом канале с перегородкой

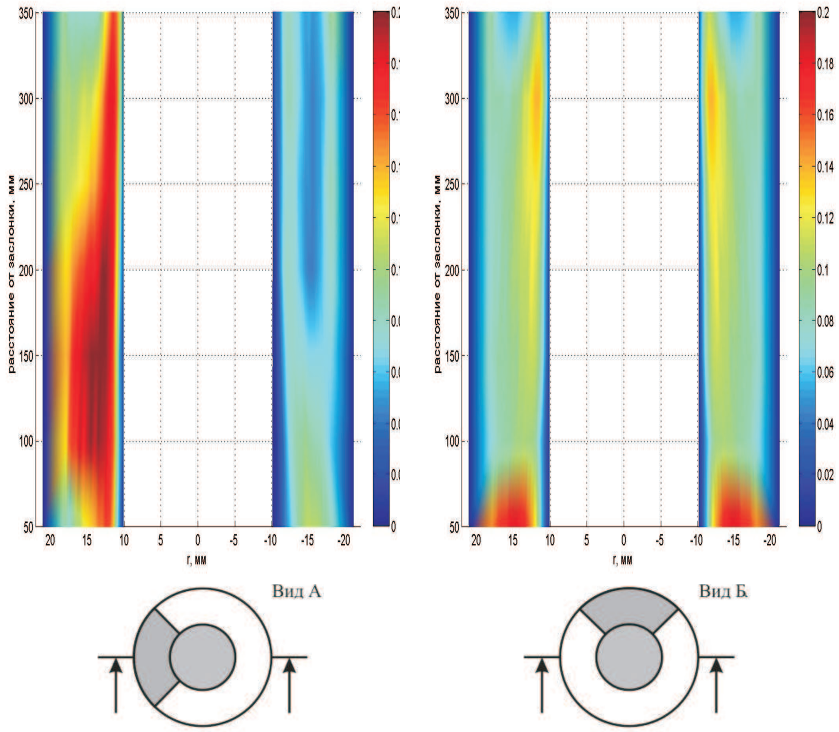


Рис. 3. Распределение локального газосодержания в продольном сечении в кольцевом канале с перегородкой

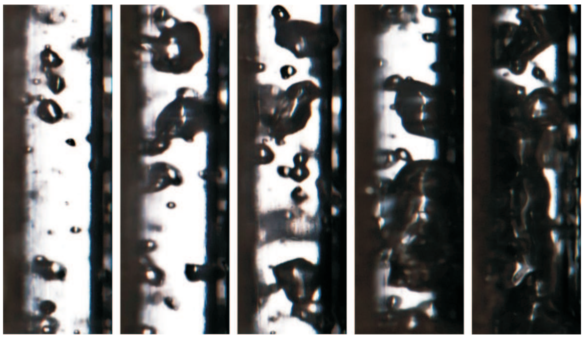


Рис. 4. Фотография пузырей в межтвэльном пространстве

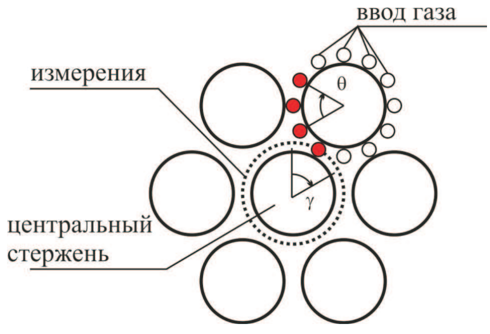


Рис. 5. Схема ввода газовой фазы в поток

метна миграция газа к внутренней стенке канала с увеличением расстояния от преграды. В противоположном положении заметно, как происходит переход от параболического при расстоянии от преграды 50 мм к седлообразному профилю на расстоянии более 200 мм от преграды.

3.2. Сборка вертикальных стержней

Измерения проводились при помощи датчика проводимости, установленного на центральном имитаторе твэла сборки. В процессе измерений газосодержания производилось вращение центральной трубки — имитатора твэла вокруг оси и ее перемещение по высоте. Позиционирование датчика относительно осевой и азимутальной координат производилось с использованием шаговых электродвигателей. Измерения проводились в области, расположенной непосредственно за ДР. Минимальные шаги измерений составляли 10 градусов по азимутальной координате и 5 мм по высоте модели имитатора ТВС. Измерения проводились при расходной скорости жидкости 3 м/с. Число Рейнольдса, рассчитанное по гидравлическому диаметру, равнялось 37000.

Исследования структуры двухфазного течения в межтвэльной ячейке за дистанционирующей решеткой показывают, что в потоке возможно движение как мелких пузырей газа, так и крупных удлиненных газовых образований, перекрывающих поперечное сечение межтвэльного пространства (рис. 4). Светлые области соответствуют жидкости, темные — газовой фазе.

Проведены измерения азимутального распределения газосодержания вокруг центрального стержня — имитатора твэла по высоте канала и в зависимости от точки ввода газа в поток. Схема измерений приведена на рис. 5. Пунктирной линией на рисунке показана линия хода измерительного датчика. Распределение газовой фазы вокруг центрального стержня сборки при различных точках ввода газа приведено на рис. 6. Здесь Z обозначает расстояние от точки измерения до ДР; γ — азимутальный угол развертки измерений. В случае ввода газа в область, окружающую центральный имитатор твэла (рис. 6(a)), в секторе, соответствующем точке ввода газа в поток, наблюдаются большие значения локального содержания газовой фазы α. При изменении угла точки ввода газа наблюдается снижение значений α вплоть до практически нулевых значений в противоположной точке ввода газа относительно оси центрального имитатора твэла. Результаты этих измерений указывают на слабое перемешивание газовой фазы в межъячеечном пространстве.

Осредненные по азимутальному углу значения газосодержания в зависимости от расстояния от дистанционирующей решетки показывают, что для всех измеренных положений точки ввода газа наблюдается повышенное газосодержание на расстоянии не более 50 мм от решетки. Это вызвано тем, что за решеткой формируется вихревое течение, которое затягивает пузырьки газа. При увеличении расстояния от решетки происходит выравнивание распределения газовой фазы. Это свидетельствует о том, что в области за решеткой межъячеечное перемешивание слабо выражено.

Проведение измерений при разных расходных параметрах жидкой и газовой фаз позволило построить карту течения двухфазного потока в сборке при вводе газа из одиночного источника (рис. 7). Пузырьковый режим течения характеризуется наличием в потоке достаточно крупных, деформированных пузырей (spherical cap). При увеличении расходного газосодержания и снижении расходной скорости жидкости наблюдается переход к канальному снарядному режиму течения (cell Taylor bubble). Этот режим характеризуется наличием в потоке крупных газовых образований, длина кото-

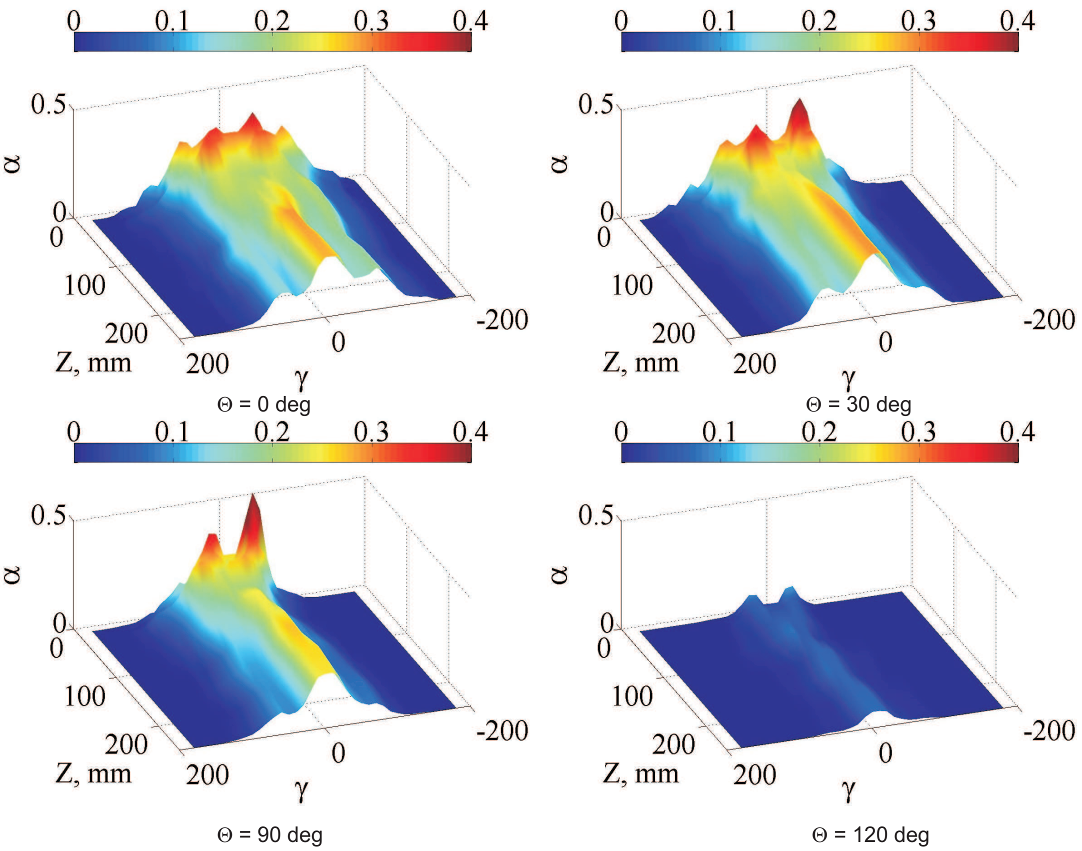


Рис. 6. Распределение газовой фазы в сборке стержней

рых существенно превышает диаметр канала. Канальные пузыри Тейлора занимают практически все поперечное сечение канала. Снарядный режим течения обнаружен при более высоких скоростях жидкости и расходах газа.

Гистограммы оценочной длины пузырей приведены на рис. 8 для скорости жидкости 3 м/с. Длина пузырей определялась как произведение времени взаимодействия пузыря с датчиком газосодержания на среднюю скорость пузырей в потоке. Наибольшее количество пузырей имеет размер не более 5 мм, количество более крупных пузырей существенно ниже. Явно выраженного изменения формы гистограммы при изменении расстояния от решетки не происходит, что может говорить об отсутствии интенсивных процессов дробления и коалесценции пузырей.

Таким образом, измерения показывают, что при двухфазном течении в сборке вертикальных стержней — имитаторов твэлов наличие дистанционирующей решетки вызывает неравномерное по высоте распределение газосодержания. Сразу же за решетками возникает область с увеличенным газосодержанием, которое затем снижается до средней величины, соответствующей режиму течения. В области вблизи решеток происходит и уменьшение скорости пузырей, возможны коалисценция пузырей и увеличение их размера. Длина этой области зависит от конструкции решетки и колеблется в диапазоне 20–40 мм, увеличение газосодержания по сравнению с основным потоком составляет от 10 до 30%. Средняя скорость пузырей газа в потоке превышает расходную скорость жидкости в среднем на 25%. В широком диапазоне газосодержаний и приведенной скорости жидкости преобладающим является канальный снарядный режим течения.

4. Заключение

Проведено экспериментальное исследование гидродинамики и теплообмена двухфазного течения потока теплоносителя в каналах сложной формы, характерных для реакторных установок: кольцевом канале с частичным перекрытием сечения и сборке вертикальных стержней, имитирующих конструкцию тепловыделяющей сборки. Получены закономерности изменения газосодержания по высоте

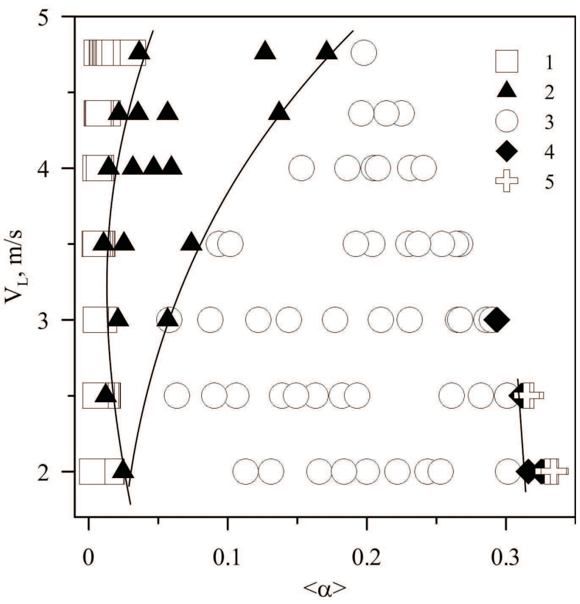


Рис. 7. Карта режимов двухфазного течения в вертикальной сборке имитаторов твэлов. 1 — пузырьковый; 2 — переходный; 3 — канальный снарядный; 4 — переходный; 5 — снарядный режимы течения двухфазной жидкости. Сплошными линиями выделены характерные границы переходов режимов течения

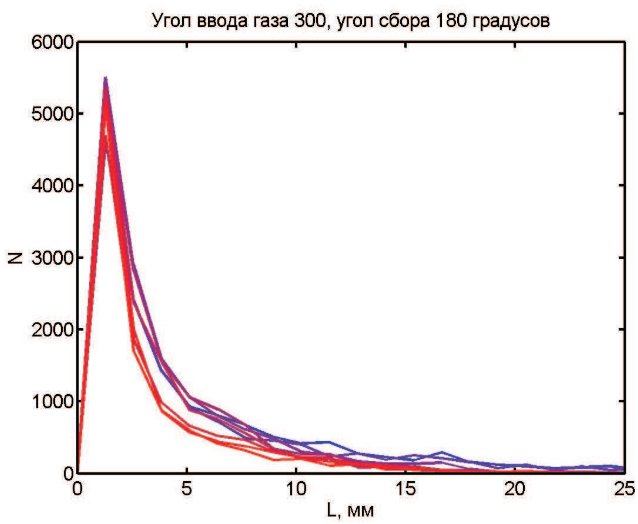


Рис. 8. Гистограмма распределения размеров пузырей за решеткой ТВС-1200

и поперечному сечению каналов, эволюции газовых образований, осреденные и пульсационные гидродинамические характеристики течения, закономерности теплообмена. Показана качественная аналогия поведения трения и теплообмена в двухфазном потоке.

Получена база экспериментальных данных, включающая в себя распределение локальных осредненных характеристик течения по сечению каналов, распределение турбулентных параметров течения, включающих в себя корреляционные и спектральные характеристики, данные по локальному теплообмену, данные по распределению газосодержания. Результаты работы могут служить бенчмарком для верификации CFD кодов, используемых при гидродинамических расчетах реакторных установок.

Список литературы

[1] Praser H. Novel experimental measuring techniques required to provide data for CFD verification // Nuclear Engineering and Design. 2008. V. 238.P. 744–770.

[2] Yadigaroglu G., Andreani M., Dreier J., Coddington P. Trends and needs in experimentation and numerical simulation for LWR safety // Nuclear Engineering and Design. 2003. V. 221. P. 205–223.

[3] Roy R.P., Velidandla V., Kalra S.P., Peturand P. Local measurements in the two phase flow region of subcooled boiling flow // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1994. V. 116. P. 660–669.

[4] Hibiki T., Situ R., Mi Y., Ishii M. Local flow measurements in vertical upward bubbly flow in an annulus // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 1479–1496.

[5] Накоряков В.Е., Бурдуков А.П., Кашинский О.Н., Гешев П.И. Электродиффузионный метод исследования локальной структуры однофазных и двухфазных течений. Издательство Института теплофизики, Новосибирск, 1986, 247 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.593+532.529+532.528+532.787+550.3

Особенности динамики состояния тяжелой пузырьковой магмы при взрывных извержениях вулканов[1]

Кедринский В.К.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Взрывное извержение вулкана, возникающее при внезапной разгерметизации вулканического канала, одно из загадочных явлений природы, механизм которого связан с внезапной декомпрессией сжатой до высоких давлений магмы, содержащей растворенный газ и микрокристаллиты, и с ее переходом в многофазное состояние. При очевидном отсутствии возможности напрямую исследовать эти процессы актуальной становится задача экспериментального и численного моделирования, создание математических моделей, которые позволили бы с определенной степенью адекватности описывать состояние магмы в различные периоды ее извержения. В качестве такой матмодели предложена комбинация систем уравнений механики многофазных сред, которая формулируется на базе модифицированной модели Иорданского–Когарко–ван Вингаардена (ИКВ-модели) с уравнением Навье–Стокса для переменной вязкости, и полного спектра кинетических соотношений, включая спонтанное зарождение и динамику насыщения магмы зародышами кавитации. Выполнен анализ предвзрывного состояния ряда вулканов, который показал, что по структурному признаку взрывные вулканы аналогичны схемам гидродинамических ударных труб (УТ) типа Glass–Heuckroth. При экспериментальном моделировании структуры потока продемонстрирована вероятность формирования снарядного режима как следствия коалесценции пузырьков в потоке. Предложена физическая модель комбинированных взрывных вулканических извержений, экспериментально исследован процесс формирования в потоке магмы независимого потока кристаллических кластеров (магматических «бомб»), движущегося относительно потока кавитирующей магмы с существенно большей скоростью.

1. Введение

Как это не покажется странным, учитывая многолетние и достаточно интенсивные исследования по моделированию процессов, сопровождающих взрывные вулканические извержения, первое же обращение к проблеме вызывает ощущение, что это классическая проблема «черного ящика». «Вход» в него более или менее известен — состояние магмы в вулканической камере оценивается геофизиками с определенной степенью вероятности, а «выход» (вулканическое извержение в атмосферу) изучен в деталях настолько, насколько существующие методы позволяют это сделать. Основная проблема состоит не столько в ответе на вопрос — какова динамика состояния магмы в вулканическом канале в волнах декомпрессии, сколько в необходимости выяснения механизмов, управляющих этой динамикой. С одной стороны, постановка задачи казалось бы становится более конкретной — детально исследовать фазовые переходы в магматическом расплаве в поле тяжести при возникновении декомпрессии. С другой, мы сталкиваемся с необходимостью анализа динамического перехода насыщенного газом расплава из первоначально по сути однофазного состояния к двухфазному состоянию «газ–твердые частички» — облака пепла, извержение которых из кратера вулкана имеет очевидный взрывной характер. При этом упомянутый переход до сих пор практически остается загадкой. Не добавляют понимания и исследования H.M. Gonnermann и M. Manga [1], проводившиеся на вулканических материалах, в которых утверждается, что фрагментация магмы и взрывное извержение не обязательно должны быть причинно-следственными процессами: фрагментация может происходить глубоко в вулканах без инициирования извержения. Таким образом уже один этот пример показывает, что развивающиеся в магме процессы — это очень сложные, многогранные и мно-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 2.6 и РФФИ (грант 12–01–00134a).

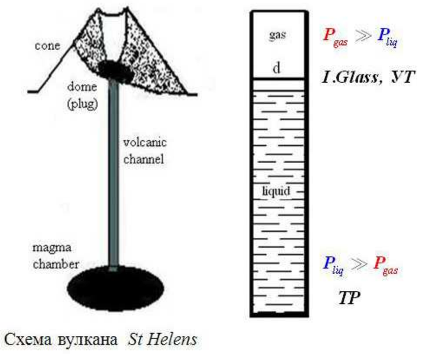


Рис. 1. Импульсная гидродинамическая трубка разрежения как схемный аналог предвзрывного состояния вулкана St Helens

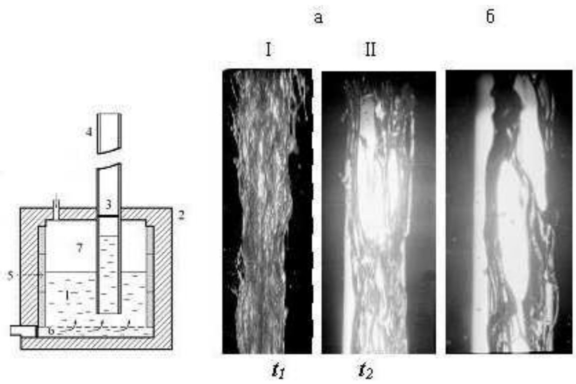


Рис. 2. Статическая схема предвзрывного состояния, динамика структуры потока различной вязкости

гомасштабные явления, которые нуждаются в поисках модельных постановок, по возможности наиболее адекватных природным. С точки зрения верификации возможных моделей полезно иметь ввиду утверждение геофизиков относительно условий взрывного характера извержений магмы и ее фрагментизации: извержения носят взрывной характер, если магма имеет высокую вязкость.

Эти характеристики, в частности, присущи rhyolitic магме с содержанием кремния, превышающим 63%, и большим содержанием растворенного газа, вязкость которой в $10^6 \div 10^8$ раз превышает вязкость воды (10^{-3} Па·сек). При такого рода процессах объемная концентрация выделившегося из расплава растворенного газа достигает 75%. Утверждается, что эффективность фрагментации магмы контролируется такими факторами как степень пересжатия, температура, пористость, вкрапление и содержание микролитов. Анализ известных данных показывает, что в целом процессы извержения взрывных вулканов по всему спектру их классификации по признаку интенсивности (A. Lacroix, 1908 г.), можно отнести к области высокоскоростной гидродинамики многофазных и много компонентных течений. В этом случае возникает принципиальная возможность найти общие с вулканическими системами, начиная от их предвзрывного состояния, характерные признаки гидродинамических течений обычных жидких сред при их ударно-волновом нагружении [2].

2. Механика взрывных извержений — проблемы экспериментального моделирования

Анализ результатов исследований по механике разрушения жидкостей при их ударно-волновом нагружении [2] и данных по вулканическим извержениям позволяет утверждать, что вулканы взрывного типа по структурному признаку и по признакам состояний, предшествующих взрывным извержениям, близки к гидродинамическим ударным трубам (УТ) [3]. При этом нестационарные высокоскоростные процессы, возникающие при импульсном нагружении жидких сред [2], при определенных условиях могут рассматриваться как аналоги природных вулканических процессов и по вероятным механизмам их инициирования, и по динамике состояния потока.

2.1. Предвзрывное состояние вулканической системы

При экспериментальном моделировании извержений взрывного типа в качестве рабочих схем могут использоваться различного типа гидродинамические ударные трубы, предназначенные для генерации в жидкости в лабораторных условиях ударных волн с управляемыми параметрами [2]. Это могут быть как статические двухсекционные схемы УТ (рис. 1, 2), в которых достаточно поменять местами газ и жидкий образец, так и динамические схемы (рис. 3), в которых используются только жидкие образцы со свободной поверхностью. В последнем случае газодинамическая схема предвзрывного состояния вулкана формируется в динамическом режиме. Образец сжимается до заданного уровня давления ударной волной, генерируемой в нем каким-либо внешним источником, распространяется по образцу до межфазной границы, моделируя предвзрывную гидростатику в канале вулкана. Отраженная от этой границы волна, распространяясь по сжатому образцу в противоположном направлении, выполняет функцию волны декомпрессии. В статической схеме удар-

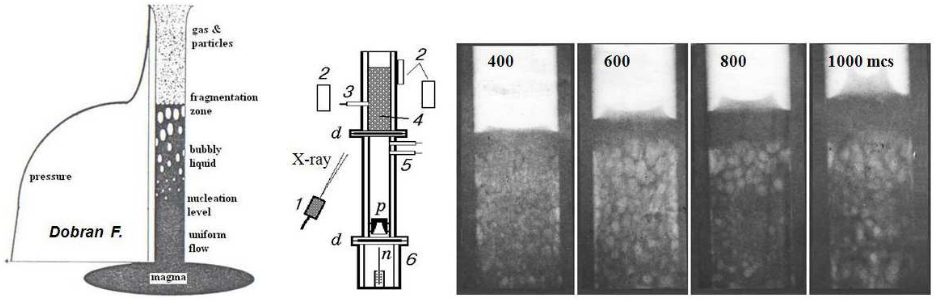


Рис. 3. Эскиз динамики состояния потока (Dobran F.), динамическая схема предвзрывного состояния вулкана и развитие кавитирующего потока магмы в волне декомпрессии

ной трубки секции разделены диафрагмой, в вулканическом канале — затвердевшей лавовой пробкой (domes/plugs).

Таким образом мы приходим к классической постановке задачи об УТ, задаче о распаде произвольного разрыва, в результате которого в камере высокого давления формируется и распространяется волна разрежения (волна декомпрессии). Это начальная стадия извержения, в течение которой, по сути, закладывается структура магматического потока и создаются условия для перехода его в двухфазное состояние. Как известно, возникающие в жидкой среде фазовые переходы и динамически развивающаяся пузырьковая кавитация приводят к существенному изменению параметров и структуры импульсного поля растягивающих напряжений, инициирующего эти процессы [2]. Естественно ожидать подобных эффектов и в вулканической системе. Наглядным примером вулканов взрывного типа, начальное состояние которых перед извержением соответствует схеме УТ, является вулкан St. Helens, мощное взрывное извержение которого инициировал гигантский оползень, сорвавший (согласно данным геофизиков) пробку, закрывающую вулканический канал [4].

2.2. Особенности структуры потока: статический и динамический режимы инициирования извержения

На рис. 2 представлены характерные структуры извержения, зарегистрированные (при микросекундной экспозиции) в атмосфере вблизи выхода из канала (рис. 2(а, б)) для жидкостей с вязкостью, отличающейся на порядок. На рис. 2(а) показана структура потока жидкости с вязкостью $\mu = 0,2$ Па·с ($T = 19^\circ$ C) в момент времени t_1 и его изменение в интервале $t_2 > t_1$. Видно, что на начальной стадии разрушения переход кавитирующей жидкости в пенную структуру, характерный для воды [2], наблюдается также для жидкости, вязкость которой на два порядка выше (кадр I на рис. 2(а)). Микросекундная экспозиция позволила разрешить тонкую структуру течения, которая с течением времени (кадр II на рис. 2(а)) существенно меняется: течение расслаивается на систему вертикальных струй, имеющих пространственную форму. При увеличении вязкости разрушаемой жидкости еще на порядок ($\mu = 2,6$ Па·с, $T = 42^\circ$ C) течение практически полностью расслаивается, приобретая более четко выраженный струйный характер (см. рис. 2(б)). Вероятная причина данного эффекта определена в результате исследования динамики структуры потока при низкоскоростном режиме извержения насыщенных жидкостей непосредственно в канале 4 установки. Оказалось, что в случае обычной воды ($\mu = 10^{-3}$ Па·с) в структуре низкоскоростного извержения формируется система всплывающих плотных пузырьковых кластеров, состояние которых оказывается близким к пенному. В некоторых из них в результате коалесценции пузырьков пенная структура спонтанно разрушается, формируя своеобразный «снарядный» режим с полостями, заполненными парогазовой смесью с частицами жидкости: структура потока постепенно превращается в комбинационную систему снаряд–пузырьковый кластер. Для магматического расплава с вязкостью на три порядка выше динамика структуры течения в основном такая же, как и для воды (меняются лишь временные масштабы). Этот результат позволяет предположить, что в окрестности поверхности магмы может «взрываться» не система отдельных пузырьков, а имеющие макрообъемы пространственные «снаряды», содержащие смесь газа и частиц, образовавшуюся в результате «внутреннего кавитационного взрыва». При этом, очевидно, что пространственные «снаряды» могут образовываться в различных частях потока магмы, всплывают к ее поверхности с различными скоростями и с различной глубины. Формирование такого рода цепочки макрообъемов в потоке магмы и последовательность их взрывного разрушения могут рассматриваться как один из механизмов периодичности выбросов облаков пепла (смеси газа и частиц) при взрывном извержении вулкана.

С другой стороны, динамическая схема моделирования предвзрывного состояния вулкана, как следует из рис. 3, дает вполне адекватную сложившимся в геофизике представлениям (таким, например, как схема Dobran F., [5]) экспериментальную модель начальной динамики состояния магмы в волне декомпрессии. Правда, представленный результат описывает лишь начальное (в пределах 1 мс) развитие кавитационного процесса в магме и не дает «гарантии», что в дальнейшем разрушение будет определяться взрывом ячеек пенной магмы с последующим распространением его фронта (в виде своеобразного «эффекта домино») вглубь канала вулкана.

2.3. Извержение потока магматических бомб — модель кластеров кристаллитов

Наличие в магме кристаллитов не вызывает сомнений. Однако их роль в механике состояния магмы и их влияние на протекающие в ней динамические процессы при декомпрессии далеко не однозначны. В частности, известны вулканы, извержения которых имеют комбинационную структуру и сопровождаются мощным выбросом раскаленных магматических «бомб» на значительную высоту [6]. Скорость кристаллизации слишком мала, чтобы «бомбы» могли сформироваться в процессе извержения. В связи с этим наиболее вероятна модель, предложенная в [7], согласно которой предполагается, что кристаллиты в период между извержениями в канале вулкана могут формировать кластеры — своего рода «зародыши» магматических бомб. С учетом этой физической модели можно выделить три предполагаемых состояния магмы, насыщенной кристаллитами: a) кристаллиты сохраняют свою фазу и растут в кавитирующей среде, b) становятся зародышами новой (паровой) фазы и таким образом гомогенная нуклеация сопровождается гетерогенной, c) наконец, кристаллиты в период между извержениями формируют кластеры.

Экспериментальное моделирование динамики состояния (c) системы при импульсной декомпрессии было выполнено для образца «жидкость–несмачиваемые твердые частицы», в качестве которого использовались смеси твердых частиц произвольной формы размером 1–3 мм с раствором канифоли в ацетоне или с дистиллированной водой, содержащей естественные микронеоднородности в виде газовых зародышей плотностью до 10^{12} м$^{-3}$.

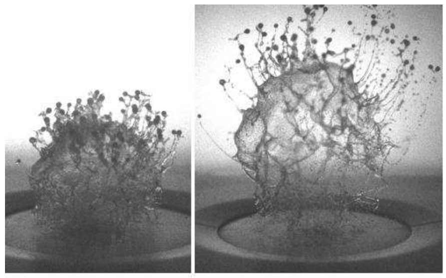


Рис. 4. Выброс высокоскоростного потока магматических «бомб» из кавитирующей магмы (экспериментальное моделирование)

Лабораторное моделирование выполнено методом последовательного (ударная волна–волна разрежения) нагружения капли указанных смесей (диаметром около 1 см) на электромагнитной гидродинамической ударной трубке. Этот метод предоставляет уникальную возможность в реальном масштабе времени в импульсном режиме реализовать в исследуемом образце процессы, во многом адекватные моделируемым природным эффектам. Поскольку реальная жидкость (дистиллированная вода) содержит микронеоднородности с плотностью, имеющей порядок 10^{12} м$^{-3}$ [8], ее небольшие объемы (капли радиусом 0,5 см) могут рассматриваться как характерные элементы исследуемой среды. Таким образом, масштаб процесса (но не сам процесс!) можно существенно изменить, добиваясь тем самым необходимого разрешения тонкой структуры потока.

Эксперименты показали, что процесс разрушения трехфазного потока может быть обусловлен, прежде всего, выделением магматических «бомб» в самостоятельный движущийся с большей скоростью поток и разрушением кавитирующего магматического расплава на стадии развития его пенной структуры. На двух последовательных кадрах рис. 4 представлены фотографии начальной стадии разделения потока частиц и кавитирующей капли жидкости. Как показали эксперименты, твердые частицы, движущиеся с существенно большей скоростью, выбрасываются из общего потока и образуют систему, практически не зависящую от кавитирующей жидкости. Обнаружено, что с увеличением концентрации частиц на начальной стадии они вовлекаются в процесс формирования ячеистой структуры потока, распределяясь в основном вдоль жидких границ ячеек, затем поток частиц выбрасывается из основного течения вместе с элементами ячеек, которые в виде жидких шлейфов «сопровождают» поток частиц (рис. 4).

3. Динамика состояния магмы, структура волнового поля (многофазная матмодель)

Численный анализ динамики состояния магматического расплава и процесса формирования в нем волны декомпрессии проводится в рамках математической модели механики многофазных сред, включающей в качестве базовой ИКВ-модель, а также наиболее полную систему уравнений кинетики, описывающих основные физические процессы (такие как спонтанное зарождение кавитационных ядер, диффузию газа из расплава и кинетику кристаллизации), протекающие в сжатой магме при ее декомпрессии. Ниже приведем только те уравнения, которые включают числа подобия:

– закон сохранения импульса

$$\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde t}+\tilde v\,\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde z}=-\frac{\mathrm{Eu}}{\tilde\rho}\,\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde z}-\frac{1}{\mathrm{Fr}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{1}{\tilde\rho}\,\frac{\partial}{\partial\tilde z}\Big(\tilde\mu\,\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde z}\Big);$$

– частоту нуклеации

$$\tilde J=\exp\{-\mathrm{G}[(\tilde p_{\mathrm{ch}}/\Delta\tilde p)^2-1]\};$$

– уравнение Рэлея

$$\tilde R\ddot{\tilde R}+\frac{3}{2}\,\dot{\tilde R}^2=\frac{\mathrm{Eu}}{\tilde\rho}\,(\tilde p_{\mathrm{g}}-\tilde p)+\frac{4}{\mathrm{Re}\,\mathrm{R}}\,\frac{d\,\tilde R}{d\tilde t};$$

– уравнение диффузии

$$\mathrm{RePr_D}\,\frac{\mathrm{d\tilde m_g}}{\mathrm{d\tilde t}}=3\,\mathrm{\tilde R}(\mathrm{C_i}-\mathrm{C^{eq}}(\mathrm{\tilde p_g}));$$

– уравнение энергии

$$\frac{d\tilde T}{d\tilde t}=\mathrm{Ku}\,\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d\tilde t}}+\mathrm{Ku}'\,\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{N_b}\,\mathrm{z}_0^3\,\frac{\mathrm{d\tilde m_g}}{\mathrm{d\tilde t}};$$

– уравнение динамики состояния кристаллитов

$$X_{cr}=(4\pi/3)N_{cr}v_{cr}^3t_0^3\bigg(\int\limits_0^t v_{cr}d\tau\bigg)^3;\qquad v_{cr}=\Delta T.$$

Здесь ΔT — переохлаждение расплава; v_{cr} — скорость роста кристаллов; X_{cr} — их объемная концентрация. Течение характеризуется числами Эйлера, Фруда, Рейнольдса, Гиббса, Прандтля и числами Кутателадзе для кристаллизации и десорбции соответственно: $\mathrm{Eu}=p_0/\rho_0v_0^2$, $\mathrm{Fr}=v_0/gt_0$, $\mathrm{Re}=z_0v_0/\nu_0$, $\mathrm{G}=16\pi\,\sigma^3/3\,p_{ch}^2k_{\mathrm{B}}T$, $\mathrm{Pr}_D=\nu_0/D$, $\mathrm{Ku}=\mathrm{L}/(\mathrm{c\,T_0})$, $\mathrm{Ku}'=\mathrm{r_d}/(\mathrm{c\,T_0})$. Здесь L — теплота кристаллизации; r_d — теплота десорбции; c — теплоемкость магмы.

Постановка задачи. Рассматривается задача о динамике состояния тяжелой газонасыщенной магмы с высокой плотностью зародышей микрокристаллитов, заполняющей часть (высотой H) вулканического канала (ось z). Волна декомпрессии формируется на поверхности столба магмы в результате каких-то природных явлений. На его нижней границе задано постоянное давление p_{ch}, равное давлению в магматической камере. Начальная равновесная концентрация C^{eq} растворенного в магме газа определяется законом Генри $C^{eq}(p)=K_{\mathrm{H}}\sqrt{p}$. Расчеты динамики состояния магмы (в условиях, когда кристаллиты сохраняют фазу) проводились при следующих параметрах: $H=1$ км, $p_{ch}=170$ МПа, $T_{mel}=1150^0K$, $\rho_0=2300$ кг/м^3; $K_{\mathrm{H}}=4.33\cdot10^{-6}$ Па$^{-1/2}$; $D=2\cdot10^{-11}$ м^2/с; $\sigma=0,076$ Дж/м^2; $E_\mu^*=5,1\cdot10^{-19}$ Дж; $L=1,4\cdot10^5$ Дж/кг; $c=1,35\cdot10^3$ Дж/(кг·К); $N_{cr}=10^{13}$ м$^{-3}$. Как показал анализ динамики характеристик, определяющих состояние магмы, практически во всех распределениях выделяются три зоны. Отметим 600–700 м зону распределения давления со слабым градиентом, выросшую на 6 порядков вязкость расплава магмы с довольно резким градиентом вблизи свободной поверхности и значительные концентрации газовой K_b и кристаллической K_{cr} фаз. Первая из них в районе интервала 700–1300 м к $t=6,1$сек достигает 40% со скачком до 50–60% вблизи свободной поверхности, что соответствует насыпной плотности пузырьков. Относительный объем кристаллитов в интервале 500–1300 м достигает примерно 25% от объема трехфазной среды. После 4 сек распределение объемной концентрации газовой фазы остается практически неизменным.

Рис. 5 представляет динамику распределения вязкости μ и радиусов кавитационных пузырьков в зоне насыщения для моментов времени *1* — $t=0,6$ с; *2* — $t=2,1$ с; *3* — $t=3,0$ с; *4* — $t=5,8$ с. Сравнение распределений проведено на высотах магматического столба, которые увеличиваются по мере развития кавитации, и которые для каждого из указанных моментов времени принимаются за 100%. В частности, если при $t=0,6$ с высота столба магмы в канале увеличивается всего на несколько десятков метров, то при $t=6$ с она достигает полутора километров. Из расчета следует, что размер кавитационных пузырьков, с учетом гигантского значения вязкости магмы, очевидно приблизился к предельно возможному. Таким образом, имеются основания предполагать, что примерно к 6 сек после начала разгрузки в трехфазной магме с «вмороженными» пузырьками радиусом около 0,3 мм на значительной части столба практически завершается процесс стеклования, при котором структура магмы по параметрам оказывается близка к структуре реальной пемзы [9].

Двухфазная модель гомогенно–гетерогенной нуклеации. Рассматривается случай, когда микрокристаллиты выполняют функцию зародышей пузырьковой кавитации. Они «вбрасываются» в зону насыщения, увеличивая таким образом плотность

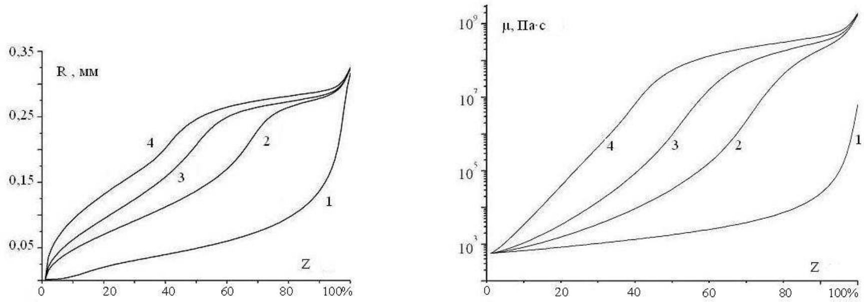


Рис. 5. Динамика распределения вязкости μ и радиусов кавитационных пузырьков в зоне насыщенияя

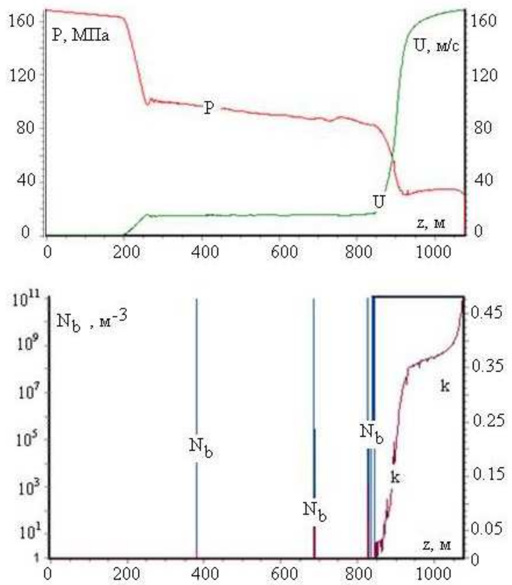


Рис. 6. Структура волнового поля, массовой скорости и концентрации газовой фазы в зоне насыщения

зародышей на заданную величину, но не меняют количество газа, поступившего в зону спонтанного насыщения. Рис. 6 показывает, что в такой среде происходит кардинальное (по сравнению с классикой однофазного состояния несущей фазы) изменение структуры и волнового поля, и поля массовых скоростей. Зона насыщения N_b оказывается сосредоточенной в ближних к поверхности слоях, в которых скачком практически на порядок увеличиваются объемная концентрация пузырьков k, потери расплавом растворенного газа и, как следствие, вязкость расплава.

В качестве заключения: приведенный результат по структуре и параметрам потока дает основание сделать заключение о том, что в потоке естественным образом формируется состояние, близкое к состоянию взрывного извержения.

Список литературы

[1] Gonnermann H.M., Manga M. Nature, 2003, vol. 426, c. 432–435.

[2] Кедринский В.К. Нелинейные проблемы кавитационного разрушения жидкости при взрывном нагружении (обзор) // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 3. С. 74–91.

[3] Кедринский В.К. О газодинамических признаках взрывных извержений вулканов (часть I) // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 3–12.

[4] Eichelberger J., Gordeev E., Koyaguchi T. A Russian-Japan-US Partnership to understand explosive Volcanism // www.kscnet.ru /conference / sovbes / agenda / cvs Jun. 22, 2006. C. 1–4.

[5] Dobran F. Non-equilibrium flow in volcanic conduits and application of the eruption of Mt. St. Helens on May 18 1980 and Vesuvius in AD.79, J. Volcanol. Geotherm. Res. 1992. V. 49. C. 285–311.

[6] Hill D.P., Pollitz F. and Newhall Ch. Earthquake-volcano interactions // J. Phys. Today. 2002. V. 55, № 11. C. 41-47.

[7] Кедринский В.К. О газодинамических признаках взрывных извержений вулканов (часть II) // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 167-177.

[8] Бесов А.С., Кедринский В.К., Пальчиков Е.И. Изучение начальной стадии кавитации с помощью дифракционно-оптической методики // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, вып. 4. С. 240-244.

[9] Кедринский В.К., Давыдов М.Н., Чернов А.А., Takayama K. Начальная стадия взрывного извержения вулканов: динамика состояния магмы в волнах разгрузки // Докл. Академии наук. 2006. Т. 407, № 2. С. 190-193.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 537.868

Разрушение водонефтяных эмульсий электромагнитным излучением в динамическом режиме[1]

Ковалева Л.А., Зиннатуллин Р.Р., Благочиннов В.Н., Мусин А.А., Фатхуллина Ю.И., Замула Ю.С.

Центр «Микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем», БашГУ, Уфа

В статье представлены результаты экспериментальных и численных исследований влияния ВЧ и СВЧ электромагнитных полей на водонефтяные эмульсии. Проведено детальное исследование зависимости диэлектрических свойств эмульсий от частоты для возможности установления области частот наиболее эффективного электромагнитного воздействия. Представлены результаты исследований устойчивости водонефтяных эмульсий в ВЧ электромагнитном поле в зависимости от их диэлектрических свойств. Экспериментально исследовано воздействие СВЧ электромагнитного поля на эмульсии в динамическом режиме. Рассмотрена математическая модель влияния ВЧ и СВЧ электромагнитных полей на эмульсионную каплю с целью определения механизма разрушения эмульсии.

1. Введение

Одним из важных технологических процессов в нефтедобыче является промысловая подготовка нефти, в которой основную задачу составляет обезвоживание водонефтяной эмульсии. Другая задача, связанная с проблемой обезвоживания устойчивых водонефтяных эмульсий, — утилизация нефтяных шламов, в огромных количествах накопленных в районах нефтедобычи, трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов, а также предприятий нефтепереработки и нефтехимии.

Эмульсия «вода в нефти» представляет собой гетерогенную систему, состоящую из очень мелких (до 50 мкм) капель воды, диспергированных в нефти. Каждая капля окружена так называемой бронирующей оболочкой толщиной 50Ч100 нм, состоящей из полярных компонентов нефти. Бронирующая оболочка препятствует коалесценции капель воды. Такие эмульсии фактически не могут быть разрушены обычными методами (центрифугирование, нагрев, использование деэмульгаторов) [1].

Один из перспективных методов разрушения водонефтяных эмульсий — использование электромагнитных полей ВЧ и СВЧ диапазонов. Выбор вышеуказанных диапазонов обосновывается тем, что для водонефтяной эмульсии диэлектрические параметры, определяющие степень взаимодействия поля со средой, имеют две области дисперсии в ВЧ и СВЧ областях. Дисперсия в ВЧ области обусловлена поляризацией полярных компонентов нефти (асфальтенов, смол), а в СВЧ области — поляризацией молекул воды [2, 3].

Этот факт дает возможность использования энергии электромагнитного поля ВЧ и СВЧ диапазонов при разработке технологии обезвоживания водонефтяных эмульсий.

Эффективность действия электромагнитного поля определяется частотой приложенного поля и диэлектрическими свойствами (тангенсом угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta$ и относительной диэлектрической проницаемостью ε') эмульсии, которые характеризуют его поведение во внешнем поле [2, 4] Поэтому детальное исследование зависимости диэлектрических свойств эмульсий от частоты поля дает возможность установить область частот наиболее эффективного электромагнитного воздействия. Диэлектрические параметры исследуемых водонефтяных эмульсий определялись методом куметра (ВМ-560, Е4-11). Для исследованных образцов зависимости $\operatorname{tg}\delta(f)$ имеют ярко выраженные резонансные максимумы в диапазоне частот 1–20 МГц (рис. 1).

Наличие максимума в частотном ходе $\operatorname{tg}\delta$ позволяет прогнозировать резонансное взаимодействие объектов с ВЧ ЭМ полем, Т.е. при частоте электромагнитного поля, равной частоте, при ко-

[1]Работа выполнена при поддержке грантов Министерства образования и науки России (11.G34.31.0040 и МК-3070.2011.8) и гранта РФФИ № 11–01–97013.

торой $\operatorname{tg}\delta$ имеет максимум, энергия поля наиболее интенсивно поглощается полярными компонентами среды, образующими бронирующие оболочки высокомолекулярных полярных компонентов нефти, образующиеся в эмульсии на поверхности капель воды. Следовательно, в ней возникнут интенсивные термо- и гидродинамические эффекты, и прочность молекулярной связи между дипольными молекулами оболочки снизится. Это, в конечном счете, ослабит прочность всей оболочки, что приведет к разрушению водонефтяной эмульсии.

2. Экспериментальные исследования

Для экспериментальных исследований воздействия ВЧ ЭМ поля на образцы использовался лабораторный стенд высокочастотного четвертьволнового резонатора рис. 2. Образцы эмульсий в мерной пробирке по 25 мл помещались в узел обработки эмульсии электромагнитным полем с частотой излучения 13,56 МГц и мощностью излучения 800 Вт. Узел обработки 1 соединяется с генератором электромагнитных волн посредством коаксиального кабеля 3 марки РК-75-44-12 и тройника 4. Согласование системы производится посредством узла согласования 5, представляющего собой коаксиальную систему переменной емкости.

Результаты, полученные после воздействия на исследуемые эмульсии ВЧ ЭМ полем с частотой 13,56 МГц, представлены на рис. 3, из которого видно, что эмульсия, у которой резонансная частота ближе к рабочей частоте ВЧ генератора (13,56 МГц), разрушается наиболее эффективно [5].

При резонансном взаимодействии ЭМ поля со средой происходит интенсивное разрушение структуры бронирующих оболочек на каплях воды, состоящих из адсорбированных на ее поверхности полярных компонентов нефти (асфальтенов, смол и др.).

Кроме этого, для визуализации процесса взаимодействия капель воды в водонефтяных эмульсиях были сделаны видеосъемки процесса воздействия ВЧ электромагнитного поля ($f = 0,5$ МГц, $W = 30$ Вт) на микроструктуру водонефтяных эмульсий. Для этого использовались генератор AG 1021 (T&C Power Conversion) и видеокамера INFINITY 2 (Lumenera). На рис. 4 представлены кадры в отсутствии электромагнитного поля (а) и через 30 секунд после включения электромагнитного генератора (б). Как видно, под действием ВЧ электромагнитного поля образуются агрегаты капель в виде цепочек, вытянутых преимущественно вдоль направления силовых линий электрического поля. Наблюдается также и слияние капель.

Аналогичные исследования проводили в СВЧ

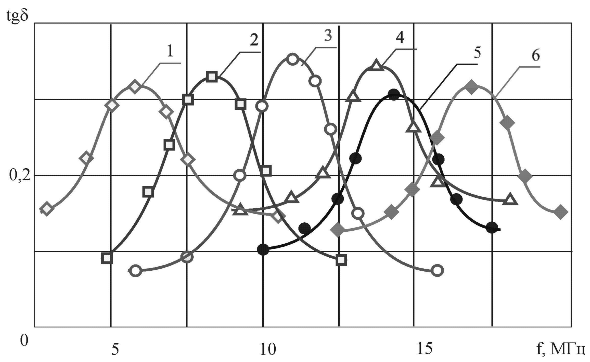


Рис. 1. Зависимость тангенса угла диэлектрических потерь для образцов эмульсий от частоты ЭМП с различным содержанием воды в образцах: 1 — 60%; 2 — 50%; 3 — 40%; 4 — 30%; 5 — 20%; 6 — 10%

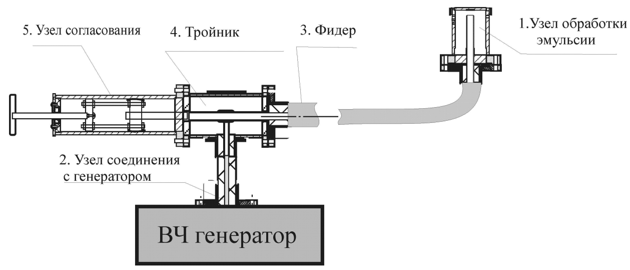


Рис. 2. Принципиальная схема лабораторного стенда для обработки эмульсии ВЧ электромагнитным полем

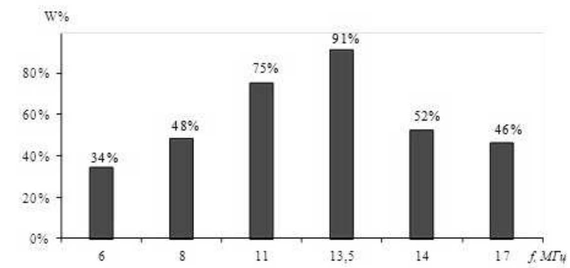


Рис. 3. Зависимость доли отслоившейся воды из водонефтяной эмульсий в зависимости от ее резонансной частоты

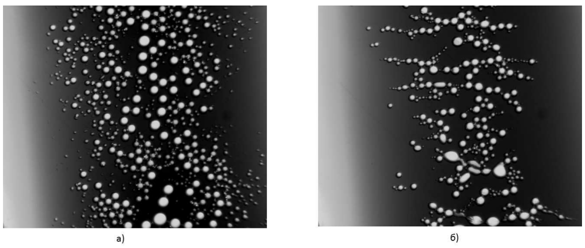


Рис. 4. Фотографии микроструктуры водонефтяной эмульсии до и после воздействия ВЧ ЭМ полем

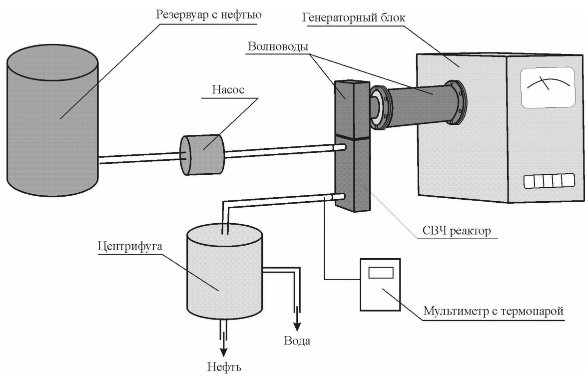


Рис. 5. Принципиальная схема установки для обработки эмульсий СВЧ электромагнитным полем в динамическом режиме

области с частотой 2,4 ГГц. На рис. 5 представлена принципиальная схема установки для обработки эмульсий СВЧ электромагнитным полем в динамическом режиме.

Результаты исследований воздействия СВЧ электромагнитного поля на различные образцы эмульсий показали, что эффективность расслоения эмульсий в СВЧ ЭМ поле зависит от толщины бронирующей оболочки. При СВЧ электромагнитном воздействии на водонефтяную эмульсию основная энергия поглощается водной фазой, сосредоточенной в глобулах, покрытых бронирующей оболочкой. В результате в глобулах воды возникают объемные источники тепла, за счет чего происходит их интенсивный нагрев, приводящий к разрушению бронирующей оболочки. Однако, в зависимости от прочности и толщины бронирующей оболочки температура, при которой происходит разрыв оболочки, может быть разной. Для разрыва тонких оболочек достаточны небольшие температуры. При значительной прочности и толщине оболочки температура разрыва и давление внутри оболочки могут быть настолько большими, что при разрыве оболочки происходит локальный разрыв и «впрыскивание» глобул воды в нефтяную фазу. В результате образуется мелкодисперсная стойкая среда, что подтверждается фотоснимками микроструктуры водонефтяной эмульсии до и после обработки СВЧ ЭМП (рис. 6) [6].

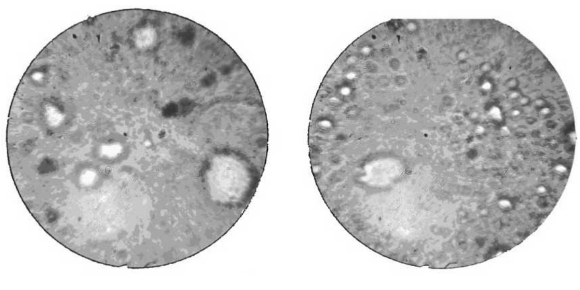


Рис. 6. Фотоснимки микроструктуры образца эмульсии до и после обработки СВЧ ЭМП

Для предотвращения локальных разрывов капель дальнейшие исследования проводились в динамическом режиме. На рис. 7 сопоставлены фотографии микроструктуры образца № 3 до обработки, после обработки СВЧ ЭМП в статическом режиме и в динамическом режиме при различных скоростях потока.

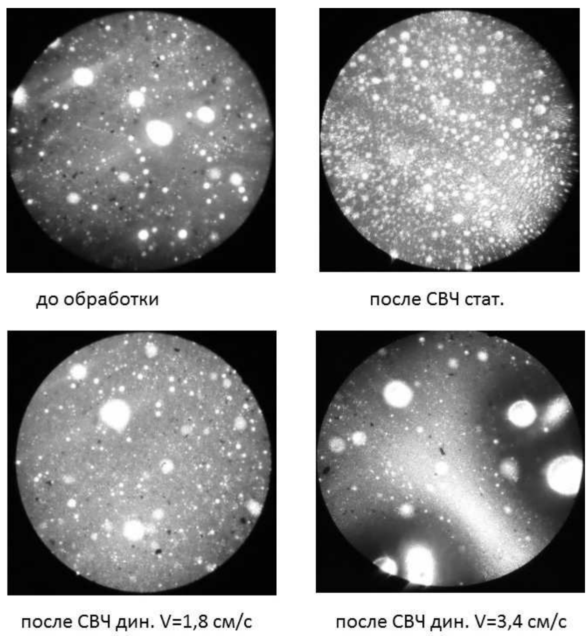


Рис. 7. Фотографии микроструктур образца № 3 до обработки и после обработки СВЧ ЭМП в различных условиях

До обработки наблюдаем устойчивую водонефтяную эмульсию с диспергированными глобулами воды. После обработки СВЧ ЭМП в статическом режиме наблюдаем отрицательный эффект разрушения тех самых глобул воды, то есть глобулы разбились на более мелкие глобулы. Произошел разрыв устойчивой оболочки диспергированных капель вследствие увеличения давления в этих каплях при воздействии СВЧ ЭМП. При обработке СВЧ ЭМП в динамическом режиме при скорости потока 1,8 см/с наблюдается положительный эффект действия поля, то есть мелкодиспергированные глобулы воды слились в более крупные глобулы. После обработки при скорости потока 3,4 см/с наблюдаем усиление эффекта действия поля.

3. Математическое моделирование

Предполагается, что капля воды радиуса r_0 находится в несмешивающейся с ней углеводородной жидкости. На границе фаз действует сила поверхностного натяжения. Кроме того, считается, что в процессе формирования капли на ее поверхности образовалась жесткая бесконечно тонкая бронирующая оболочка. В результате действия электромагнитного поля жидкости нагреваются и начинается тепловая конвекция, причем характер течения будет зависеть от способа теплового воздействия: при ВЧ воздействии преимущественно греется бронирующая оболочка, в случае СВЧ излучения происходит нагрев самой капли. Считается, что капля в процессе воздействия не деформируется и сохраняет сферическую форму. Зависимостью теплофизических свойств жидкостей от температуры пренебрегается. Движение каждой из сред описывается системой уравнений тепловой конвекции в линейном приближении Буссинеска [7]. На границе раздела сред выполняются закон сохранения энергии и условия динамического равновесия. Сила поверхностного натяжения, действующая в узком переходном слое (в бронирующей оболочке), сводится к объемной [8]. Энергия электромагнитного поля расходуется на нагрев среды и моделируется в виде распределенных источников тепла [9]. Тогда обезразмеренная система уравнений тепловой конвекции запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{U})}{\partial t}+\nabla(\rho\mathbf{U}\mathbf{U})=-\nabla p+\nabla\tau+\mathbf{n}\mathrm{Gr}\theta+\frac{1}{\mathrm{We}}\mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\nabla\mathbf{U}=0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{U}\nabla)T=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T+\frac{\mathrm{Os}}{\mathrm{Pr}}q, \quad (3)$$

$$q=\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon'\operatorname{tg}\delta}{2}\mid E\mid^2, \quad (4)$$

где Pr — число Прандтля; Gr — число Грасгофа; Os — число Остроградского; We — число Вебера; $\mathbf{U}$ — вектор скорости; $\tau=\mu(\nabla\mathbf{U}+\nabla\mathbf{U}^2)$ — тензор вязких напряжений; ρ — плотность; μ — динамическая вязкость; p — давление; T — температура; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора ускорения свободного падения; q — плотность распределенных источников тепла.

В силу симметрии системы задача решалась в сферической системе координат (r,φ,θ) с началом в центре капли. Оси системы координат ориентированы параллельно полю и вектору ускорения свободного падения. Таким образом, нет зависимости от координаты φ.

Краевые условия следующие:

$$U_r(r,\theta,0)=0; U_\theta(r,\theta,0)=0; T(r,\theta,0)=T_0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_r(0,\theta,t)}{\partial r}=0; U_\theta(R,\theta,t)=0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_r(r,0,t)}{\partial\theta}=0; \frac{\partial U_r(r,\pi,t)}{\partial\theta}=0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_\theta(0,\theta,t)}{\partial r}=0; U_r(R,\theta,t)=0; \quad (8)$$

$$U_\theta(r,0,t)=0; U_\theta(r,\pi,t)=0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(0,\theta,t)}{\partial r}=0; \frac{\partial T(R,\theta,t)}{\partial r}=0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(r,0,t)}{\partial\theta}=0; \frac{\partial T(r,\pi,t)}{\partial\theta}=0. \quad (11)$$

Поставленная задача решалась численно методом контрольного объема с использованием алгоритма SIMPLE.

На рис. 8 приведены радиальные распределения температуры в капле в случае ВЧ и СВЧ воздействия. В случае СВЧ нагрева тепловой поток направлен из центра капли (кривая 1), в то время как в случае ВЧ воздействия тепловой поток направлен от поверхности капли к ее центру (кривая 2). Линии тока в капле воды и окружающей жидкости для соответствующих способов воздействии показаны на рис. 9. Ввиду того, что диссипация энергии электромагнитного поля в случае ВЧ и СВЧ нагрева происходит в разных областях, характер теплового движения оказывается различным. А именно, при ВЧ воздействии основной нагрев происходит на границе раздела фаз, т.е. греется бронирующая оболочка (кривая 2 на рис. 8). Поэтому нагретая у границы бронирующей оболочки жидкость внутри и вне капли устремляется вверх вдоль границы раздела сред (рис. 9(a)). Происходит сонаправленное обтекание бронирующей оболочки капли. Течение внутри капли на рис. 1(a) направлено против часовой стрелки.

В случае СВЧ воздействия диссипация энергии поля происходит непосредственно в самой капле. Температура в центре капли оказывается максимальной (кривая 1 на рис. 8). Возникающая при

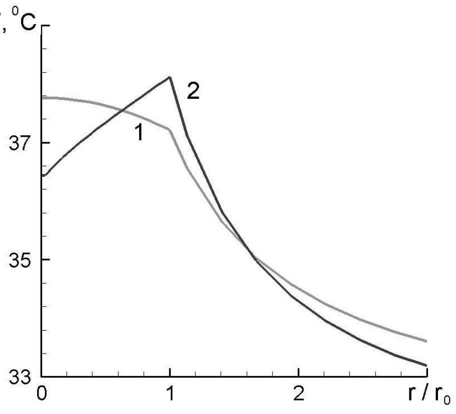


Рис. 8. Радиальное распределение температуры внутри и вне капли воды для СВЧ (кривая 1) и ВЧ (кривая 2) электромагнитного нагрева

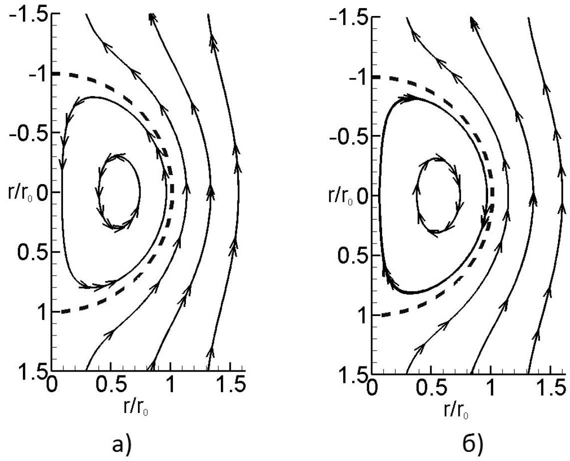


Рис. 9. Линии тока в капле и окружающей жидкости при ВЧ (а) и СВЧ (б) нагреве капли

этом конвективная структура отличается от описанной выше. Нагретая в центре капли жидкость поднимается вверх и опускается вниз вдоль границы капли. Течение внутри капли в этом случае направлено по часовой стрелке (рис. 9(б)). Конвекция в окружающей жидкости не отличается от конвекции в случае ВЧ воздействия на каплю и направлено вверх вдоль границы раздела сред. Таким образом, на границе раздела сред происходит противоположное обтекание бронирующей оболочки капли. Различие характера конвективных течений в случае ВЧ и СВЧ нагрева капли приведет к различию термоупругих напряжений на границе раздела сред.

4. Заключение

Полученные результаты показывают, что расслоение водонефтяных эмульсий происходит эффективнее при ВЧ электромагнитном воздействии в случае нахождения частоты воздействия в ВЧ области дисперсии диэлектрических параметров объекта, в противном случае наиболее эффективным является воздействие СВЧ электромагнитным полем. Однако, при воздействии на объекты СВЧ электромагнитным полем эффект зависит от толщины бронирующей оболочки вокруг глобул воды, при определенной толщине оболочки наблюдается распрыскивание глобул воды.

Результаты расчетов показали, что действие ВЧ и СВЧ электромагнитного излучения отличается не только распространением температуры, но и структурой возникающих конвективных течений. Под действием ВЧ излучения происходит сонаправленное обтекание бронирующей оболочки капли. В случае СВЧ воздействия обтекание бронирующей оболочки капли происходит в противоположных направлениях.

При воздействии на исследуемые образцы СВЧ электромагнитным полем в динамическом режиме в отличие от статического режима наблюдается увеличение размера капель воды и их слияние. Эффективность действия СВЧ ЭМ поля в динамическом режиме зависит от скорости потока.

Список литературы

[1] Тронов В.П. Разрушение эмульсии при добыче нефти. М: Недра, 1974. 271 с.

[2] Саяхов Ф.Л., Ковалева Л.А., Галимбеков А.Д. Электрофизика нефтегазовых систем. Уфа: БашГУ, 2003. 188 с.

[3] Ковалева Л.А., Миннигалимов Р.З., Зиннатуллин Р.Р. К исследованию диэлектрических и реологических характеристик водонефтяных эмульсий // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 5. С. 792–795.

[4] Ковалева Л.А., Миннигалимов Р.З, Зиннатуллин Р.Р. Развитие электромагнитной технологии для утилизации нефтешлама // Нефтяное хозяйство. 2009. № 9. С. 48–51.

[5] Ковалева Л.А., Зиннатуллин Р.Р. Исследование устойчивости водонефтяной эмульсии в электромагнитном поле в зависимости от ее диэлектрических свойств // Изв. вузов. Нефть и газ. 2010. № 2. С. 59–63.

[6] Kovaleva L., Zinnatullin R., Minnigalimov R. Dehydrating of Heavy Crude Oil Using Radio-Frequency and Microwave Radiation: What is Better? // Petroleum Phase Behavior and Fouling. Proc. 11th Annual International Conference. New York, 2010. № 031.

[7] Boussinesq J. Theorie analytique de la chaleur. Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris. 1903.

[8] Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.A. A continuum method for modelling surface tension // J. Comp. Physics. 1992. Vol. 100, № 2. P. 335–354.

[9] Kovaleva L., Musin A., Zinnatullin R., Akhatov I.S. Destruction of water-in-oil emulsions in electromagnetic fields // Proceedings of ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress & Exposition, IMECE2011-62935, Denver, Colorado, USA, November 11–17, 2011.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 123.45:57

Гибридные системы в ядерном топливном цикле. Принципы действия и приложения

Лежнин С.И.*, **Бреднихин С.А.****, **Юров Д.В.*****

*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск,
**Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва,
***Институт ядерной физики СО РАН, Новосибирск

Одной из основных задач современной ядерной энергетики является проблема утилизации отходов ядерного топливного цикла. В ИЯФ СО РАН совместно с ИВРАЭ РАН ведется разработка модели подкритичной гибридной системы с плазменным нейтронным драйвером на основе открытой газодинамической ловушки для решения данной задачи. Моделирование поведения плазмы в источнике проводилось с помощью ноль-мерного кода GENESYS, учитывающего процессы захвата инжектируемых атомов в ионы и процессы кулоновского взаимодействия с теплой плазмой. Также данный код содержит модуль расчета погонной мощности нейтронной эмиссии вдоль оси ловушки с помощью метода Монте-Карло. В качестве шаблона топливного бланкета был использован гомогенизованный бланкет системы EFIT. Расчет нейтронно-физических характеристик проводился с помощью статического кода NMC, использующего метод прямого моделирования траекторий нейтронов. В статье представлены результаты оптимизации параметров данной системы. В частности, определена оптимальная длина зоны эмиссии источника и выявлена зависимость коэффициента умножения от толщины буферной зоны подкритичного бланкета.

1. Введение

Проблема дожигания долгоживущих продуктов деления тепловых ядерных реакторов является одной из наиболее существенных для ядерной отрасли. Для ее решения возможно применение подкритичных гибридных систем. Институт ядерной физики им. Будкера СО РАН совместно с Институтом безопасного развития ядерной энергетики РАН ведут разработку гибридной подкритичной системы с нейтронным драйвером на основе газодинамической открытой ловушки (ГДЛ). Преимуществами такой системы по сравнению с аналогичными системами с источниками нейтронов на основе токамака являются относительная простота конструкции, более эффективное использование термоядерных нейтронов за счет возможности изменения конфигурации магнитного поля и отсутствие проблемы деградации первой стенки системы за счет тепловой нагрузки на нее. В то же время, данная система обладает аналогичными с токамаками преимуществами перед ADS-системами (непрерывный режим работы и более высокий коэффициент умножения нейтронов в бланкете).

Данная статья представляет результаты ряда численных экспериментов, направленных на определение оптимальной конфигурации элементов гибридной системы, обеспечивающей максимальную энергетическую эффективность источника нейтронов и эффективность использования нейтронов источника в бланкете. Также в работе будут описаны программы моделирования нейтронных процессов в бланкете (NMC) и динамики плазменных параметров в газодинамической открытой ловушке (GENSYS), разработанных для решения поставленной задачи.

Принципиальная схема подкритичной гибридной системы с драйвером на основе ГДЛ приведена на рис. 1. Данная ловушка представляет собой длинный аксиально-симметричный пробкотрон для удержания неравновесной двухкомпонентной плазмы [1]. Первая компонента — это столкновительная теплая плазма, удерживаемая в газодинамическом режиме. Вторая — быстрые ионы, появляющиеся за счет захвата нагревных атомарных пучков на теплой компоненте. Длина пробега быстрых ионов существенно превышает размер ловушки, поэтому быстрые ионы удерживаются как в классическом «слабостолкновительном» пробкотроне. Так как быстрые ионы движутся в бесстолкновительном режиме, а инжекция происходит под острым углом к магнитному полю (питч-угол), между пробками ловушки возникает осцилляция частиц быст-

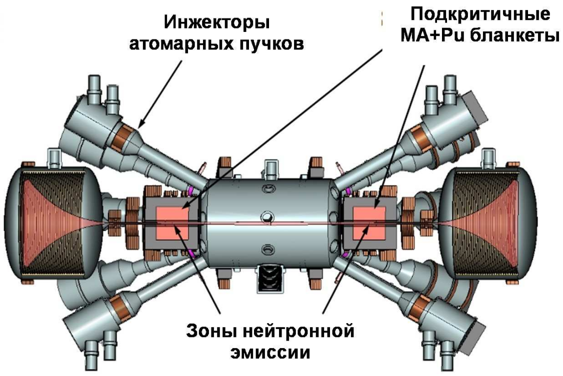


Рис. 1. Принципиальная схема гибридной системы

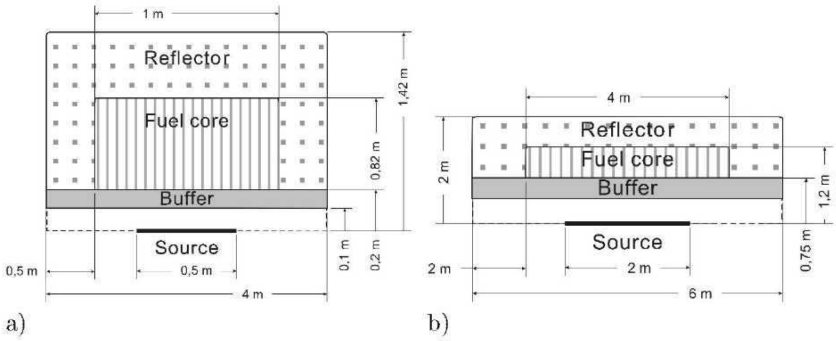


Рис. 2. Схема подкритичных бланкетов: a) исходный вариант, b) удлиненный вариант

рой популяции (bounce-колебания) с адиабатически сохраняющимся магнитным моментом частиц. В результате данного эффекта возникают так называемые точки остановки, в которых продольная скорость движения частиц равна нулю, а их плотность максимальна. Так как эмиссия нейтронов происходит преимущественно благодаря ионам быстрой компоненты, наибольшая мощность эмиссии достигается именно в точках остановки.

Вокруг точек остановки предполагается размещение топливных бланкетов. Для проведения оптимизации в качестве первого шага было предложено использовать шаблон на основе гомогенизированного топливного бланкета системы EFIT [2] (модель бланкета представлена на рис. 2). В качестве наполнителя топливной зоны использовались нитриды минорных актинидов и плутония. В данной системе теплоноситель представляет собой свинцово-висмутовый эвтетик, а рефлектор — гомогенизованную смесь конструкционных элементов и теплоносителя. При нейтронно-физичееких расчетах источник был представлен струной, и предполагалось, что мощность нейтронной эмиссии неизменна вдоль оси топливной зоны. Данное упрощение справедливо при масштабах топливной сборки, малых относительно размеров всей установки.

2. Инструменты моделирования

2.1. Расчет динамики плазмы и уровня нейтронной эмиссии источника

Для расчета параметров источника нейтронов на основе ГДЛ был разработан ноль-мерный код расчета динамики плазмы GENESYS (GENeral Evaluation SYStem). Ноль-мерность кода предполагает, что времена процессов, описываемых нами, превосходят времена пространственного выравнивания температур и плотностей теплой плазмы.

Динамика горячей компоненты в GENESYS описывается уравнением Фоккера–Планка с рассмотрением отдельной функции распределения для частиц дейтерия и трития. Параметрами распределения быстрых ионов являются энергия и время. Угловое распределение считается комбинацией гауссовых профилей с переменной во времени амплитудой (количество частиц $N(t,E)$) и угловой шириной (разброс питч-углов $\Delta\theta(t,E)$) с условием зануления амплитуды на границах конуса потерь. Предполагается, что при инжекции в плазму попадают моноэнергетичные атомы с малым угловым разбросом по питч-углам.

При расчете параметров теплой плазмы учитываются процессы энергообмена с горячей плазмой за счет кулоновских столкновений, продольные потери частиц и энергии в бесстолкновительном режиме течения через пробку и поддув холодного газа в камеру для поддержания уровня плотности теплой плазмы. Для достижения большей точности вычислений в модели предусмотрено разделение объема плазмы на периферийную и центральную области, последняя из которых совпадает с областью движения быстрых частиц между точками остановки. Данное разделение позволяет моделировать вытеснение ионов теплой компоненты из центра ловушки при высокой плотности быстрых частиц. Учет данного эффекта необходим при моделировании сжатия поперечного распределения плотности быстрых ионов.

Также код GENESYS оснащен дополнительным модулем расчета погонной нейтронной эмиссии. Данный расчет предполагает бесстолкновительность движения быстрых частиц вдоль оси ловушки (т.е. данный блок кода является статическим, а времена рассматриваемых процессов существенно меньше времен изменения функции распределения за счет кулоновских взаимодействий). Результатом проводимых вычислений является мощность нейтронной эмиссии в заданной точке вдоль оси. Моделирование проводится с помощью метода Монте-Карло. В качестве верификации разработанного кода было проведено сравнение результатов его работы с данными, полученными на ряде экспериментов ГДЛ, и приведенных в работах [4,6]. В частности, на рис. 3 приведены результаты расчета мощности нейтронной эмиссии в эксперименте с D–D смесью. Как видно из приведенного графика, результаты кода демонстрируют удовлетворительную сходимость с экспериментальными данными. Также соответствие расчета и эксперимента было продемонстрировано для энергетического и углового распределения быстрых частиц, а также электронной температуры.

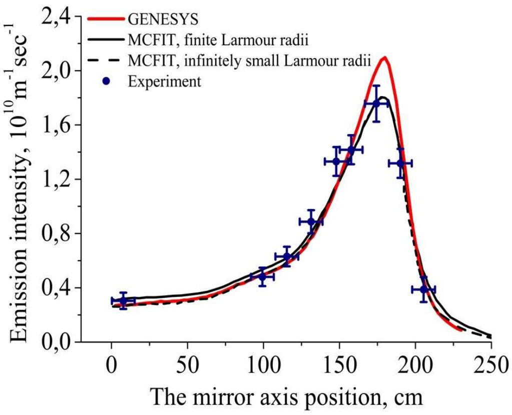


Рис. 3. Интенсивность нейтронной эмиссии в зависимости от координаты вдоль оси ловушки

2.2. Моделирование переноса нейтронов

Нейтронно-физические процессы в бланкете подкритичной системы моделировались с помощью кода NMC. Одним из основных преимуществ данного кода является его реализация в рамках объектно-ориентированного подхода, которая позволила создать код в виде совокупности объектов, выполняющих различные этапы моделирования, имеющих унифицированный интерфейс и взаимозаменяемых в рамках собственной функциональности. В коде реализована возможность расширения функциональности пользователем путем внедрения собственных программных объектов.

NMC является статическим кодом, использующим метод Монте-Карло для расчета нейтронных параметров рассматриваемой системы. Таким образом, распределение нейтронного поля заданной системы определяется с помощью решения уравнения переноса прямым моделированием траекторий частиц. Для расчета было использовано групповое приближение. Подготовка групповых сечений велась с помощью процессингового кода PREPRO. Исходные данные были взяты из библиотеки оцененных нейтронных данных ENDF/B-VII. Работа кода была верифицирована на ряде тестовых сборок библиотеки критических экспериментов [5]. Результаты верификации приведены на рис. 4. Как видно из графика результаты находятся в приемлемом согласии с результатами других расчетов и экспериментальными данными для сборок с быстрым спектром.

3. Результаты оптимизации и их обсуждение

3.1. Максимизация интегральной нейтронной эмиссии источника

Оптимизация параметров зоны эмиссии проводилась для одного из последних опубликованных вариантов прототипа нейтронного источника [6].

Оптимизация мощности нейтронной эмиссии предполагала изменение профиля магнитного поля источника при сохранении неизменными остальных входных параметров. Значение магнитного поля в пробке было фиксировано, а длина области со значением магнитного поля, близкого к значению в точке остановки, варьировалась. Стоит отметить,

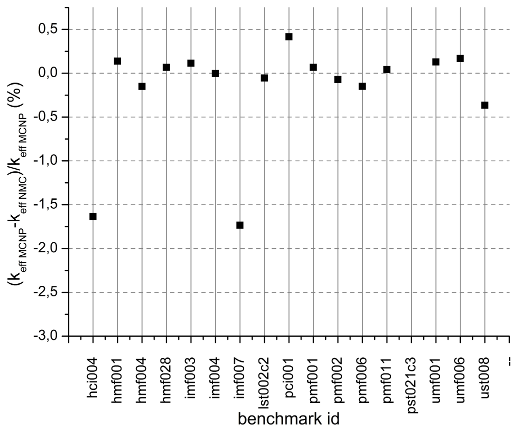


Рис. 4. Результаты верификации кода NMC

что представленная конфигурация магнитного поля отличается от конфигурации, которую необходимо создавать магнитной системой в экспериментальной установке, так как в модели GENESYS не учитываются влияние быстрых частиц на профиль магнитного поля и требование параксиальности поля. При оптимизации зоны эмиссии были рассмотрены две существенно отличные друг от друга версии данного источника, условно обозначаемые как «оптимистичная» и «пессимистичная». Оптимистичная версия предполагает наличие эффекта поперечного пинчевания плотности быстрых частиц. В пессимистичном же случае распределение плотности быстрых частиц и фоновой плазмы совпадали.

В результате проведенной работы была рассчитана зависимость мощности нейтронной эмиссии от длины тестовой зоны для оптимистичного и пессимистичного вариантов работы нейтронного источника в случаях с одно- и двухзонной конфигурациями. Результаты расчетов приведены на рис. 5. Отметим два существенных момента, следующих из проведенных расчетов.

Во-первых, поперечное пинчевание быстрых частиц приводит к повышению уровня нейтронной эмиссии в тестовой зоне приблизительно в 2 раза. Данный эффект является прямым следствием повышения плотности быстрых ионов и уменьшения области их движения. При заданной напряженности магнитного поля мы можем пренебречь эффектом конечных ларморовских радиусов быстрых частиц, неучитываемым в модели GENESYS. Другим важным эффектом является появление оптимума по длине эмиссионной зоны. Данный эффект объясняется тем, что высокая плотность быстрых частиц приводит к повышению концентрации электронов в центральной части ловушки и соответствующему усилению электронного дрэга. В то же время, снижение плотности быстрых частиц при удлинении зоны эмиссии приводит к уменьшению количества термоядерных взаимодействий. В результате конкуренции двух описанных процессов возникает оптимум мощности нейтронного потока при определенном значении длины зоны эмиссии.

Таблица 1. Пример таблицы (Результаты сравнения для бланкетов, представленных на рис. 2)

Параметр	**Случай A**	**Случай B**
H	0 см	10 см
k_eff(MCNP)	0,950	0,958
k_eff(NMC)	0,953	0,961
M_s(MCNP)	34,75	44,38
M_s(NMC)	37,1	51,3

3.2. Влияние толщины буфера на мультипликативность реактора

С помощью кода NMC был проведен расчет коэффициента умножения и коэффициента критичности для топливного бланкета описанного в пункте 1.1 в двух различных геометрических конфигурациях рис. 2. Основной целью расчета являлась оптимизация коэффициента умножения за счет изменения толщины буферной зоны при фиксированной критичности бланкета. Вариант, представленный на рисунке 2(a), был использован для дополнительной валидации работы кода NMC и сравнения с данными, ранее описанными в работе [7]. Результаты выполненных расчетов приведены в табл. 1, где H — толщина буффера; k_{eff} — коэффициент размножения; M_s — мультипликативность.

Для дальнейших расчетов была использована модифицированная версия бланкета, приведенная на рис. 2(b). Его использование обусловлено улучшенной экспозицией топлива по отношению к источнику нейтронов и увеличением характерной расчетной длины самого источника. Толщина буферной зоны при моделировании менялась в диапазоне от 0 до 50 см, а топливная зона конфигурировалась таким образом, чтобы при заданной толщине буфера коэффициент критичности составлял $k_{eff} = 0,95$. Результаты расчета коэффициента умножения при фиксированной критичности приведены на рис. 6. Из данного рисунка видно, что увеличение толщины буферной зоны ведет к снижению коэффициента умножения. Данный эффект обусловлен переводом нейтронов в буфере в более низкую энергетическую область (~ 1 МэВ) за счет реакций $(n,\, 2n)$ в свинце. Это вызывает рост отношения сечения захвата к сечению деления в минор-

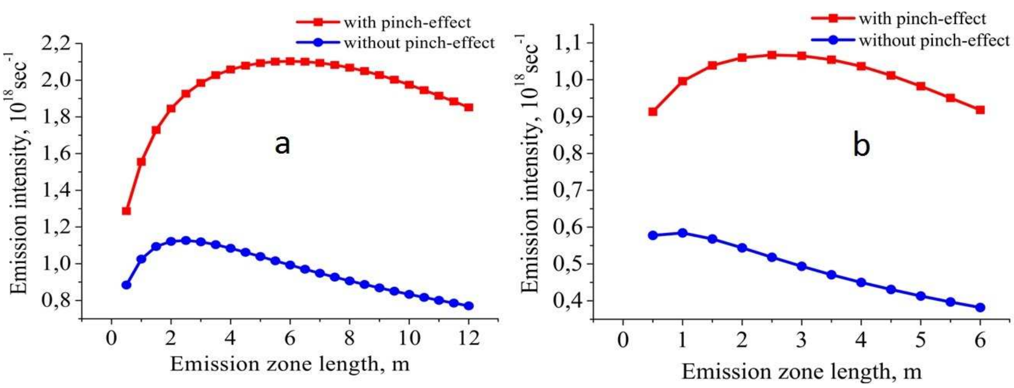


Рис. 5. Интенсивность эмиссии для источника однозонной конфигурации (a) и источника с центральносимметричным магнитным полем (b)

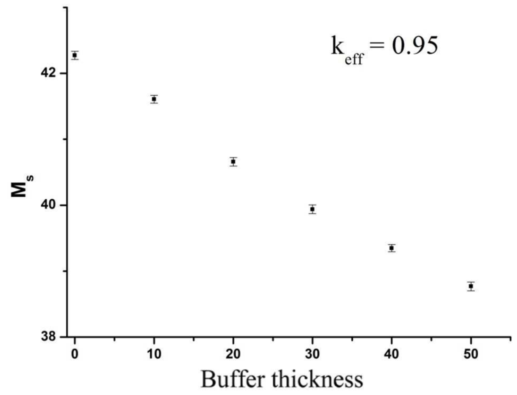


Рис. 6. Зависимость мультипликативности от толщины буфера

ных актинидах и соответствующее снижение коэффициента умножения.

4. Заключение

В результате проделанной работы был определен уровень нейтронной эмиссии для конфигурации нейтронного источника на основе ГДЛ, параметры которого можно считать близкими к предельным. Мощность нейтронной эмиссии имеет пологий максимум по длине излучающей зоны, обусловленный конкуренцией процессов электронного дрэга и изменением плотности быстрых частиц. К примеру, при оптимистичном сценарии работы источника двухзонной конфигурации максимальная мощность достигается при длине эмиссионной зоны 2–3 метра и составляет $1,14 * 10^{18}$. В случае пессимистичного сценария максимум наблюдается в областях малых длин зоны, так как критическое значение плотности достигается только при существенном уменьшении длины области движения быстрых частиц. Помимо этого, была расчитана зависимость интегральных коэффициентов подкритичного бланкета гибридной системы от толщины буферной зоны, состоящей из свинцово-висмутового эвтетика, при облучении данной сборки нейтронами с энергией 14,1 МэВ. В результате расчета было установлено, что максимальное значение коэффициента умножения достигается при удалении буферной зоны из топливного бланкета.

Список литературы

[1] Bagryansky P.A. et al. Gas dynamic trap as high power 14 MeV neutron source Fusion Engineering and design, 2004, vol. 70, p. 13–33.

[2] Aliberti G., Palmiotti G., Salvatores M., Stenberg C.G. Impact of Nuclear Data Uncertainties on Transmutation of Actinides in Accelerator-Driven Assemblies Nuclear Science and Engineering, 2004, 146, p. 13–50.

[3] Anikeev A.V. et al. Fast ion relaxation and confinement in the gas dynamic trap Nuclear Fusion, 2000, vol. 40, p. 753–765.

[4] Maximov V.V. et al. Spatial profiles of fusion product flux in the gas dynamic trap with deuterium neutral beam injection Nuclear Fusion, 2004, vol. 44, p. 542–547.

[5] International handbook of evaluated critieality safety benchmark experiments, NEANSCDOC9503, OECD, September 2008 edition.

[6] Anikeev A.V., Dagan R., Fischer U. Numerical model of the fusion-fission hybrid system based on gas dynamic trap for transmutation of radioactive wastes Transactions of fusion science and technology, 2011, vol. 59, p. 162–165.

[7] Noack K., Rogov A., Anikeev A.V., Ivanov A.A., Kruglyakov E.P., Tsidulko Yu.A. The GDT-based fusion neutron source as driver of a minor actinides burner Annals of Nuclear Energy, 2008, 35, p. 1216–1222.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529:534.2

Распространение и взаимодействие с преградами акустических волн в парогазожидкостных средах[1]

Никифоров А.А.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Теоретически исследовано прохождение и отражение акустических волн из слоя пузырьковой среды в жидкость, с последующим отражением возникших волн от жесткой стенки. Определены амплитуды возникающих волн через амплитуду исходной волны, получены аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения волн через границы раздела.

1. Введение

В настоящее время значительный интерес представляют исследования волновой динамики дисперсных сред. Эффекты дисперсии и диссипации акустических волн в пузырьковых жидкостях изучаются достаточно давно и имеют широкий спектр задач: диагностика парогазовые пузырьков; обнаружение областей жидкости, содержащей такие пузырьки; использование пузырьковых экранов для ослабления акустических сигналов. Знание закономерностей прохождения и отражения импульсов давления в жидкости с парогазовыми пузырьками также необходимо для решения этих задач. Важно исследовать взаимодействие импульсов давления с твердой стенкой и границей раздела сред в пузырьковом слое.

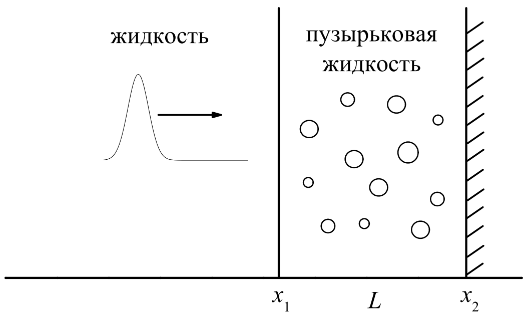


Рис. 1. Схема задачи

2. Постановка задачи, условия на границах раздела сред

Рассмотрим эволюцию акустических волн давления в слое жидкости с парогазовыми пузырьками при их нормальном отражении от жесткой стенки и последующим прохождением и отражением на границе раздела между жидкостью и пузырьковым слоем. Как схематически показано на рис. 1, имеется жесткая стенка ($x = x_2$); слой пузырьковой жидкости ($x_1 < x < x_2$), представляющий собой двухфракционную смесь жидкости с парогазовыми пузырьками; область $x < x_1$ заполнена той же жидкостью без пузырьков. Для решения задачи используется линеаризованная система уравнений, описывающая движение двухфракционной смеси жидкости с парогазовыми и газовыми пузырьками различных размеров при наличии фазовых превращений [1, 2]. Движение жидкости перед пузырьковым слоем рассматривается в акустическом приближении.

Если представить $v = \operatorname{grad}\varphi$, где $\varphi = A\exp[i(K_*x-\omega t)]$, то из [2] можно записать выражения для скорости движения и давления в несущей

[1]Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ (грант НШ-834.2012.1) по программе Президиума РАН № 23П, при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10–01–00098) и Министерства образования и науки РФ (государственный контракт № 14.740.11.0351).

фазе пузырьковой жидкости в виде:

$$v = iK_*\varphi,$$
$$p_1' = i\omega\rho_0\varphi,$$
$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10}^\circ + \alpha_{20}^{\mathrm{I}}(k_V^{\mathrm{I}}\rho_{V0}^\circ + k_G^{\mathrm{I}}\rho_{G0}^{\circ\mathrm{I}}) +$$
$$+\alpha_{20}^{\mathrm{II}}(k_V^{\mathrm{II}}\rho_{V0}^\circ + k_G^{\mathrm{II}}\rho_{G0}^{\circ\mathrm{II}}),$$
$$k_V^j + k_G^j = 1,\ (i = \mathrm{I}, \mathrm{II}),\ \alpha_1 + \alpha_2^{\mathrm{I}} + \alpha_2^{\mathrm{II}} = 1.$$

Здесь ρ°, ρ — истинная и средняя плотности; α — объемное содержание; k_i — массовая концентрация i-го компонента дисперсной фазы; ω — частота колебаний. Нижние индексы 1 и 2 относятся к параметрам жидкой и газовой фаз, индексы V и G — соответственно к паровому и газовому компонентам фракций, штрихи обозначают возмущения параметров; индекс 0 — начальное невозмущенное состояние, верхний индекс I относится к параметрам паровоздушных пузырьков; индекс II — к параметрам пузырьков инертного газа с водяным паром.

3. Прохождение и отражение волн на границе «пузырьковая жидкость–жидкость» и на жесткой стенке

Для описания динамики акустических волн в слое пузырьковой жидкости необходимо сформулировать условия на границе раздела «пузырьковая жидкость–жидкость» ($x = x_1$) и на жесткой стенке ($x = x_2$).

На границе раздела «пузырьковая жидкость–жидкость» волна частично отражается и частично проходит в жидкость. Следовательно, можем записать:

$S_1(x,t) = A\exp[i(K_*x - \omega t)] + A^{(1)}\exp[i(-K_*x - \omega t)]$ — падающая и отраженная волны в пузырьковом слое;

$S^{(2)}(x,t) = A^{(2)}\exp[i(K^{(2)}x - \omega t)]$ — прошедшая волна в жидкости.

Здесь $A, A^{(1)}, A^{(2)}$ соответственно амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн; K_* — комплексное волновое число в пузырьковом слое; $K^{(2)} = \omega/C_1$ — волновое число в чистой жидкости (C_1 — скорость звука в жидкости).

Чтобы определить соотношения между амплитудами трех волн, определяющих пропускную и отражательную способности границы раздела двух сред, запишем условия равенства давлений и скоростей по обе стороны границы раздела при $x = x_1$ [3, 4]:

$$v + v^{(1)} = v^{(2)},\ p_1 + p_1^{(1)} = p_1^{(2)}. \qquad (1)$$

Пусть $\varphi = A\exp[i(K_*x - \omega t)]$, $\varphi^{(1)} = A^{(1)}\exp[i(-K_*x - \omega t)]$ — соответственно потенциалы скорости падающей и отраженной волн в пузырьковом слое; $\varphi^{(2)} = A^{(2)}\exp[i(K^{(2)}x - \omega t)]$ — потенциал скорости прошедшей волны в жидкости.

Тогда скорости и давления всех волн выражаются следующим образом:

$$v = iK_*A\exp[i(K_*x - \omega t)],$$
$$v^{(1)} = -iK_*A^{(1)}\exp[i(-K_*x - \omega t)],$$

$$\begin{gathered} v^{(2)} = iK^{(2)}A^{(2)}\exp[i(K^{(2)}x - \omega t)], \\ p_1 = i\omega\rho_0 A\exp[i(K_*x - \omega t)], \\ p_1^{(1)} = i\omega\rho_0 A^{(1)}\exp[i(-K_*x - \omega t)], \\ p^{(2)} = i\omega\rho^{(2)}A^{(2)}\exp[i(K^{(2)}x - \omega t)]. \end{gathered} \qquad (2)$$

Подставляя выражения (2) в граничные условия (1), получаем два уравнения относительно амплитуд падающей (A), отраженной ($A^{(1)}$) и прошедшей ($A^{(2)}$) волн. Выражая $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ через A, получаем следующие формулы для коэффициентов отражения R и прохождения U:

$$R = \left.\frac{p_1^{(1)}}{p_1}\right|_{x=x_1} = \frac{\rho^{\circ(2)}K_* - \rho_0 K^{(2)}}{\rho^{\circ(2)}K_* + \rho_0 K^{(2)}}, \qquad (3)$$

$$U = \left.\frac{p_1^{(2)}}{p_1}\right|_{x=x_1} = \frac{2\rho^{\circ(2)}K_*}{\rho^{\circ(2)}K_* + \rho_0 K^{(2)}}. \qquad (4)$$

При отражении волны от жесткой стенки при $x = x_2$ должно выполняться условие равенства нулю суммарной нормальной скорости частиц границы [4]. Давление на границе оказывается удвоенным по сравнению с давлением в падающей волне, т.е. при падении волны отражается волна с той же амплитудой:

$$A\exp[i(K_*x_2 - \omega t)] = A^{(1)}\exp[i(-K_*x_2 - \omega t)]. \qquad (5)$$

4. Результаты

Импульс давления, создаваемый на границе пузырьковой среды, соответствующий бегущей вдоль оси x волне, задавался как функция времени $p(0,t) = \exp[-((t - t_*)/N)^2]$, где t_* — половина длительности импульса; N — параметр, определяющий ширину пика импульса. Расчеты проводились с помощью дисперсионного соотношения [2], по методике, изложенной в [5], при использовании подпрограмм быстрого преобразования Фурье [6].

С помощью обратного преобразования Фурье определяются комплексные амплитуды гармонических составляющих A исходного импульса давления. Затем, с использованием выражений (3)–(5), определяются амплитуды гармонических составляющих всех возникающих волн, и изменение давления как функции времени в каждой из волн в точке $x = x_a$ рассчитывается с помощью прямого преобразования Фурье. Сумма давлений во всех распространяющихся волнах дает зависимость от времени давления в заданной точке $x = x_a$.

В качестве примера ниже приводятся результаты расчетов для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками (радиуса $a^{\mathrm{I}} = 2{\cdot}10^{-3}$ м) и пузырьками гелия с водяным паром (радиуса $a^{\mathrm{II}} = 10^{-3}$ м) при следующих значениях параметров смеси: $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 327$ К, $\alpha_2^{\mathrm{I}} = \alpha_2^{\mathrm{II}} = 0.005$.

На рис. 2 показаны зависимости коэффициентов отражения и прохождения от частоты колебаний на границе «пузырьковая жидкость–жидкость». При низких частотах скорость звука в пузырьковой смеси стремится к равновесной скорости $C_e \sim 100$ м/с, которая существенно меньше скорости звука в чистой воде ($C_1 = 1500$ м/с), и значения коэффициента отражения близко к единице, отражение волн от границы раздела почти аналогично отражению от жесткой границы. С ростом частоты коэффициент отражения становится меньше и при высоких частотах, когда скорость звука в пузырьковой смеси стремится к замороженной скорости звука $C_f \approx C_1$, значение коэффициента отражения стремится к нулю.

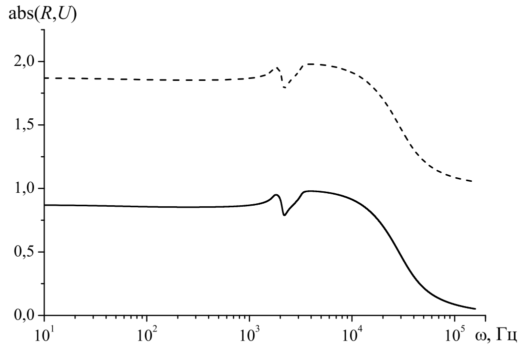


Рис. 2. Зависимость от частоты колебаний коэффициентов отражения (сплошная линия) и прохождения (штриховая линия) волн через границу «пузырьковая жидкость–жидкость»

На рис. 3 представлено изменение давления внутри пузырькового слоя и на жесткой стенке (толщина пузырькового слоя $L = 3$ м) на начальном (рис. 3(а)) и более длительном (рис. 3(б)) промежутке времени при распространении волн в слое пузырьковой жидкости и их взаимодействии с границей раздела «пузырьковая жидкость–жидкость» и жесткой стенкой. Кривая I описывает исходный импульс давления, создаваемый на границе пузырьковой среды, кривая II — изменение давления внутри пузырькового слоя (на расстоянии 1.5 м от границы раздела «пузырьковая жидкость–жидкость»), кривая III — изменение давления на жесткой стенке. Первый пик кривой давления II является результатом прохождения исходного возмущения давления в слой пузырьковой жидкости, последующие пики на кривой давления II представляют собой результат отражения и переотражения волн от жесткой стенки и от границы «пузырьковая жидкость–жидкость». На рис. 3(б) для более длительного отрезка времени показано, что давление на жесткой стенке снижается монотонно.

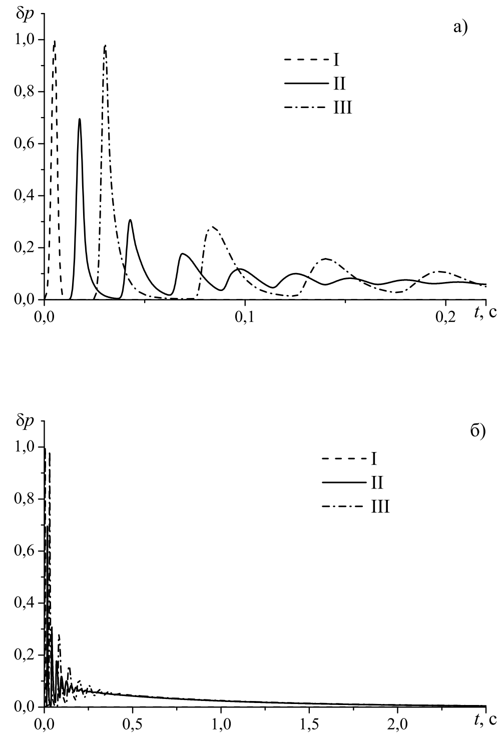


Рис. 3. Изменение давления внутри пузырькового слоя (кривая II) и на жесткой стенке (кривая III)

На рис. 4 представлено изменение давления на жесткой стенке при распространении волн в слое пузырьковой жидкости и их взаимодействии с гра-

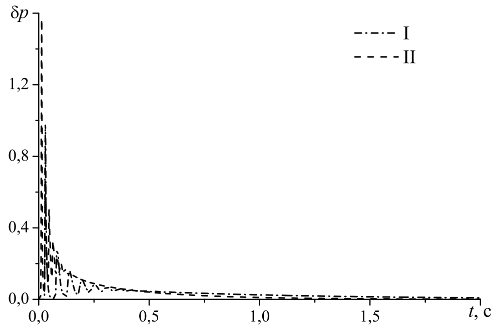


Рис. 4. Изменение давления на жесткой стенке при различной толщине пузырькового слоя L (кривая I — $L = 3$ м; кривая II — $L = 1$ м)

ницей раздела «пузырьковая жидкость–жидкость» и жесткой стенкой. Кривые I и II описывают изменение давления на жесткой стенке при различной толщине пузырькового слоя L ($L = 3$ м и $L = 1$ м соответственно). Для кривой II характерно наличие большего числа пиков давления вследствие более частого переотражения волн.

5. Выводы

Теоретически исследовано прохождение и отражение акустических волн из слоя пузырьковой среды в жидкость, с последующим отражением возникших волн от жесткой стенки. Определены амплитуды возникающих волн через амплитуду исходной волны, получены аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения волн через границы раздела. С использованием метода быстрого преобразования Фурье выполнены расчеты взаимодействия акустических волн с пузырьковым слоем и жесткой стенкой. Показано, что давление на жесткой стенке снижается монотонно.

Список литературы

[1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1,2. М.: Наука, 1987.

[2] Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в двухфракционных пузырьковых жидкостях с фазовыми превращениями // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, № 2. С. 269–273.

[3] Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высш. Школа, 1978. 449 с.

[4] Исакович М.А. Общая акустика. М: Наука, 1973. 496 с.

[5] Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1998. 153 с.

[6] Гапонов В.А. Пакет программ быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов. Препринт № 14–76. Новосибирск: Изд-во ИТФ СО АН СССР. 1976. 19 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529:532.51.013.4

Новые результаты в теории гидродинамической устойчивости двухфазных потоков[1]

Осипцов А.Н., Боронин С.А.

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

В рамках модели взаимопроникающих континуумов проведено исследование устойчивости плоскопараллельных потоков дисперсных сред в различных постановках, учитывающих новые факторы: рассогласование скоростей фаз и неоднородность распределения частиц в основном течении, нестоксовские компоненты межфазной силы, конечность объемной доли частиц. Получено, что учет этих факторов приводит к существенному изменению параметров наиболее неустойчивой моды и изменению критического числа Рейнольдса двухфазных потоков. Предложен метод исследования алгебраической (немодальной) неустойчивости и поиска оптимальных возмущений дисперсных течений. На примере неоднородного потока запыленного газа в плоском канале показано, что возмущения двухфазной среды, обладающие максимальной кинетической энергией на заданном конечном интервале времени, являются вытянутыми вдоль потока структурами («streaks»). По сравнению со случаем чистой жидкости, оптимальные возмущения запыленного газа обладают в несколько раз большей кинетической энергией уже при массовой концентрации частиц в десять процентов, что означает заметное усиление немодальной неустойчивости потока при наличии взвешенных включений.

1. Введение

До настоящего времени исследование устойчивости плоскопараллельных течений дисперсных сред проводилось в рамках классического линейного подхода. В этом подходе малое возмущение начального стационарного плоскопараллельного течения дисперсной среды разлагается в ряд по базисным функциям, являющимися бегущими вдоль оси течения плоскими волнами. Результатом исследования является анализ скорости нарастания наиболее неустойчивой волны, что позволяет сделать вывод об экспоненциальной устойчивости либо неустойчивости потока на больших временах. Впервые такая постановка для дисперсной среды была использована в [1]. В недавних работах авторов эта постановка была модифицирована с учетом рассогласования скоростей фаз и стратификации примеси в основном течении, подъемных сил, действующих на частицы в сдвиговом потоке, а также конечного объемного содержания дисперсной фазы. В рамках такого подхода проведено параметрическое исследование нейтральных кривых для ряда типичных течений (течение в канале, слое смешения, пограничном слое). Подробный обзор литературы по устойчивости дисперсных течений приведен в [2].

В настоящее время в литературе активно развивается немодальный метод исследования устойчивости стационарных потоков однофазных сред, также основанный на линейном приближении. Это связано с тем, что уже в 80-х годах прошлого века было показано, что энергия некоторых малых трехмерных возмущений сдвиговых потоков невязких несжимаемых сплошных сред нарастает линейно со временем независимо от параметров наиболее неустойчивой моды [3]. При наличии вязкости данный механизм нарастания возмущений, как правило, подавляется лишь на достаточно больших временах. Подобная (алгебраическая) неустойчивость связывается с формированием продольных полосчатых структур в различных потоках сплошных сред, наблюдаемых в экспериментах и предшествующих переходу к турбулентному режиму [4]. Физически алгебраическая неустойчивость появляется ввиду взаимодействия различных гармоник, являющихся базисными решениями соответствующего уравнения Орра–Зоммерфельда и уравнения для нормальной компоненты завихренности. Несмотря на то, что устойчивость потоков на больших временах определяется максимальной скоростью нарастания отдельных гармоник (классическая теория линейной устойчивости), на конечных временах сумма отдельных гармоник может создать возму-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-3582.2011.1) и РФФИ (№ 11–01–00483).

щение, энергия которого будет на несколько порядков больше начального значения (оптимальное возмущение). Подобный ограниченный во времени резкий рост возмущений может привести к возникновению вторичной (конечноамплитудной) неустойчивости и переходу к турбулентности. Таким образом, исследование экспоненциальной устойчивости потоков сплошных сред в линейном приближении необходимо дополнить анализом оптимальных трехмерных возмущений. Ранее подобный анализ проводился в литературе для нескольких типичных сдвиговых плоскопараллельных течений чистых жидкостей [5], но для дисперсных потоков такой анализ до сих пор не был выполнен.

2. Модель дисперсной среды

Для описания течений дисперсных сред использована модель взаимопроникающих континуумов [6] с модификациями, позволяющими учесть конечную объемную долю частиц [7]. Полная система уравнений в безразмерном виде такова:

$$\operatorname{div}((1-C)\mathbf{v} + C\mathbf{v}_s) = 0, \tag{1}$$

$$(1-C)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \eta C \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla_j \tau^{ij} \mathbf{e}_i, \tag{2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(C\mathbf{v}_s) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = \beta(\mathbf{v} - \mathbf{v_s})\left(1 + \sqrt{\frac{9C}{2}}\right), \tag{4}$$

$$\tau^{ij} = 2\mu(C)\left(e^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\operatorname{div}\mathbf{v}\right),$$
$$e^{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla^i v^j + \nabla^j v^i\right), \quad \mu = 1 + \frac{5}{2}C,$$
$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 L \rho^0}{\mu_0}, \quad \beta = \frac{6\pi\sigma\mu_0 L}{m U_0}, \quad \eta = \frac{\rho_s^0}{\rho^0}.$$

Здесь ρ^0 и ρ_s^0 — плотности материалов фаз; $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_s$ — скорости несущей и дисперсной фаз; C — объемная доля включений; σ, m — радиус и масса частиц; τ^{ij} — компоненты тензора вязких напряжений суспензии; e^{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций несущей фазы; μ_0, μ — вязкости несущей фазы и суспензии; δ^{ij} — символы Кронекера, $\mathbf{e}_i$ – базисные векторы. В качестве масштабов взяты характерная скорость U_0 и длина L течения. Безразмерные параметры задачи включают: Re — число Рейнольдса; β — параметр инерционности частиц (отношение масштаба длины задачи к стоксовской длине релаксации частиц); η— отношение плотностей материалов фаз.

Межфазное взаимодействие описывается силой Стокса с поправкой на объемную долю частиц в форме Бринкмана, выражение которой приведено в правой части уравнения (4). При течении двухфазной среды в канале остальные компоненты межфазной силы малы при условии [7]

$$\frac{\sigma}{L} \ll \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}.$$

Система уравнений, описывающая течение дисперсной среды с пренебрежимо малой объемной долей включений (запыленный газ), может быть получена из уравнений (1)–(4) предельным переходом $C \to 0$, $C\eta = O(1)$. В число определяющих параметров задачи вместо отношения плотностей фаз η войдет массовая концентрация включений $\alpha = n_0 m/\rho^0$, где n_0 — масштаб числовой концентрации частиц.

3. Модальная устойчивость плоскопараллельных течений дисперсных сред

Приведем основные результаты исследований классической устойчивости плоскопараллельных потоков двухфазных сред, полученных авторами в [2, 7–10]. Во всех случаях линеаризованная система уравнений движения дисперсной среды для возмущений в виде бегущих волн сведена к одному обыкновенному уравнению четвертого порядка для амплитуды возмущения функции тока (модифицированное уравнение Орра–Зоммерфельда). Для поиска собственного значения, соответствующего волне с наибольшим инкрементом нарастания, использован метод ортогонализации [11].

3.1. Устойчивость течения запыленного газа в вертикальном канале

Влияние рассогласования скоростей фаз в основном течении на устойчивость двухфазного потока рассмотрена на примере восходящего и нисходящего течений запыленного газа в вертикальном плоском канале с учетом силы тяжести, масштаб которой определяется числом Фруда $\mathrm{Fr} = U_0/\sqrt{gL}$. Скорость основного течения несущей фазы $U(y)$ описывается профилем Пуазейля, а скорость частиц $U_s(y)$ отличается на константу, соответствующую стоксовской скорости оседания одиночной частицы:

$$U(y) = 1 - y^2, \quad U_s(y) = U(y) + \frac{I}{\mathrm{Fr}^2 \beta}.$$

Параметр I задает направление потока: $I = 1$ — нисходящее течение, $I = -1$ — восходящее.

Проведено исследование зависимости инкремента нарастания наиболее неустойчивой моды от

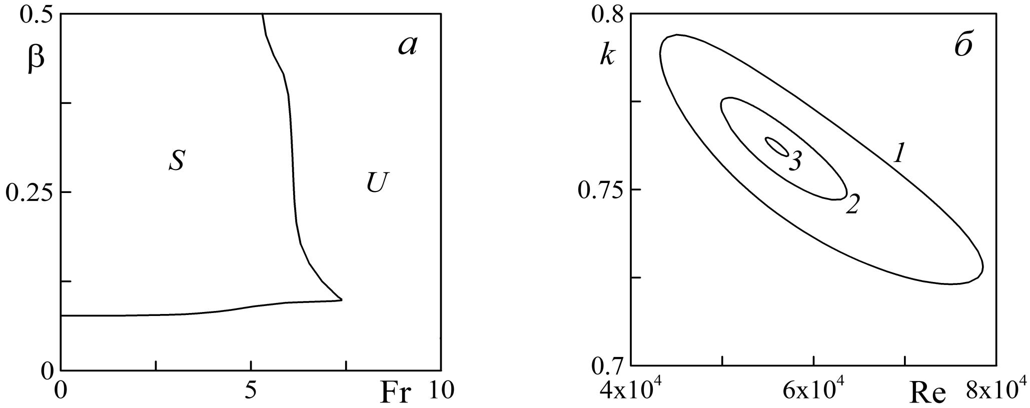


Рис. 1. Область устойчивости S и неустойчивости U в плоскости параметров (Fr, β) (*а*) и нейтральные кривые при $\beta = 0.09$, кривые *1–3* соответствуют $\mathrm{Fr} = 0.86, 0.84, 0.8362$ (*б*). $I = 1$, $\alpha = 0.1$

определяющих безразмерных параметров. Получено что, независимо от направления течения, в плоскости параметров (Fr, β) существует область, в которой течение устойчиво при любом значении числа Рейнольдса (рис. 1(а)). Нейтральные кривые замкнуты при любых значениях определяющих параметров, а при приближении к границе области неустойчивости они сжимаются в точку и исчезают (рис. 1(б)). Таким образом, наличие рассогласования скоростей фаз, вызванного гравитационным осаждением частиц, приводит к существенной стабилизации течения запыленного газа.

3.2. Устойчивость течения запыленного газа в пограничном слое

При течении запыленного газа в пограничном слое для корректного описания межфазного взаимодействия необходимо учитывать подъемную силу Сэфмана, вызванную неоднородностью скорости потока на масштабе частицы:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{j}\, 6.46\sigma^2 (u - u_s)\sqrt{\mu\rho\frac{\partial u}{\partial y}}\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Орт $\mathbf{j}$ перпендикулярен направлению потока. Рассмотрим течение запыленного газа в равновесной по скоростям области пограничного слоя, где скорости обеих фаз описываются модифицированным профилем Блазиуса

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_s} = \{U(\zeta), 0\},$$
$$U(\zeta) = U_B\left(\zeta(1+\alpha)^{1/2}\right), \quad \zeta = y^*\sqrt{\frac{U_0\rho}{\mu x^*}}.$$

Здесь $U_B(\cdot)$ — профиль Блазиуса; x^* и y^* — размерные величины.

В качестве масштаба длины рассматривается локальная толщина пограничного слоя $\delta(x) = \sqrt{\mu x / U_0 \rho}$, где x — некоторое значение продольной координаты. Тогда профиль скорости задается следующим соотношением:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_s} = \{U(y), 0\}, \ y = \frac{y^*}{\delta} = \zeta.$$

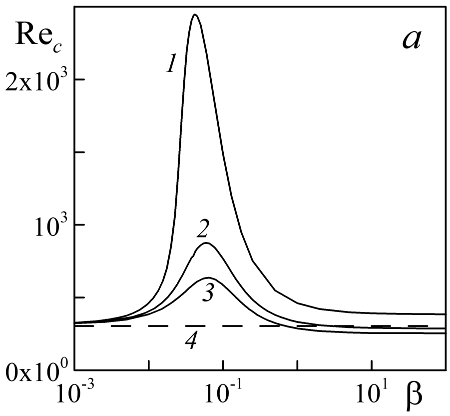
В зависимости от соотношений сил Стокса и Сэфмана в неоднородной по скоростям фаз области пограничного слоя, в рассматриваемой области течения формируются различные неоднородные профили концентрации частиц. Рассмотрены три модельных профиля концентрации включений

$$N_1 = 1 + \exp(-y), \ N_2 = 1, \ N_3 = 1 - 0.5\exp(-y).$$

Получено, что течение запыленного газа в пограничном слое наиболее устойчиво при накоплении дисперсной фазы по направлению к стенке (рис. 2(а), кривая *1*). Максимальное значение критического числа Рейнольдса достигается для частиц с длиной релаксации порядка локальной толщины пограничного слоя. Наличие подъемной силы приводит к дальнейшему усилению устойчивости течения для $\beta \sim 0.1$. Критическое число Рейнольдса возрастает нелинейно при увеличении α (рис. 2(б)).

3.3. Устойчивость плоских течений Пуазейля и Куэтта суспензии

При описании течений суспензий, в которых отношение плотностей фаз может изменяться в широком диапазоне, необходимо учитывать конечную объемную долю частиц C. В первом приближении по C течение дисперсной среды описывается уравнениями (1)–(4) [9]. Рассматривается устойчивость двух типов плоскопараллельных стационарных течений суспензии между двумя плоскими стенками: (а) напорное, при котором стенки не движутся друг относительно друга (течение Пуазейля), и (б) течение с нулевым перепадом давления вдоль



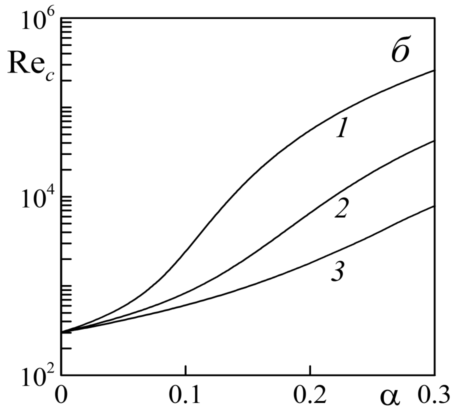


Рис. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_c от параметра инерционности частиц β при $\alpha = 0.1$ (*а*) и зависимость Re_c от массовой концентрации включений α при $\beta = 0.08$ (*б*). Кривые *1–3* соответствуют профилям концентрации N_1, N_2, N_3, кривая *4* соответствует течению чистой жидкости.

пластин, вызванное движением стенок друг относительно друга (течение Куэтта). В обоих случаях рассогласование скоростей фаз в основном течении отсутствует, профиль скорости неоднороден и задается аналитически:

$$C_0(y)=\begin{cases} C_1+(C_2-C_1)\exp\left(-\dfrac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}\right), & y\in[y_0,1],\\ C_2, & y\in[-y_0,y_0],\\ C_1+(C_2-C_1)\exp\left(-\dfrac{(y+y_0)^2}{\varepsilon^2}\right), & y\in[-1,-y_0].\end{cases}$$

Профили скорости для течений Пуазейля $U_1(y)$ и Куэтта $U_2(y)$ задаются дифференциальным уравнением с граничными условиями прилипания на твердых стенках:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\mu\left(C_0(y)\right)U'(y)\right)=0,$$
$$U_1(-1)=0,\ U_1(1)=0;\ U_2(-1)=-1,\ U_2(1)=1.$$

Получено, что для обоих типов течений неоднородное распределение включений в основном потоке двухфазной среды, вызывающее стратификацию вязкости суспензии, приводит к появлению неустойчивых мод уже при сравнительно малых значениях числа Рейнольдса (рис. 3(а)). В отличие от течения чистой жидкости, существуют неустойчивые волны двух типов: симметричные и антисимметричные (рис. 3(а), кривые *1*, *2*). При высоких значениях числа Рейнольдса указанная неустойчивость подавляется и устойчивость потока определяется волнами типа Толлмина–Шлихтинга (рис. 3(а), кривая *3*). Исследована зависимость устойчивости потока от параметров профиля концентрации частиц и получено, что волны с наибольшим инкрементом нарастания соответствуют случаю, когда частицы распределены внутри течения на некотором расстоянии от стенок $y_0 \sim 0.4$ (рис. 3(б)). Неустойчивость течений с «широкими» $y_0 > 0.9$ и «узкими» $y_0 < 0.15$ распределениями включений определяется волнами Толлмина–Шлихтинга, появляющимися при $\mathrm{Re} \sim 10^4$.

4. Немодальная устойчивость дисперсных потоков и оптимальные возмущения

Анализ гидродинамической неустойчивости дисперсных течений является неполным без анализа оптимальных возмущений [12]. В отличие от классического анализа устойчивости, для корректного исследования алгебраической неустойчивости необходимо найти систему трехмерных нормальных мод вида

$$Q(x,y,z)=q(y)\exp\{i(k_xx+k_zz)+\sigma t\}.$$

Здесь k_x, k_z — вещественные волновые числа; σ — комплексный инкремент нарастания мод. При подстановке указанных возмущений в линеаризованные уравнения движения запыленного газа получим два дифференциальных уравнения (модифицированные уравнения Орра–Зоммерфельда и Сквайра) и три алгебраических соотношения относительно амплитуд нормальных компонент скоростей и завихренностей фаз v, ω, v_s, ω_s и дивергенции скорости частиц I_s.

Общее решение сформулированной задачи на собственные значения для фиксированных значений безразмерных параметров строится в виде ряда нормальных мод:

$$\mathbf{Q}(x,y,z,t)=\sum_n\gamma_n\mathbf{q}_n(y)\exp\{i(k_xx+k_zz)+\sigma_nt\}. \quad (5)$$

Анализ алгебраической неустойчивости основан на поиске такой комбинации мод, которая бы в некотором смысле нарастала максимально к задан-

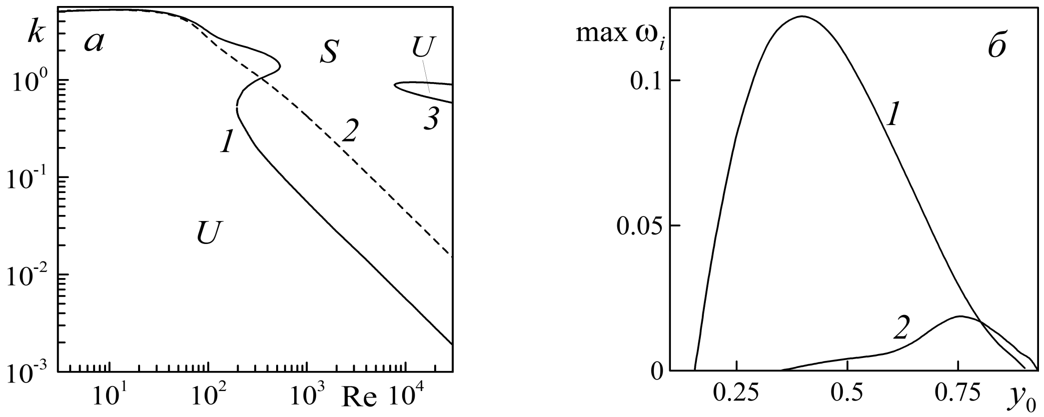


Рис. 3. Области устойчивости *'S'* и неустойчивости *'U'* в плоскости параметров (k, Re), кривые *1–2* соответствуют нейтральным кривым для симметричных и антисимметричных возмущений, *3* — нейтральная кривая для возмущений типа Толлмина–Шлихтинга (*а*); и зависимость максимального инкремента нарастания возмущений $\max\,\omega_i$ от ширины распределения частиц y_0, кривые *1*, *2* соответствуют $\mathrm{Re} = 10$ и 1000. (*б*). Течение Пуазейля $U_1(y)$, $\eta = 7$, $\beta = 5$, $C_1 = 0.05\%$, $C_2 = 5\%$, $\varepsilon = 0.1$, $y_0 = 0.5$

ному моменту времени. Соответствующее возмущение вида (5) принято называть оптимальным. Для оценки нарастания возмущений введем норму, являющуюся плотностью кинетической энергии возмущений несущей фазы [12]:

$$E(\gamma,t) = \frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{1}\left(v^* v + \frac{1}{k^2}\left(\frac{dv^*}{dy}\frac{dv}{dy} + \omega^*\omega\right)\right)dy. \quad (6)$$

Необходимо найти комбинацию нормальных мод (5) с вектором спектральной проекции γ, максимизирующую функционал энергии (6) при условии, что начальная энергия возмущения равна единице. Поиск нормальных мод исходной системы линейных уравнений и оптимизация функционала энергии были осуществлены на основе QR-алгоритма.

Проведено исследование оптимальных возмущений течения запыленного газа в плоском канале с неоднородным распределением частиц в виде двух пылевых слоев, расположенных на равных расстояниях от стенок:

$$N(y) = 0.5N_0(\delta,\xi)\left(\exp\left\{-\frac{(y-\xi)^2}{\delta^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(y+\xi)^2}{\delta^2}\right\}\right).$$

Здесь параметр $\xi \in [0,1]$ определяет положение слоев, а δ задает их ширину. При $\xi = 0$ имеем один слой в окрестности центральной плоскости течения. Коэффициент N_0 выбирается таким образом, чтобы сохранить постоянным общее число частиц в потоке при заданном значении средней массовой концентрации α.

Получено, что в широком диапазоне определяющих параметров энергия оптимальных возмущений течения запыленного газа выше, чем для аналогичного течения чистой жидкости. Вне зависимости от профиля концентрации частиц максимум плотности кинетической энергии оптимальных возмущений в пространстве волновых чисел (k_x,k_z) достигается для $k_x = 0$, $k_z \approx 2.0$, что соответствует полосчатым структурам, вытянутым в направлении потока. При однородной концентрации включений плотность кинетической энергии оптимальных возмущений больше таковой для случая течения чистой жидкости и увеличивается с ростом массовой концентрации включений по закону, близкому к $(1+\alpha)^2$. В случае неоднородного профиля концентрации частиц при фиксированной их средней массовой концентрации α наибольшее влияние на оптимальные возмущения оказывает распределение включений в области посередине между центральной осью и стенками течения $\xi \sim 0.5$ (рис. 4(а)). Уменьшение ширины пылевых слоев приводит к значительному увеличению энергии глобальных оптимальных возмущений. Характерный вид оптимальных возмущений продольной компоненты скорости несущей фазы u, подверженной наибольшему росту, представлен на рис. 4(б, в). Максимум энергии начальных оптимальных возмущений находится в окрестности пылевых слоев в отличие от случая чистой жидкости [5].

5. Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что новые факторы, не учитываемые ранее в литературе по неустойчивости дисперсных потоков, существенно изменяют границы режима устойчивости двухфазных течений. Так, рассогласование скоростей фаз, вызванное гравитационным осаждением частиц, приводит к полной

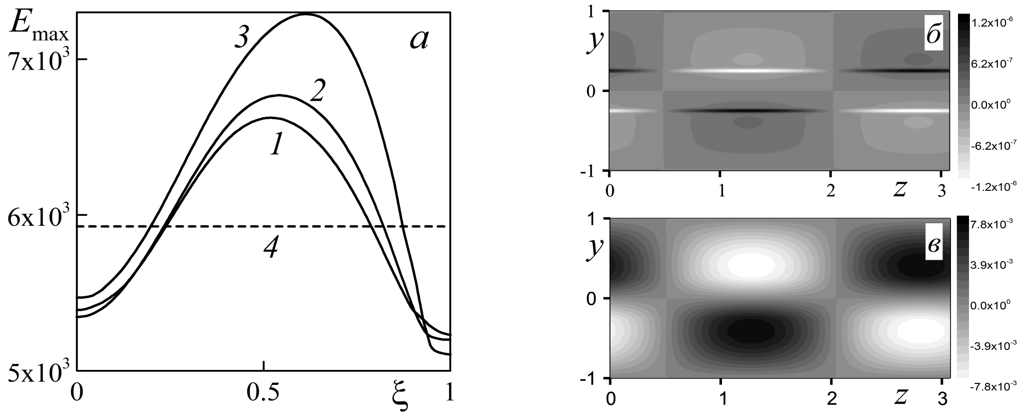


Рис. 4. Зависимость максимума плотности кинетической энергии оптимальных возмущений E_{max} от положения слоев дисперсной фазы ξ при $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.1$, 0.05, 0.02 (*1–3*), *4* – однородное распределение частиц (*а*), и распределение продольной компоненты скорости оптимальных возмущений несущей фазы u в плоскости (y, z) при $t = 0$ (*б*) и в момент достижения максимума плотности энергии (*в*) для $\xi = 0.25$, $\alpha = 0.2$. $k_x = 0$, $k_z = 2.044$, $\mathrm{Re} = 5000$, $\beta = 10$

стабилизации течения в широком диапазоне параметров, а стратифицированное течение суспензии с конечной объемной долей включений неустойчиво уже при малых значениях числа Рейнольдса. При течении запыленного газа в пограничном слое с учетом подъемных сил, действующих на частицы, существенная стабилизация течения имеет место в случае частиц с параметром инерционности порядка единицы. Классический анализ устойчивости двухфазных потоков дополнен анализом оптимальных возмущений. Показано, что энергия оптимальных возмущений в неоднородно запыленном течении Пуазейля существенно зависит от распределения частиц в основном течении и максимальна в случае, когда частицы сосредоточены посередине между стенками и плоскостью симметрии течения. Форма оптимальных возмущений соответствует «полосчатым структурам», как и в случае чистой жидкости.

Список литературы

[1] Saffman P.G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. Pt. 1. P. 120–128.

[2] Боронин С.А., Осипцов А.Н. Устойчивость течения дисперсной смеси в пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 76–87.

[3] Landahl M.L. A note on algebraic instability of inviscid parallel shear flows // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. P. 243–251.

[4] Alfredsson P.H., Bakchinov A.A., Kozlov V.V., Matsubara M. Laminar-turbulent transition at a high level of free stream turbulence // In: Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers. Eds. P.W. Duck, P. Hall. Dordrecht, Kluwer, 1996. P. 423–436.

[5] Butler K., Farrel B. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flows // Phys. Fluids A. 1992. V. 8. P. 1637–1650.

[6] Marble F.E. Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446.

[7] Боронин С.А. Исследование устойчивости течения суспензии в плоском канале с учетом конечной объемной доли частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 40–53.

[8] Боронин С.А. Устойчивость восходящего и нисходящего течений запыленного газа в канале с учетом силы тяжести // В сб.: Труды конференции-конкурса молодых ученых. Октябрь 2006 г. Под ред. Черного Г.Г., Самсонова В.А. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. С. 79–86.

[9] Боронин С.А. Гидродинамическая устойчивость стратифицированного течения суспензии в плоском канале // Доклады РАН. 2009. Т. 429, № 4. С. 477–480.

[10] Боронин С.А. Устойчивость плоского течения Куэтта дисперсной среды с конечной объемной долей частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 1. С. 85–94.

[11] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.

[12] Боронин С.А. Оптимальные возмущения течения запыленного газа в плоском канале с неоднородным распределением частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 74–88.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 536.24

Численное моделирование влияния пузырьков на течение и теплоперенос в опускном газожидкостном течении в трубе[1]

Пахомов М.А.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

В работе представлены результаты моделирования динамики течения, трения и теплообмена в опускном газожидкостном потоке в трубе. Математическая модель основана на использовании эйлерова описания для обеих фаз. Исследовано влияние изменения степени дисперсности газовой фазы на входе, объемного расходного газосодержания, начальной температуры жидкости и ее скорости на трение и теплоперенос в двухфазном потоке. Добавление газовой фазы вызывает возрастание теплообмена и трения на стенке, причем эти эффекты становятся более заметными с ростом газосодержания и диаметра пузырьков.

1. Введение

Двухфазные опускные пузырьковые потоки широко распространены в химической технологии, в теплоэнергетике, в атомной энергетике и т.д. Как показывают экспериментальные и численные исследования таких течений опускное пузырьковое течение имеет ряд особенностей по сравнению с восходящим.

Профиль локального газосодержания в опускном потоке характеризуется наличием области свободной от пузырьков около стенки, в турбулентном ядре течения он имеет практически постоянную величину концентрации газовых включений; в то время как в восходящем потоке наблюдается максимум газосодержания в пристенной части трубы. Наличие зоны практически свободной от пузырьков объясняется действием поперечных сил, таких как Сэффмена и турбофореза (турбулентного переноса). Скорость жидкости в опускном потоке может иметь локальный максимум, находящийся на некотором расстоянии от стенки канала. Интенсивность продольных пульсаций скорости жидкости в пристенной части трубы меньше соответствующей величины для однофазного потока, а в турбулентном ядре течения — наоборот. Подавление интенсивности пульсаций в пристенной области трубы объясняется тем, что пузырьки, покидая пристенную часть трубы, увеличивают толщину вязкого подслоя, и при этом разрушаются подковообразные турбулентные вихри. Генерация турбулентности жидкости в приосевой части трубы происходит из-за вихреобразования при обтекании сдвиговым потоком жидкости газовых включений.

В различных технических приложениях широко распространены газожидкостные потоки при наличии теплообмена между стенкой и двухфазной системой. Отметим, что пузырьковые вертикальные течения при наличии теплообмена между стенкой трубы и двухфазной системой исследованы в значительно меньшей степени, чем изотермические потоки. Выделим теоретические работы [1, 2, 7–9] и экспериментальные [3–6]. При этом [1,2] посвящены описанию как восходящих, так и нисходящих течений, и только в работе [5] излагаются экспериментальные результаты изучения теплообмена в опускных потоках. Во всех вышеупомянутых работах в основном проводились исследования коэффициента теплообмена в зависимости от концентрации пузырьков. Показаны значительное увеличение теплопереноса и изменение турбулентной структуры течения жидкости при добавлении газовых включений.

Отметим, что опускные пузырьковые течения при наличии теплообмена между стенкой и потоком изучены недостаточно полно. Это относится, прежде всего, к влиянию размера воздушных пузырьков и газосодержания на структуру течения, гидравлическое сопротивление и теплоперенос при вариации числа Рейнольдса, что является особенно важным в инженерных приложениях. Данное исследование посвящено моделированию влияния добавле-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 11–08–00112_а).

ния пузырьков размером $d = 0.5 - 2$ мм на структуру течения, поверхностное трение и теплоперенос в опускном турбулентном потоке жидкости в области небольших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = (0.5 - 7)10^4$, когда этот эффект проявляется в большей степени.

Целью данного исследования является проведение численного моделирования процессов гидродинамики и теплообмена, протекающих в опускных турбулентных газожидкостных течениях.

2. Описание математической модели

Численная модель основана на использовании эйлерова описания для жидкой и газовой фаз [12], что позволяет использовать примерно единый алгоритм численного решения при моделировании процессов переноса в обеих фазах. Применяется система осесимметричных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса для описания процессов переноса в обеих фазах [11]. Для замыкания системы уравнений осредненного движения использовалась низкорейнольдсовая $k - \tilde{\epsilon}$ модель турбулентности в модификации [13]. Авторами модель была модернизирована для описания динамики и теплопереноса в газожидкостном потоке с учетом силы аэродинамического сопротивления, эффекта присоединенной массы (силы Бассе), силы тяжести и Архимеда, силы Сэффмена, турбулентной гомогенной диффузии пузырьков и пристеночной силы. Используется модель переноса рейнольдсовых напряжений в дисперсной фазе по [12]. Уравнения пульсаций температуры и турбулентного потока теплоты пузырьков имеют вид [14]. Межфазная поверхность — это один из ключевых элементов для газожидкостных течений, т.к. обмен импульсом, массой и теплотой происходит через межфазную поверхность. В работе принимаются во внимание эффекты дробления и коагуляции пузырьков по уравнению баланса переноса пузырька с осредненным объемом v (УББПО) [15]. Первоначально модель [15] была разработана для пузырьковых колонн, но как показали наши расчеты, она может быть применена и для описания пузырьковых потоков при небольшой величине объемного расходного газосодержания $\beta \leqslant 0.1$. Модель получена из уравнения баланса популяции путем его упрощения и понижения порядка. Уравнение баланса популяции (УБП) используется при описании эволюции размера пузырьков в двухфазных течениях и пузырьковых колоннах. УБП состоит из уравнений переноса параметра функции плотности вероятности распределения пузырька f, м$^{-6}$.

По сути уравнение УБППОО аналогично известному методу расчета межфазной поверхности [16,17]. Оно служит для замены традиционной карты режимов газожидкостных течений. Введение понятия осредненного объема пузырька позволяет перейти от более сложного УБП к упрощенному УБППОО. Уравнение УБППОО записано с учетом конвективного переноса, расширения пузырька газа за счет изменения его плотности (например, за счет межфазного теплообмена) и совместных эффектов дробления и коалесценции. Данное уравнение удобно для численной реализации в эйлеровых двухжидкостных моделях [15].

Использованная в работе методика численного решения подробно описана в [11]. Была применена неравномерная расчетная сетка в аксиальном и радиальном направлениях (сгущение расчетных узлов в районе стенки и в начальных сечениях трубы). Диаметр трубы равнялся $2R = 20$ мм, а длина расчетной области $L = 1$ м. Расчеты выполнены на сетке, содержащей 200×100 контрольных объемов. Сгущение узлов проводилось в окрестности стенки и во входной части трубы. Дополнительно были проведены расчеты на сетке, содержащей 300×200 КО. Первая расчетная ячейка располагалась на расстоянии от стенки $y_+ = 0.4$. В вязком подслое для корректного расчета параметров двухфазного потока содержалось не менее 10 КО.

3. Результаты численного моделирования и их обсуждение

Диаметр дисперсной фазы во входном сечении варьировался в диапазоне $d_1 = 0 - 2$ мм и он сохранялся постоянным только во входном сечении трубы. Далее размер вниз по потоку пузырьков в данной работе менялся за счет коалесценции и дробления. Скорость потока жидкости $U_1 = 0.4 - 3$ м/с, что соответствовало числу Рейнольдса потока $\mathrm{Re} = U_1 2R/\nu = 6200 - 6 \times 10^4$. Объемное расходное газосодержание на входе изменялось в диапазоне $\beta = 0 - 0.1$.

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов коэффициента трения C_f в двухфазном потоке в зависимости от числа Рейнольдса при различных значениях β (рис. 1) и диаметра пузырька (рис. 2). Расчет коэффициента трения производился по следующей зависимости:

$$C_f = \frac{2\tau_W}{\rho U_1^2}.$$

Распределение относительной температуры жидкой фазы $\Theta = (T_W - T)/(T_W - T_C)$ по радиусу канала представлено на рис. 3, где T_W — температура стенки и T_C — температура жидкости на оси трубы. Возрастание начального диаметра пузырька приводит к увеличению заполненности профилей температуры в пристенной зоне, что

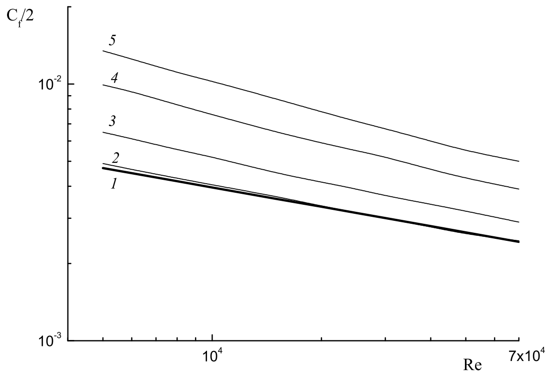


Рис. 1. Трение на стенке трубы как функция от числа Рейнольдса жидкой фазы при вариации объемного расходного газосодержания. *1* — профиль Блазиуса, *2* — $\beta = 0$ (однофазный поток), *3* — 0.01, *4* — 0.05, *5* — 0.1

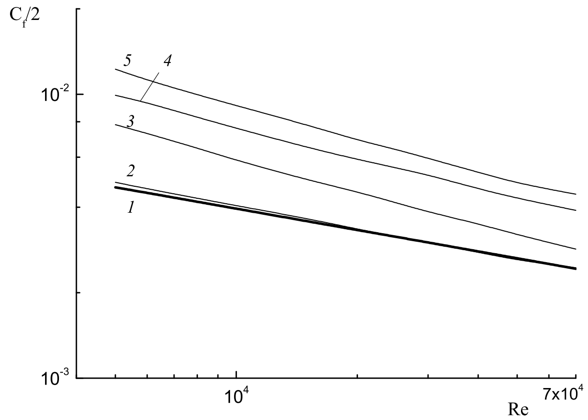


Рис. 2. Трение на стенке трубы как функция от числа Рейнольдса жидкой фазы при изменении начального диаметра пузырьков. *1* — профиль Блазиуса, *2* — $d_1 = 0.5$ мм, *3* — 1, *4* — 1.5, *5* — 2

говорит об увеличении интенсивности теплообмена между стенкой и двухфазным течением. При этом в ядре потока для двухфазного режима течения профили температуры качественно и количественно подобны однофазному течению жидкости. Для измерений [5] также является характерным увеличение заполненности профиля температуры в окрестности стенки в газожидкостном потоке по сравнению с однофазным.

На рис. 4 изображены данные по влиянию начального размера пузырьков на интенсификацию теплообмена $\mathtt{St}/\mathtt{St}_0$ в пузырьковом потоке, где $\mathtt{St}_0$ — число Стентона в однофазном потоке жидкости при одинаковом числе Рейнольдса. Увеличение объемного расходного газосодержания вызывает существенное возрастание интенсивности теплообмена между стенкой и двухфазным течением. Видно, что размер пузырька оказывает большое влияние на теплоперенос в газожидкостных потоках. Рост размера пузырьков приводит к увеличению параметра интенсификации теплообмена в опускном течении, тогда как в восходящем режиме течения согласно данным работы [10] наблюдается обратная картина.

Корреляция между параметрами интенсификации теплообмена $\mathtt{Nu}/\mathtt{Nu}_0$ и коэффициентом изменения поверхностного трения C_f/C_{f0} в газожидкостном турбулентном потоке по отношению к однофазному показана на рис. 5, где C_f — трение в однофазном течении жидкости. Зависимость между трением и теплообменом близка к линейной, особенно при $\beta > 0.02$.

Влияние газовых включений на изменение теплогидравлического параметра $\mathtt{St}/\mathtt{St}_0/(C_f/C_{f0})$ показано на рис. 5, где C_{f0} — трение в однофазном течении жидкости. Величина теплогидравлическо-

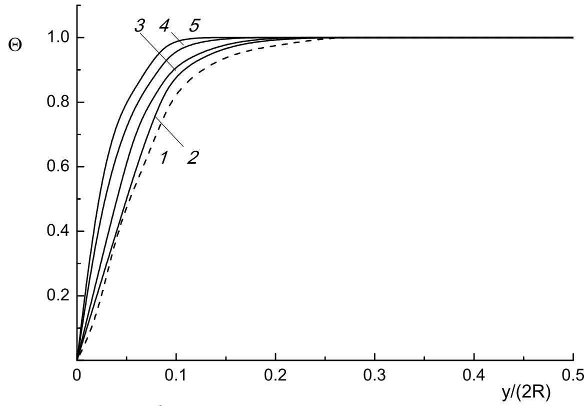


Рис. 3. Профили температуры жидкости по радиусу трубы при изменении размера пузырьков. *1* — однофазный поток ($d_1 = 0$ мм), *2* — $d_1 = 0.5$ мм, *3* — 1, *4* — 1.5, *5* — 2

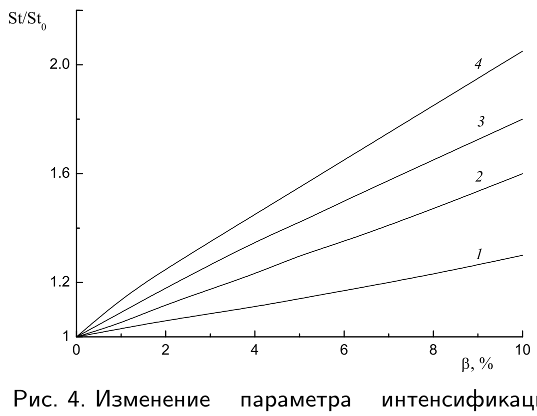


Рис. 4. Изменение параметра интенсификации теплообмена в зависимости от размера пузырьков. *1* — $d_1 = 0.5$ мм, *2* — 1, *3* — 1.5, *4* — 2

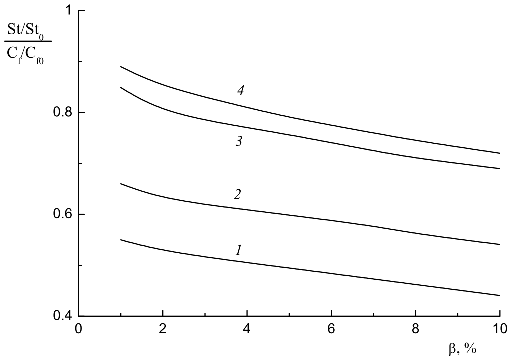


Рис. 5. Зависимость теплогидравлического параметра от концентрации пузырьков и их размера. *1* — $d_1 = 0.5$ мм, *2* — 1, *3* — 1.5, *4* — 2

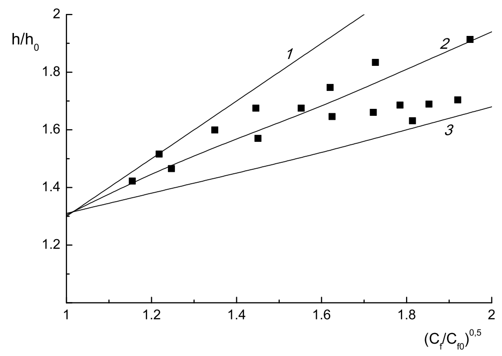


Рис. 6. Интенсификация теплообмена в опускном газожидкостном потоке. Символы — эксперимент [5], линии — расчет авторов. $U_1 = 0.5$ м/с, $\mathrm{Re} = 13500$, $d_1 = 3.5$ мм. *1* — $q_W = 22$ кВт/м^2; *2* — 18; *3* — 14

го параметра возрастает с увеличением размера пузырьков. Отметим, что трение в двухфазном потоке возрастает более интенсивно, чем теплоотдача и, соответственно, параметр теплогидравлической эффективности при всех режимах меньше единицы.

4. Сопоставление с данными других работ

Были проведены сопоставления с результатами измерений и численных расчетов монодисперсного двухфазного потока [18] по динамике опускного газожидкостного потока в трубе при отсутствии теплообмена между стенкой и двухфазным потоком. Сопоставления выполнялись по распределению скорости жидкости в двухфазном потоке, пульсациям скорости жидкости, локальным газосодержаниям и поверхностному трению. Было получено хорошее согласие между экспериментом и нашим расчететом.

На рис. 6. приведены результаты сопоставительного анализа случая опускного газожидкостного потока в обогреваемом цилиндрическом канале. Использовались эксперименты [5], где h_0 и C_{f0} — коэффициенты теплоотдачи и трения в однофазном потоке жидкости при прочих идентичных условиях. Необходимо отметить, что из данных работы [5] было известно, что измерения выполнялись при $q_W = \mathrm{const}$, но не была указана величина теплового потока, подводимого к стенке. На рис. 5 показаны результаты расчетов наиболее близких к данным измерений [5]. Также не был указан и размер пузырьков, но по сделанным в работе оценкам для случая $\beta = 0.1$, размер пузырьков составлял $d_1 = 3.5$ мм.

5. Заключение

Разработана эйлерова двухжидкостная модель для описания процессов переноса импульса, теплоты и массы в опускных газожидкостных течениях в трубах. Для моделирования турбулентности несущей среды используется модифицированная $k - \tilde{\epsilon}$ модель турбулентности.

Выполнен численный расчет движения опускного пузырькового потока в трубе. Структура течения и трение на стенке при добавлении пузырьков ведут себя аналогично, как и в газожидкостном потоке без теплообмена. Добавление газовой фазы вызывает возрастание теплообмена, причем этот эффект становится более заметным с ростом газосодержания. Возрастание размера пузырьков приводит к росту интенсивности теплообмена в двухфазном опускном потоке по сравнению с однофазным. Рост скорости потока приводит к уменьшению параметра интенсификации теплообмена.

Проведено сравнение с результатами эксперимента. Показано, что данная модель качественно и количественно правильно описывает локальные распределения пузырьков по сечению канала. Наблюдается неплохое согласие между результатами расчетов и измерений профиля локального газосодержания по сечению трубы и теплообмена. Таким образом, разработанная авторами эйлерова модель, в состоянии адекватно описывать сложные закономерности в распределении параметров газожидкостного потока.

Авторы выражают благодарность сотрудникам Института теплофизики СО РАН (Новосибирск) проф. В.И. Терехову, д.ф.-м.н. О.Н. Кашинскому и к.т.н. П.Д. Лобанову за внимание к работе и участие в обсуждении полученных численных результатов.

Список литературы

[1] Соколов В.Н., Доманский И.В., Давыдов И.В., Тишин В.Б. Гидравлическое сопротивление и теплообмен при восходящем и нисходящем течениях газо-жидкостной смесей в вертикальных трубах // ТОХТ. 1971. Т. 5, № 3. С. 394–400.

[2] Бобков В.П., Ибрагимов М.Х., Тычинский Н.А., Федотовский В.С. Диффузия тепла при турбулентном течении воды с пузырьками газа // ИФЖ. 1973. Т. 24, № 5. С. 781–789.

[3] Sekoguchi K., Nakazatomi M., Sato Y. Forced convective heat transfer in vertical air-water bubble flow // Bull. JSME. 1980. V. 23. P. 1625–1631.

[4] Ким И.Г. Исследование тепломассопереноса в псевдотурбулентном течении газожидкостных смесей в вертикальных трубах // Дисс. канд. техн. наук. Новосибирск: ИТ СО АН СССР. 1982. 201 с.

[5] Ганчев Б.Г., Пересадько В.Г. Процессы гидродинамики и теплообмена в опускных пузырьковых потоках // ИФЖ. 1985. Т. 49, № 2. С. 181–189.

[6] Горелик Р.С., Кашинский О.Н., Накоряков В.Е. Теплообмен от стенки к восходящему пузырьковому течению при малых скоростях жидкой фазы // ТВТ. 1989. Т. 27, № 2. С. 300–305.

[7] Sato Y., Sadatomi M., Sekoguchi K. Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow. I. Theory // Int. J. Multiphase Flow. 1981. V. 7. P. 167–177.

[8] Marie J.L. Modelling of the skin friction and heat transfer in turbulent two-component bubbly flow in pipes // Int. J. Multiphase Flow. 1987. V. 13. P. 309–325.

[9] Lahey R.T., Drew D.A. The analysis of two-phase flow and heat transfer using a multidimensional, four-field, two-fluid model // Nuclear Eng. Design. 2001. V. 204. P. 29–44.

[10] Mikielewicz D. Hydrodynamics and heat transfer in bubbly flow in the turbulent boundary layer // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 207–220.

[11] Пахомов М.А., Терехов В.И. Численное моделирование течения и теплопереноса в опускном турбулентном газожидкостном потоке в трубе // ТВТ. 2011. Т. 49, № 5. С. 737–744.

[12] Зайчик Л.И., Скибин А.П., Соловьев С.Л. Моделирование распределения пузырьков в турбулентной жидкости на основе диффузионно-инерционной модели // ТВТ. 2004. Т. 42, № 1. С. 111–120.

[13] Hwang C.B., Lin C.A. Improved low-Reynolds-number $k-\tilde{\epsilon}$ model based on direct simulation data // AIAA J. 1998. V. 36, № 1. P. 38–43.

[14] Terekhov V.I., Pakhomov M.A. Predictions of turbulent flow and heat transfer in gas-droplets flow downstream of a sudden pipe expansion // Int. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 4711–4721.

[15] Lehr F., Mewes D. A transport equation for the interfacial area density applied to bubble columns // Chem. Eng. Sci. 2001. V. 56. P. 1159–1166.

[16] Kocamustafaogullari G., Ishii M. Foundation of the interfacial area transport-equation and its closure relations // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 483–491.

[17] Hibiki T., Ishii M., Xiao Z. Axial interfacial area transport of vertical bubbly flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 2001. V. 44. P. 1869–1888.

[18] Kashinsky O.N., Lobanov P.D., Pakhomov M.A., Randin V.V., Terekhov V.I. Experimental and numerical study of downward bubbly flow in a pipe // Int. J. Heat Mass Transfer. 2006. V. 49. P. 3717–3727.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.546

О механизме процесса образования газогидрата как способе ликвидации аварий на подводных скважинах

Русинов А.А., Чиглинцева А.С.

Бирская государственная социально-педагогическая академия, Бирск

В данной работе предложена технологическая схема и построена соответствующая математическая модель, которая описывает физико-химические процессы образования гидрата в вертикальной скважине. Получены результаты, которые могут быть использованы при создании технологий по ликвидации утечек и выбросов газа из подводных источников, образованных в результате аварий на нефтегазовых скважинах.

1. Введение

В современном мире возникла новая проблема, связанная с техногенными авариями, — утечка газа из скважин в морских глубинах. Для устранения такого рода аварий различными нефтяными и газовыми компаниями, а также ведущими учеными предлагаются десятки, сотни и даже тысячи идей, многие из которых не находят применения. Поэтому на сегодняшний день остро стоит проблема разработки технологии, с помощью которой можно было бы эффективно и быстро устранить аварию такого рода.

В данной работе построена математическая модель, которая позволяет устранить место утечки с помощью образования гидрата в вертикальной скважине.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Согласно предлагаемой технологической схеме к месту утечки газа опускается металлическая конструкция, имеющая форму цилиндра, внутри которой имеется система алюминиевых решеток. В вертикальный канал снизу поступает вода. В результате этого происходит образование гидрата как в восходящем потоке, так и на алюминиевой решетке, что, как следствие, приведет к полному закрытию места утечки газа.

Ось z направим по оси цилиндрической конструкции вертикально вверх. Полагаем, что все основные параметры течения трехфазной системы, состоящей из частиц гидрата, воды и газа, однородны по сечению цилиндра. Пузырьки газа поднимаются вверх вдоль оси z, причем на поверхности этих пузырьков образуется гидрат.

Пусть n_g — число пузырьков в единице объема; w_g — скорость миграции пузырьков. Тогда уравнение сохранения числа пузырьков запишется в виде [1]:

$$\frac{d(Sn_g w_g)}{dz} = 0, \tag{1}$$

где S — площадь сечения реактора. Здесь и далее нижние индексы h, l, g относятся к параметрам гидрата, воды и газа, а sk — металлическая конструкция (скелет).

Запишем уравнения сохранения масс соответственно для воды, газа и гидрата:

$$M_l = S\rho_l^0 \alpha_l w_l = \mathrm{const}, \tag{2}$$

$$\frac{dM_g}{dz} = -(J_{gb}+J_{gsk}),\ J_{gb}=GJ_{hb},\ J_{gsk}=GJ_{hsk}, \tag{3}$$

$$\frac{dM_{hb}}{dz} = J_{hb}, \quad M_{hb} = S\rho_h^0 \alpha_{hb} w_h, \quad (w_h = w_g), \tag{4}$$

где M_i, ρ_i^0, α_i, w_i, $(i = h, l, g, hb)$ — массовые расходы, истинные плотности, объемные содержания и скорости фаз; J_{hb}, J_{hsk}, J_{gb}, J_{gsk} — интенсивности образования гидрата, расхода воды и газа. Приведенную систему уравнений необходимо дополнить следующими соотношениями:

$$\alpha_g = \frac{4}{3}\pi a_g^3 n_g, \quad \alpha_{hb} = \frac{4}{3}\pi (a_{hb}^3 - a_g^3) n_g, \tag{5}$$

$$\alpha_{sk} = \pi a_{sk}^3 l, \quad \alpha_{hsk} = \pi (a_{hsk}^2 - a_{sk}^2) l, \tag{6}$$

$$\alpha_l + \alpha_g + \alpha_{hb} + \alpha_{hsk} + \alpha_{sk} = 1, \tag{7}$$

где a_g — радиус газовых пузырьков; a_{hb} — радиус гидратных пузырьков; a_{sk} — радиус проволоки; a_{hsk} — радиус гидратного слоя на скелете; l —

удельный параметр, т.е. длина проволоки в единице объема.

Уравнение импульсов для двухфазного потока:

$$M_l\frac{dw_l}{dz} + M_{gh}\frac{dw_{gh}}{dz} = -S(1-\alpha_{sk}-\alpha_{skh})\frac{dp}{dz} - \\ -Sg(\rho_g^0\alpha_g + \rho_l^0\alpha_l + \rho_h^0\alpha_{hb}) - 2a_{hsk}Sl\rho_l^0\alpha_l\xi\frac{w_l^2}{2} - \\ -2a_{hsk}Sl(\rho_g^0\alpha_g + \rho_h^0\alpha_h)\xi\frac{w_g^2}{2}.$$

Пренебрегая инерционными эффектами, уравнение импульсов примет вид:

$$(1-\alpha_{sk}-\alpha_{skh})\frac{dp}{dz} = -g(\rho_g^0\alpha_g + \rho_l^0\alpha_l + \rho_h^0\alpha_{hb}) - \\ -2a_{hsk}l\rho_l^0\alpha_l\xi\frac{w_l^2}{2} - 2a_{hsk}lt(\rho_g^0\alpha_g + \rho_h^0\alpha_h)\xi\frac{w_g^2}{2}.$$

Приравнивая силу сопротивления (формула Стокса), действующую на гидратный пузырек со стороны жидкости, к разности силы тяжести и архимедовой силы, можно получить следующее выражение для скорости всплытия сферического гидратного пузырька относительно жидкости [2]:

$$w_{gl} = \frac{2t(a_g^3(\rho_h-\rho_g^0) + a_{hb}^3(\rho_l^0-\rho_h))}{9\mu_l a_{hb}}g. \qquad (8)$$

Тогда скорость миграции гидратного пузырька будет определяться формулой:

$$w_g = w_l + w_{gl}. \qquad (9)$$

Запишем уравнение баланса тепла, полагая, что температура газа и воды одинаковые ($T_g = T_l$), а температура гидрата на поверхности пузырьков определяется текущим давлением, соответствующим равновесной температуре образования гидрата $T_s(p) = T_{(h0)} + T_*\ln(p/p_{(h0)})$ [3]:

$$m_l c_l\frac{dT_l}{dz} = Q_{lb} + Q_{lsk}, \qquad (10)$$

$$Q_{lb} = Sn_g 4\pi a_{hb}^2 q_{lb}, \quad Q_{lsk} = S2\pi a_{hsk} l q_{lsk}. \qquad (11)$$

Запишем выражение для определения интенсивности образования гидрата на скелете и на пузырьке:

$$J_{hsk} = S2\pi a_{hsk} l j_{hsk}, \quad j_{hsk} = \frac{q_{ls}-q^*}{r_h}, \qquad (12)$$

$$J_{hb} = Sn_g 4\pi a_{hb}^2 j_{hb}, \quad j_{hb} = -\frac{q_{lb}}{r_h}, \qquad (13)$$

где r_h — удельная теплота образования гидрата.

3. Межфазный тепло- и массообмен

Интенсивность теплопередачи между жидкостью и поверхностью гидрата на скелете, учитывая поперечное обтекание цилиндрической трубы, примем в виде [4]:

$$q_{ls} = \frac{\mathrm{Nu}_{lsk}\lambda_l}{a_{hsk}}(T_l - T_{hs}), \\ \mathrm{Nu}_{lsk} = 0,57\sqrt{\mathrm{Re}_l}\,\mathrm{Pr}^{0,38}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_0}\right)^{0,25}. \qquad (14)$$

Здесь T_l, T_{hs} — соответственно температуры жидкости и поверхности гидрата на скелете.

Для теплового взаимодействия жидкости с поверхностью гидратного пузырька примем следующие соотношения [1]:

$$q_{lb} = \frac{Nu_{lb}\lambda_l}{2a_{hb}}(T_l - T_{hbs}), \\ \mathrm{Nu}_{lb} = 2 + 0,46\mathrm{Re}^{0,55}\,\mathrm{Pr}^{0,33}. \qquad (15)$$

где T_{hbs} — температура на поверхности гидратного пузырька.

Решая уравнения теплопроводности в слое гидрата, образованного на скелете, получим:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T_h}{\partial r}\right) = 0, \quad T_h = C_1\ln r + C_2, \qquad (16)$$

удовлетворяющие следующим граничным условиям на скелете и на поверхности гидрата:

$$T = T_{sk} \quad (r = a_{sk}), \qquad T = T_{hs} \quad (r = a_{hsk}). \qquad (17)$$

Тогда выражение для интенсивности теплового потока от поверхности гидрата к скелету примет вид:

$$q^* = -\lambda_h\frac{T_{hs}-T_{sk}}{a_{hsk}\ln(a_{sk}/a_{hsk})}, \qquad (18)$$

где λ_h — коэффициент теплопроводности гидрата.

При этом жидкость будем полагать несжимаемой и газ — калорически совершенным:

$$\rho_l^0 = \mathrm{const}, \quad p = \rho_g^0 R_g T_h. \qquad (19)$$

Скорость изменения радиуса гидрата на пузырьке и газового пузырька будем определять на основе уравнений [3]:

$$\frac{da_{hb}}{dt} = j_h\left(\frac{1}{\rho_h^0} - \frac{G}{\rho_g^0}\right), \quad \frac{da_g}{dt} = -j_h\frac{Ga_{hb}^2}{a_g^2\rho_g^0}. \qquad (20)$$

4. Заключение

Полученные в работе результаты расширяют теоретические представления о процессе образования газовых гидратов на морских глубинах, которые могут быть использованы при планировании и проведении комплекса инженерно-технологических мероприятий по ликвидации аварий на трубопроводах в условиях Мирового Океана.

Список литературы

[1] Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.

[2] Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов С.Д. Химическая гидродинамика: Справочное пособие. М.: Квантум, 1996. 336 с.

[3] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.А., Сыртланов В.Р. О возможности вымывания газа из газогидратного массива посредством циркуляции теплой воды // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. С. 100–111.

[4] Кислицын А.А. Основы теплофизики: Лекции и семинары. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2002. 152 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.546

Массо- и теплообмен в задаче распространения акустических волн в пористой среде[1]

Ситдикова Л.Ф., Дмитриев В.Л.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Биишевой, Стерлитамак

Работа посвящена теоретическому исследованию волновых процессов во влажных насыщенных газом пористых средах. Учитываются межфазные силы взаимодействия, теплообмен между скелетом пористой среды, жидкостью и газом, массообмен между жидкостью и газом; материал скелета пористой среды считается вязкоупругим, жидкость покрывает внутреннюю поверхность пор среды тонким равномерным слоем. Распространение акустических волн рассмотрено в двухскоростном приближении. Записана общая система уравнений и физических соотношений, описывающая распространение акустических волн во влажной пористой среде. Получено дисперсионное соотношение. Влияние теплообмена между фазами на распространение «быстрой» и «медленной» волн учитывается на основе уравнения теплопроводности.

1. Введение

Влияние тепло- и массообменных процессов между фазами на распространение малых возмущений рассмотрено в работе [1]. На основе дисперсионного соотношения автором исследована зависимость фазовой скорости, коэффициента затухания волны от параметров среды и возмущения. Показано, что тепловое взаимодействие фаз может оказывать существенное влияние на распространение акустических волн.

В сухой насыщенной газом пористой среде влияние теплообменных процессов на распространение волн исследовано в работе [2]. Указаны области частот, когда затухание волн в насыщенной газом пористой среде определяется в основном теплообменными процессами.

В работе [3] рассмотрена теория о распространении звука в тумане с учетом тепло- и массообмена. Показано, что при малых содержаниях дисперсной фазы зависимость коэффициента затухания от ее массовой концентрации может быть немонотонной, приведен критерий существования такой немонотонной зависимости.

В работе [4] получено дисперсионное соотношение для звуковых возмущений в смесях жидкости с парогазовыми пузырьками при учете межфазного диффузионного массообмена. Выполнены численные расчеты эволюции слабых импульсных возмущений давления разной геометрии в жидкостях с парогазовыми пузырьками при различных значениях параметров среды. Показано, что с ростом начальной концентрации пара в парогазовых пузырьках скорость распространения волн существенно уменьшается, а их затухание значительно возрастает.

На производствах, где возможна конденсация водяного пара на стенках пор материала, используемого в качестве звукоизоляции помещений, приходится сталкиваться с влажными пористыми средами. Образование водной пленки внутри пор среды может сильно повлиять на звукоизолирующие способности перегородки. Поэтому исследование распространения акустических волн во влажной насыщенной газом пористой среде представляет не только теоретический, но и практический интерес.

2. Основные уравнения

Рассмотрим влажную насыщенную газом пористую среду (например, губку). При описании распространения одномерных волн в такой среде примем следующие допущения. Будем считать, что значения длин рассматриваемых волн намного больше размеров пор, а скорости жидкой пленки и скелета при прохождении волны равны. В качестве характерных размеров среды примем средний радиус пор — a_0; среднюю толщину водной пленки — h_0 и среднюю полутолщину стенок пор — b_0 (рис. 1).

Запишем макроскопические линеаризованные уравнения массы для скелета пористой среды, жид-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11–01–97014р_поволжье_а), ГНТП РБ (программа № 3)

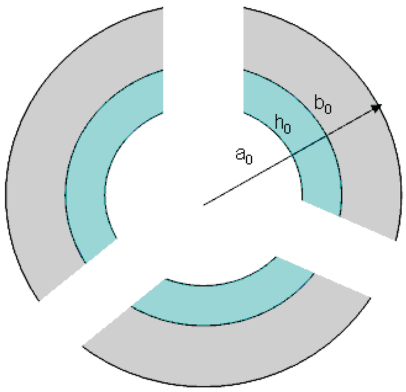


Рис. 1. Ячейка пористой среды

кости и газа в порах в двухскоростном приближении $\upsilon_l = \upsilon_s$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \rho_{l0}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x} = -I, \ \frac{\partial \rho_{\nu g}}{\partial t} + \rho_{\nu g0}\frac{\partial \upsilon_{\nu g}}{\partial x} = I, \\ \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_{s0}\frac{\partial \upsilon_s}{\partial x} = 0, \ \ I = 4\pi a_0^2 n_0 j, \\ \frac{\rho^0_{\nu g0} D}{1-g_0}\left(\frac{\partial g'}{\partial r}\right) = j,\end{gathered} \tag{1}$$

где ρ_j и υ_j — плотность и скорость j-й фазы; I и j — интенсивности фазовых переходов, отнесенные к единице объема и к единице площади поверхности раздела фаз.. Нижний индекс $j = s, l, vg$ параметрам скелета, жидкости и парогаза в порах соответственно. Дополнительным индексом (0) внизу снабжены параметры, соответствующие невозмущенному состоянию; верхний индекс (0) соответствует истинному значению параметра. Уравнение импульсов для всей системы в целом запишем в виде:

$$\begin{gathered}\rho_{vg0}\frac{\partial \upsilon_{vg}}{\partial t} + (\rho_{s0} + \rho_{l0})\frac{\partial \upsilon_s}{\partial t} = \alpha_{s0}\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} - \\ -\alpha_{vg0}\frac{\partial p_{vg}}{\partial x} - \alpha_{l0}\frac{\partial p_l}{\partial x}.\end{gathered} \tag{2}$$

Дополнительным индексом (0) внизу снабжены параметры, соответствующие невозмущенному состоянию, а параметры без этого индекса выражают малые возмущения параметров от равновесного значения; верхний индекс (0) соответствует истинному значению параметра; ρ_j,ρ_j^0, υ, p_j, α_j — средняя по смеси (объему) и средняя по фазе плотности, скорость, давления, объемные содержания. Примем для скелета модель Максвелла, тогда имеем:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E_s}\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + \frac{\sigma_s}{\mu_s}, \ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon_s}{\partial x}, \tag{3}$$

где E_s и μ_s — модуль упругости и коэффициент динамической вязкости материала скелета. Уравнение импульсов для газовой фазы имеет следующий вид:

$$\rho_{vg0}\frac{\partial \upsilon_{vg}}{\partial t} = -\alpha_{vg0}\frac{\partial p_{vg}}{\partial x} - F, \quad F = F_m + F_\mu + F_B, \tag{4}$$

где F_m — сила присоединенных масс, вызванная инерционным взаимодействием фаз; F_μ — аналог силы вязкого трения Стокса; F_B — аналог силы Бассэ, проявляющейся при высоких частотах из-за нестационарности вязкого пограничного слоя около границы с твердой фазой; μ_g — динамическая вязкость газа. Для описания распределения температур в ячейке пористой среды запишем линеаризованные уравнения теплопроводности:

$$\begin{gathered}\rho^0_{vg0} c_{vg}\frac{\partial T'_{vg}}{\partial t} = \lambda_{vg} r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T'_{vg}}{\partial r}\right) + \\ + \frac{\partial p_{vg}}{\partial t} - \rho^0_{vg0}\left(B_g - B_v\right) T_{vg0}\frac{\partial g'}{\partial t} \ (0 < r < a_0),\end{gathered} \tag{5}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial t} = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(D r^2 \frac{\partial g'}{\partial r}\right) \quad (0 < r < a_0), \tag{6}$$

$$\rho^0_{l0} c_l \frac{\partial T'_l}{\partial t} = \lambda_l \frac{\partial^2 T'_l}{\partial r^2} \quad (a_0 < r < a_0 + h_0), \tag{7}$$

$$\rho^0_{s0} c_s \frac{\partial T'_s}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T'_s}{\partial r^2} \, (a_0 + h_0 < r < a_0 + b_0 + h_0). \tag{8}$$

где λ_j и c_j — соответственно коэффициенты теплопроводности и удельной теплоемкости при постоянном давлении ($j = vg, l, s$). Учитывая непрерывность температуры и теплового потока на поверхностях раздела фаз $r = a_0$ и $r = a_0 + h_0$.

Граничные условия запишутся в виде:

$$T'_{vg} = T'_l; \quad \lambda_l \frac{\partial T'_l}{\partial r} = \lambda_v g \frac{\partial T'_{vg}}{\partial r} + jl \quad (r = a_0), \tag{9}$$

$$T'_l = T'_s; \quad \lambda_l \frac{\partial T'_l}{\partial r} = \lambda_s \frac{\partial T'_s}{\partial r} \quad (r = a_0 + h_0). \tag{10}$$

Запишем условия ограниченности температур в центре пор и отсутствия теплообмена между ячейками (условие адиабатичности ячеек):

$$\frac{\partial T'_{vg}}{\partial r} = 0, \ \frac{\partial g'}{\partial r} = 0 \ (r = 0), \tag{11}$$

$$\frac{\partial T'_s}{\partial r} = 0 \ (r = a_0 + h_0 + b_0). \tag{12}$$

Газ, находящийся в порах среды, примем калорически совершенным и для него запишем уравнение состояния:

$$p_{vg} = \rho^0_{vg0} B' T'_{vg}, \ B' = B_v g' + B_g(1 - g'), \tag{13}$$

где B' — приведенная газовая постоянная; $g' = \rho'_v/\rho^0_{vg}$.

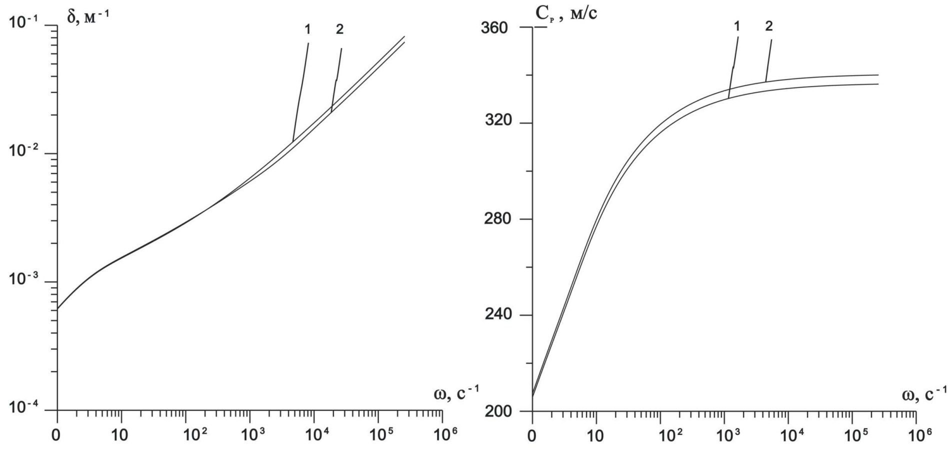


Рис. 2. Влияние массообмена на затухание и фазовые скорости «медленной» волны в пористой среде

Решение системы (1)–(13) будем искать в виде бегущих волн:

$$\upsilon_j, p_j, a_j, g' = \exp[i(Kx - \omega t)], \quad (14)$$

$$T'_j = A_{T_j}(r) \exp[i(Kx - \omega t)], K = k + i\delta. \quad (15)$$

После ряда преобразований, получим дисперсионное соотношение, на основе которого можно проанализировать распространение волн в среде.

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента затухания δ и фазовой скорости C_p «медленной» волны от частоты. Здесь и далее все графики построены с учетом межфазных сил. Линии 1 построены с учетом теплообмена, линии 2 — с учетом массо- и теплообмена. Характерные размеры среды: $a_0 = 10^{-3}$ м, $b_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ м, $h_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ м, $\alpha_{vg} = 0,89$, $\alpha_s = 0,084$.

Видно, что учет массообмена между жидкостью и газовой фазой приводит к уменьшению коэффициента затухания «медленной» волны в области высоких частот, а для более низких частот массообмен практически не влияет на затухание. Отметим также, что для всех случаев коэффициент затухания увеличивается с увеличением частоты. Учет масссооообмена приводит к увеличению скорости «медленной» волны на 4 м/с. Также следует отметить, что при возрастании температуры среды влияние масообмена на распространение «медленной» волны возрастает. Так учет масообмена при температуре $T = 363$ К приводит к возрастанию скорости «медленной» волны на 80 м/с, а коэффициент затухания увеличивается на порядок.

Проанализировав изменение размеров пор и водной пленки можно заключить, что для меньших толщин пленки коэффициент затухания для некоторых диапазонов частот больше, соответственно скорость «быстрой» волны меньше. Скорость «медленной» волны незначительно изменяется с ростом водонасыщенности.

Выявлено, что коэффициенты затухания «медленной» волны при изменении размеров пор среды на порядок, отличаются также на порядок — для более мелкодисперсной среды коэффициент затухания для соответствующих частот больше. Это объясняется тем, что при прохождении акустической волны по пористой среде она приводит газовую фазу, заключенную в ее порах, в колебательное движение, и более мелкие поры создают большее сопротивление потоку газа, чем крупные. Необходимость учета межфазного массо- и теплообмена также сильно зависит от сорта газа, насыщающего пористую среду. Так, коэффициент затухания в случае насыщения воздухом больше и для «медленной», и для «быстрой» волн. Скорость «медленной» волны в случае насыщения метаном больше, чем в случае насыщения воздухом. Скорости «быстрых» волн в обоих случаях совпадают.

Список литературы

[1] Шагапов В.Ш. Влияние тепломассообменных процессов между фазами на распространение малых возмущений в пене // Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23, №1. С. 126.

[2] Шагапов В.Ш., Хусаинов И.Г., Дмитриев В.Л. Распространение линейных волн в насыщенных газом пористых средах с учетом межфазного теплообмена // ПМТФ. 2004. Т. 45, №4. С. 114.

[3] Шагапов В.Ш. К теории о распространении звука в тумане // Известия АН СССР Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24, №5. С. 506.

[4] Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками пара и газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, №2. С. 188–192.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.5; 519.6

Трехмерное моделирование течения эмульсии методом граничных элементов на гетерогенных системах[1]

Солнышкина О.А.

Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем» БашГУ, Уфа
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе рассматривается динамика двух вязких несмешивающихся жидкостей в неограниченной области в трехмерной постановке при малых числах Рейнольдса. В основе используемой численной методики лежит метод граничных элементов, который очень эффективен для исследования трехмерных задач в бесконечных областях. Для ускорения расчетов и увеличения масштаба рассматриваемых задач применяется гетерогенный подход к распараллеливанию вычислений на центральном (CPU) и графических (GPU) процессорах. Для ускорения итерационного решателя (GMRES) и преодоления ограничений, связанных с размером памяти вычислительной системы, разработан модуль матрично-векторного произведения «на лету» и распараллелен на графических процессорах (GPU). Также реализована multi-GPU версия модуля. Представлены результаты по эффективности использования GPU.

1. Введение

Эмульсии возникают во многих областях промышленности: пищевая промышленность, переработка отходов, косметология, медицина. В нефтяной области их используют в потокоотклоняющих технологиях, для глушения скважин, для выравнивания профиля приемистости скважин. Таким образом, необходимо разработать эффективный численный аппарат, позволяющий детально исследовать поведение эмульсий, включая взаимодействие капель, их коалесценцию, и наблюдать многие эффекты на микроуровне в подобных системах «жидкость–жидкость».

Для более точного определения особенностей реологии и микроструктуры эмульсий требуется рассматривать большой объем дисперсной среды, что неизбежно приводит к необходимости разработки эффективного численного аппарата для исследования крупномасштабных задач. Для ускорения расчетов и увеличения масштаба рассматриваемых задач применяется гетерогенный подход к распараллеливанию вычислений на центральном (CPU) и графических (GPU) процессорах.

В работе исследуется трехмерное течение Стокса двух вязких несмешивающихся жидкостей в неограниченной области [4]. Метод граничных элементов для Стоксовых течений изложен в [5] и успешно применялся для расчета взаимодействия капель и частиц в дисперсных течениях [3], в указанных статьях также можно найти обзор литературы.

Для решения поставленных задач используются новые эффективные подходы к численному моделированию трехмерных задач и современные информационные технологии. Программная реализация задач предусматривает выбор оптимальных алгоритмов в зависимости от количества узлов сетки. Для ускорения расчетов разработан модуль матрично-векторного произведения без хранения матрицы в памяти вычислительной системы, который используется в итерационном решателе GMRES, и распараллелен как на обычном многоядерном процессоре (CPU), так и на графических процессорах (GPU) с использованием технологии CUDA.

2. Математическая модель

Рассматривалась задача о движении деформируемых капель ньютоновской жидкости 2 плотности ρ_2 и вязкости μ_2 в потоке другой жидкости 1 плотности ρ_2 и вязкости μ_1. Жидкости занимают объем V_2 и V_1 соответственно, S — граница раздела фаз. Гравитационная постоянная g и коэффици-

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант 11.G34.31.0040).

ент поверхностного натяжения капли γ постоянны. Динамика дисперсной системы происходит под действием сдвигового потока $u_s(x)$ в направлении оси OX в поле силы тяжести с установившейся скоростью падения u_g в направлении оси OZ. При числах Рейнольдса Re_1, Re_2 значительно меньше 1, поведение внешнего потока жидкости 1 и поведение жидкости 2 внутри капли описывается уравнениями Стокса:

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_i = -\nabla p + \mu_i\nabla^2\mathbf{u}_i = 0,\\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \qquad i = 1,2\,,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; p — давление.

Условия на границе двух жидкостей:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}, \qquad \mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{f_1} - \mathbf{f_2} = f\mathbf{n},\\ f = \gamma(\nabla\cdot\mathbf{n}) + (\rho_1-\rho_2)(\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in S,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mathbf{f}$ — поверхностное напряжение; $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, направленная в жидкость 1.

Кинематическое условие, описывающее динамику капли

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in S. \tag{3}$$

3. Численное моделирование

Задача решалась методом граничных элементов [1]. Суть метода состоит в переходе от дифференциального уравнения в частных производных, описывающего поведение неизвестной функции внутри и на границе области, к интегральному уравнению, определяющему только граничные значения, и поиске численного решения этого уравнения. При необходимости определения значения потенциала во внутренних точках области, их можно вычислить, используя известные решения на границе.

Таким образом, размерность задачи уменьшается на единицу. Все это делает метод граничных элементов достаточно эффективным при моделировании трехмерных задач в бесконечных областях или областях со сложной геометрией.

Для дискретизации поверхности капель использовалась триангуляция Делоне. Наиболее трудоемкой процедурой является вычисление средней кривизны поверхности в каждом узле сетки. Средняя кривизна вычислялась двумя методами: контурных интегралов и установления параболоида. Последний дает более точное значение средней кривизны с погрешностью не более 3%, но для его использования валентность всех узлов сетки должна быть не менее пяти.

В процессе эволюции во времени узлы сетки движутся согласно уравнению (3), которое на первых итерациях решается методом Рунге–Кутта 4-го порядка, а затем методом Адамса–Бэшфорта. Для того чтобы сохранить устойчивости сетки и избежать перекрытия поверхностей капель, был выбран достаточно маленький шаг по времени.

Для данной поверхности S скорость $\mathbf{u}$ в произвольной точке $\mathbf{y}$ может быть вычислена через граничные интегралы [3, 4]

$$\begin{aligned}&\left.\begin{array}{ll}\mathbf{y}\in V_1, & \mathbf{u}(\mathbf{y}) - 2\mathbf{u}_\infty(\mathbf{y})\\ \mathbf{y}\in V_2, & \lambda\mathbf{u}(\mathbf{y})\\ \mathbf{y}\in S, & \dfrac{1+\lambda}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{y})\end{array}\right\} =\\ &= \int\limits_S \Big\{ -\frac{1}{\mu}\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}) -\\ &-(1-\lambda)[\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})\Big\}dS(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\mu = \mu_1$ — вязкость обтекающей жидкости; $\lambda = \mu_2/\mu_1$ — отношение вязкостей внутренней и внешней жидкостей; $\mathbf{G}$ — фундаментальное решение уравнения Стокса и $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, определяются как

$$\begin{gathered}\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right),\\ \mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi}\frac{\mathbf{rrr}}{r^5}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}-\mathbf{y}, \quad r = |\mathbf{r}|\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Поверхность S разбивается на N узлов $\mathbf{x}_i$, по которым мы строим квадратурные формулы граничных интегралов.

Используя метод вершинных коллокаций, последнее уравнение в граничных интегралах (4) в точках $\mathbf{y} = \mathbf{x}_j$ можно записать

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1+\lambda}{2}\mathbf{I}_{ji} + (1-\lambda)\mathbf{I}_{ji}^{(T)}\right]\cdot\mathbf{u}_i =\\ &= \mathbf{u}_{\infty,j} - \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{I}_{ji}^{(G)}f_i, \quad j = 1,\dots,N,\end{aligned} \tag{6}$$

$$\mathbf{I}_i^{(G)}(\mathbf{y}) = \int_{S_i}\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})\,, \tag{7}$$

$$\mathbf{I}_i^{(T)}(\mathbf{y}) = \int_{S_i}\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})\,, \tag{8}$$

где $\mathbf{I}_{ji}$ — единичная матрица, остальные пространственные функции записаны в рассматриваемой точке коллокации.

Вычисление сингулярных элементов производилось методом пробных функций на основе известных интегральных тождеств [5].

Решая систему линейных алгебраический уравнений (6), получаем компоненты скорости на границе.

4. Результаты использования графических процессоров для ускорения расчетов

При трехмерном численном моделировании физических процессов для областей со сложной геометрией, например, течение эмульсии в микроканалах переменного сечения, необходимо построение сеток с большим количеством узлов. Решение подобных многомасштабных задач требует разработки и применения эффективных численных методов. Для сеток маленького размера при решении СЛАУ применялись прямые методы, но при увеличении масштаба задачи их использование затрудняется. Это связано с тем, что размер необходимой памяти пропорционален квадрату числа узлов сетки, также при их увеличении возрастает время вычислений. При использовании прямых методов, начиная с некоторого количества узлов, возникает нехватка памяти вычислительной системы.

Эту проблему можно решить используя итерационные методы решения, которые существенно снижают затраты памяти и времени. Наиболее эффективными и устойчивыми среди итерационных методов решения таких систем уравнений являются так называемые проекционные методы, и особенно тот их класс, который связан с проектированием на подпространства Крылова (например, GMRES). Эти методы обладают целым рядом достоинств: они устойчивы, допускают эффективное распараллеливание, работу с различными строчными (столбцовыми) форматами и предобуславливателями разных типов [6].

Для эффективной программной реализации итерационного метода необходимо разработать подпрограмму, быстро умножающую матрицу на вектор, и ускорить сходимость метода с помощью предобуславливателя.

В рамках данной работы для решения проблем, связанных с использованием памяти, в среде Matlab был разработан программный модуль умножения матрицы на вектор без хранения матрицы в памяти системы (MV product on the fly), который используется в GMRES при решении СЛАУ. Каждый элемент матриц G и K вычислялся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} G^{ij}_{mn} &= S_n \mathbf{G}(\mathbf{x_m} - \mathbf{x_n}) = \\ &= \frac{1}{8pi} S_n \left(\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|} - \right. \\ &\left. - \frac{(x^i_m - x^i_n)(x^j_m - x^j_n)}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^3} \right), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} K^{ij}_{mn} = S_n \mathbf{K}(\mathbf{x_m} - \mathbf{x_n}) = \\ = -\frac{3}{4pi} S_n \frac{(x^i_m - x^i_n)(x^j_m - x^j_n)}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^5} \times \\ \times \sum_{i=1}^{N} (x^k_m - x^k_n) n^k_n, \\ m, n = 1, \ldots, N, \; i, j, k = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{10}$$

где N — количество узлов дискретизации области. Таким образом матрицы G и K имеют размер $3N \times 3N$ и $3N \times N$.

Применение модуля матрично-векторного произведения позволяет решить проблему ограничения по памяти вычислительной системы, но матричные вычисления являются вычислительно-трудоемкими, поэтому представляют собой классическую область применения параллельных вычислений. Для ускорения расчетов модуль был распараллелен на центральном многоядерном процессоре (CPU) средствами Matlab Parallel Computing Toolbox и с помощью программно-аппаратной технологии CUDA на графических процессорах (GPU) [7].

Использование графических процессоров для данной задачи обусловлено тем, что выполнение расчетов на GPU показывает отличные результаты в алгоритмах, использующих параллельную обработку данных (применение одной и той же последовательности математических операций ко множеству данных). При этом лучшие результаты достигаются, если отношение числа арифметических инструкций к числу обращений к памяти достаточно велико.

Для многих методов матрично-векторных вычислений характерно наличие параллелизма по данным и в большинстве случаев распараллеливание таких операций сводится к разделению обрабатываемых матриц между процессорами используемой вычислительной системы. Наиболее общие способы разделения матриц состоят в разбиении данных на полосы (горизонтальные или вертикальные) или на прямоугольные фрагменты (блоки).

В рамках данной работы распараллеливание модуля «MV product on the fly» на GPU основывалось на разбиении матриц горизонтальными полосами на m частей так, что $N = m \times L$, где N — размерность матрицы; L — число строк матрицы в блоке; m — количество потоков на GPU.

На каждой итерации каждый из m потоков вычисляет свою часть вектора решения. То есть при умножении матрицы G размера $3N \times 3N$ на вектор b размера $3N \times 1$ на одной итерации поток вычисляет очередной свой блок матрицы размером 3×3 по формулам (9)–(10) и умножает полученный блок на соответствующую часть вектора b размером 3×1

и прибавляет результат к полученному на предыдущей итерации вектору (рис. 1). Каждый поток хранит часть результирующего вектора, которая по окончании вычислений копируется в global memory для получения полного вектора решения.

На рис. 2 показано сравнение времени выполнения модуля матрично-векторного произведения на одном ядре CPU (MVP on the fly), на 8 ядрах CPU (parallel MVP on the fly), на GPU (parallel GPU MVP on the fly) и встроенной функции умножения матрицы на вектор Matlab (Matlab MVP).

5. Результаты численного моделирования

Все расчеты для single-GPU версии модуля проводились на вычислительной системе с CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz, GPU NVIDIA Tesla C2050. При проведении вычислительных экспериментов было установлено, что для различных размеров задачи наилучшие результаты по времени достигаются при размере блока равным 256 потоков.

На рис. 3 приведено ускорение расчета на GPU по сравнению с CPU для операций с двойной и одинарной точностью. При расчетах на графической карте NVIDIA Tesla C2050 для количества узлов сетки N от 1 000 до 100 000 для уравнений Стокса получено ускорение до 520 раз для операций с двойной точностью и до 700 раз для операций с одинарной точностью.

При проведении тестовых расчетов достигнута следующая производительность: до 220 Gflops для операций с двойной точностью и 300 Gflops для операций с одинарной точностью (рис. 4). Учитывая, что пиковая производительность графической карты Tesla C2050 для чисел с плавающей точкой двойной точности составляет 515 Gflops, одинарной точности — 1,03 Tflops, получены хорошие результаты.

Также была реализована multi-GPU версия модуля и проведено несколько тестовых расчетов на рабочей станции с 3 графическими картами NVIDIA Tesla C2075 и с двумя CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz. На рис. 5 представлены некоторые результаты по ускорениею расчетов на GPU в зависимости от размера задачи.

Результаты тестов на графической карте NVIDIA Tesla C2050 показали возможность решения граничных задач для уравнений Стокса размером до 100 000 элементов на одной рабочей станции.

Численные расчеты проводились для обратной водонефтяной эмульсии с плотностью дисперсной фазы $\rho_2 = 10^3$, вязкостью $\mu_2 = 10^{-3}$ и коэффициентом поверхностного натяжения $\gamma = 0.05$, с плотностью несущей фазы $\rho_1 = 0.8 \cdot 10^3$ и вязкостью

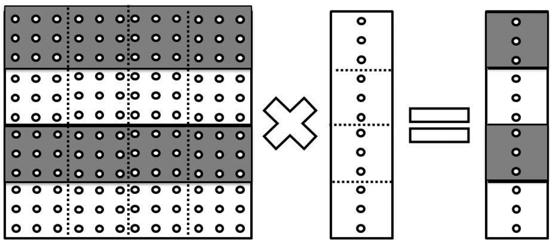


Рис. 1. Разделение данных и организация вычислений при выполнении параллельного модуля матрично-векторного произведения на GPU

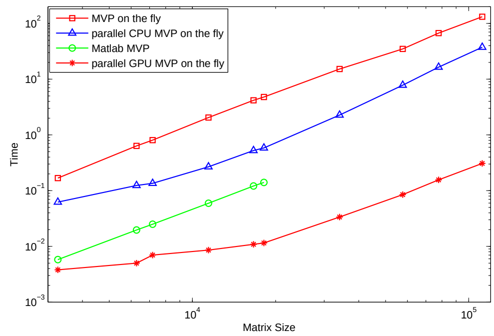


Рис. 2. Время вычисления матрично-векторного произведения

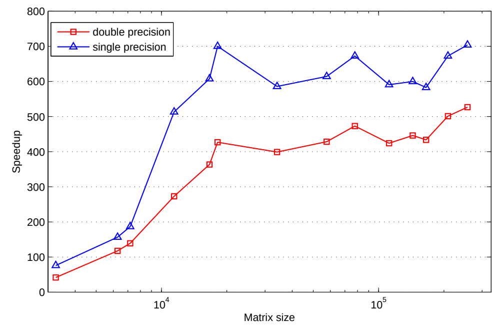


Рис. 3. Ускорение расчетов в зависимости от размера матрицы

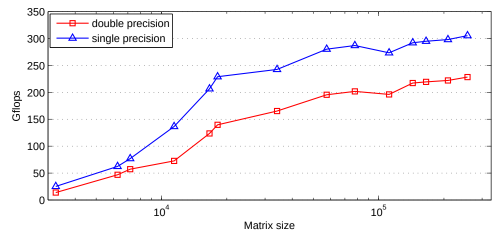


Рис. 4. Производительность в зависимости от размера матрицы

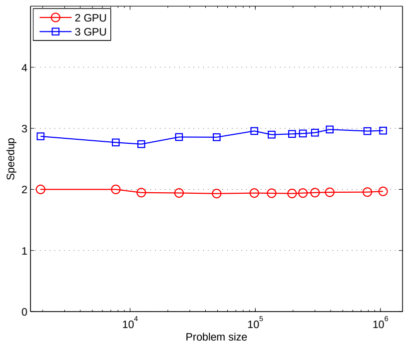


Рис. 5. Ускорение на нескольких GPU в зависимости от размера матрицы

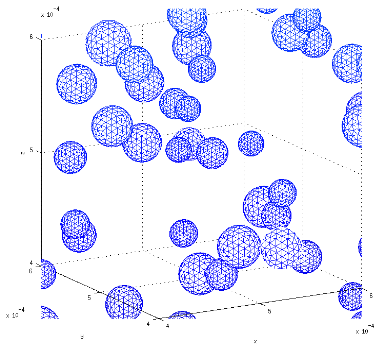


Рис. 6. Капли эмульсии в сдвиговом потоке в неограниченной области в момент времени $t = 0$ (фрагмент вычислительной области)

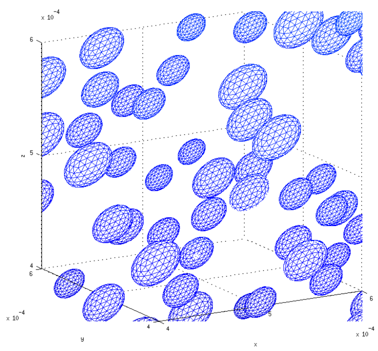


Рис. 7. Капли эмульсии в сдвиговом потоке в неограниченной области в момент времени $t = 100$ (фрагмент вычислительной области)

$\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$. Течение жидкой двухфазной среды рассматривалось в сдвиговом потоке $u_s(x) = 5 \cdot 10^5 \cdot x_z + 10$ в неограниченной области с капиллярным числом $\mathrm{Ca} = 0.2$, числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 4$, числом Бонда $\mathrm{Bo} = 4 \cdot 10^{-6}$. Все переменные заданы в системе СИ.

На рис. 6, 7 изображен фрагмент расчетной области $(4 \cdot 10^{-4}; 6 \cdot 10^{-4})^3 m^3$ в различные моменты времени. Изначально в расчетной области задавалось произвольное распеределение сферических капель разного радиуса. В процессе моделирования капли вытягиваются по потоку, действие силы тяжести при заданных параметрах за короткий промежуток времени практически не наблюдается, поскольку скорость осаждения капель значительно меньше скорости сдвигового потока.

Список литературы

[1] Бреббия К. Методы граничных элементов. Пер. с анг. М.: Мир, 1987. С. 524.

[2] Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах рейнольдса. Пер. с анг. М.: Мир, 1976. С. 623.

[3] Zinchenko A.Z. and Davis R.H. An efficient algorithm for hydrodynamical interaction of many deformable drops // J. Comp. Phys. 2000. Vol. 157. Pp. 539–587.

[4] Rallison J.M. A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 89, part 1. P. 191–200.

[5] Pozrikidis C. Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. 1992(Cambridge University Press, Cambridge, MA).

[6] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear System. 2000, SIAM.

[7] NVIDIA Corporation. NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture Programming Guide. Version 3.2.2010.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 536.242

О теории разложения метастабильного газогидрата при положительной температуре

Тазетдинов Б.И

Бирская государственная социально-педагогическая академия, Бирск

Рассмотрен процесс разложения газогидрата метана при атмосферном давлении, находящегося в перегретом состоянии по отношению к равновесной температуре $T_s = 193$ К при положительных значениях температур ($T > 273$ К). В области положительных температур принято, что скорость разложения определяется интенсивностью потока тепла через стекающий слой водяной пленки, образованной за счет разложения гидрата. Расчеты проводились при различных начальных и граничных температурах, результаты которых анализировались и сопоставлялись применительно к имеющимся экспериментальным данным.

Большой интерес к газогидратной тематике связан с высокой энергоемкостью, глобальной экологической значимостью и другими важными свойствами этих соединений. В работе [1] описан процесс разложения образцов газогидрата, находящегося в перегретом состоянии по отношению к равновесной температуре $T_s = 193$ К при значении давления $p = 0.1$ МПа (рис. 1) В частности, при положительных температурах ($T > 273$ К) разложение гидрата сопровождается образованием пленки воды, стекающей с поверхности гидрата. Скорее всего основным фактором, определяющим темп разложения гидрата, является поступление тепла к фронтальной поверхности разложения гидрата через слой стекающей воды.

При разложении частицы гидрата, находящейся в окружении газа с положительной температурой, необходимо учесть тепловое сопротивление стекающей воды с твердой поверхности, образовавшейся из-за разложения гидрата. Стекающая пленка будет способствовать усилению теплопередачи к частице гидрата от внешней среды. При вертикальном расположении частицы гидрата в плане учета теплообмена можно воспользоваться решением задачи о пленочном стекании жидкости по плоской вертикальной поверхности.

Рассмотрим процесс разложения частицы гидрата цилиндрической формы, поставленной вертикально, высота которой значительно больше ее диаметра. Для описания этого процесса запишем уравнения теплопроводности для гидрата и сохранения массы для стекающей воды, образовавшейся за счет разложения гидрата:

$$\rho_H c_H \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\lambda_H \frac{\partial T}{\partial r}), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hw}{\partial z} = \frac{j_l}{\rho_l}, j_l = (1-G)j_H, \qquad (2)$$

где h — толщина водяной пленки; w — среднеобъемная скорость стекания; j_l — интенсивность парообразования воды, отнесенная на единицу площади твердой фазы; ρ_H, c_h, λ_H — плотность, теплоемкость, теплопроводность газогидрата; G — массовая доля газа в гидрате.

Будем считать, что с момента времени $t > 0$ со стороны газа поддерживается постоянная температура T_e, в результате чего происходит разложение гидрата. С учетом стекающей водяной пленки на границе вода–гидрат запишем условие баланса тепла:

$$\lambda_H \frac{\partial T}{\partial r} + q^{(+)} = \rho_H^0 l_H \dot{r_\sigma}, \qquad (3)$$

где l_H — теплота разложения гидрата; $\dot{r}_\sigma$ — скорость движения фронта разложения.

Интенсивность образования воды, в свою очередь, можем определить из условия теплового баланса:

$$j_l = \frac{q^{(+)} - q^{(-)}}{l_l}\left(l_l = \frac{l_H}{(1-G)}\right), \qquad (4)$$

здесь $q^{(+)}$, $q^{(-)}$ — тепловые потоки на поверхности между водой и твердой фазой; l_l — удельная теплота образования воды, отнесенная на единицу ее

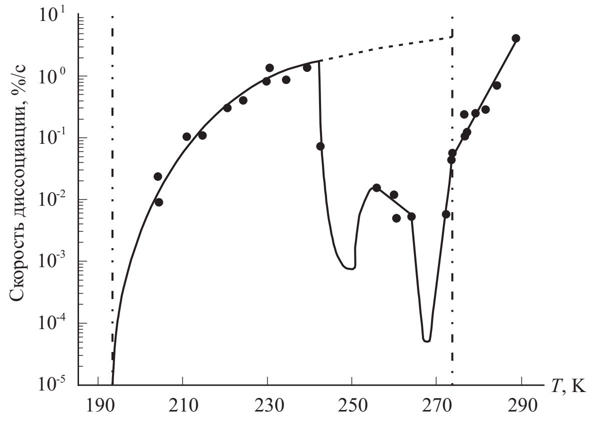


Рис. 1. Экспериментальные данные для зависимости скорости диссоциации метанового гидрата от температуры при 0.1 МПа, полученные Л. Штерн и др. [1] (залитые значки — экспериментальные данные разложения в изотермических условиях)

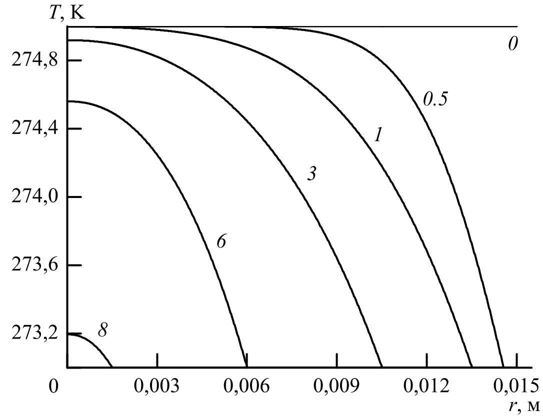


Рис. 2. Эволюция полей температуры вертикально поставленного образца газогидрата для 0, 0.5, 1, 3, 6, 8 мин

массы. Принимая, что разложение гидрата происходит в основном за счет теплового потока со стороны воды ($q^{(+)} \gg q^{(-)}$), тепловой поток со стороны жидкости зададим следующим образом:

$$q^{(+)} = \tilde{\chi}(T_e - T_\sigma). \tag{5}$$

Здесь T_σ — температура на границе раздела вода–гидрат; $\tilde{\chi}$ — среднее значение коэффициента теплопередачи воды.

Начальные и граничные условия примем в виде:

$$t = 0,\, r > 0 :\, T(r, 0) = T_0,$$

$$t > 0,\, r = 0 :\, \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Среднее значение коэффициента теплопередачи воды найдено следующим образом:

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \chi(z)dz, \chi(z) = \frac{\lambda_l}{h}, \tag{6}$$

где L — высота образца газогидрата; h — толщина пленки воды; χ, λ_l — коэффициент теплопередачи и теплопроводность воды.

Для среднеобъемной скорости w в уравнении (1) будем использовать решение известной задачи о пленочном стекании вязкой жидкости под действием силы тяжести [2]. Тогда, согласно этому решению, можем записать

$$w = \frac{gh^2}{3\nu_l}, \tag{7}$$

где g и ν_l — ускорение силы тяжести и кинематическая вязкость воды. При установившемся режиме первое слагаемое в левой части уравнения (2) равно нулю ($\partial h/\partial t = 0$). Полагая $h = 0$ ($z = 0$), из (2) с учетом (4)–(7) получим

$$h = \left(\frac{12(1-G)\lambda_l \nu_l \Delta T z}{l_H \rho_l^0 g}\right)^{1/4}. \tag{8}$$

Массовый выход газа можно определить по следующей формуле

$$M_g = \pi\left(a^2 - r_\sigma^2\right) L \rho_l^0 \alpha_g G.$$

Численные эксперименты в данной работе проводились со следующими геометрическими и теплофизическими параметрами: $a = 1.5$ см, $L = 9$ см, $\rho_H^0 = 910$ кг/м^3, $\rho_l^0 = 1000$ кг/м^3, $c_H = 2044$ Дж/(кг· К), $\lambda_H = 0.5$ Вт/(м· К), $\lambda_l = 0.556$ Вт/(м· К), $l_H = 5 \times 10^5$ Дж/кг, $\nu_H = 10^5$ м^2/с, $G = 0.12$.

На рис. 2 представлены распределения температуры для разлагающегося образца гидрата на воду и газ при ее начальном и граничном значении $T_e = T_0 = 275$ К. Температура на границе разложения ($r = r_\sigma$) принята равной температуре плавления льда ($T_\sigma = 273$ К).

На рис. 3 представлен массовый выход газа из вертикально поставленного образца газогидрата при различных значениях температуры $T_e = T_0 = 275,\ 283,\ 287$ К.

В радиально-симметричной постановке построена математическая модель, описывающая процесс разложения метастабильного образца газогидрата.

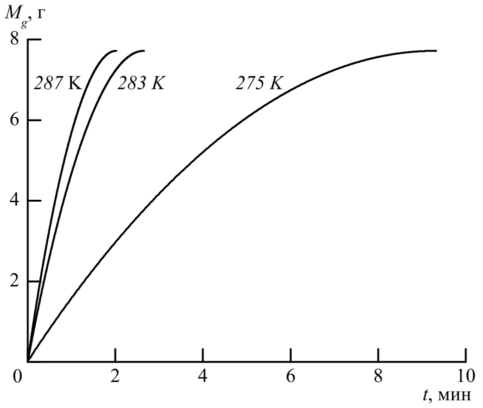


Рис. 3. Законы выхода газа из состава газогидрата при значениях граничной и начальной температуры 275, 283, 287 K

Установлено, что в процессе разложения газогидрата стекающая пленка способствует усилению теплопередачи к частице гидрата от внешней среды. Численные расчеты сравнивались с экспериментальными данными [1], которые подтвердили адекватность построенной математической модели.

Список литературы

[1] Laura A. Stern, Susan Circone, Stephen H. Kirby, and William B. Durham Temperature, pressure, and compositional effects on anomalous or <,self» preservation of gas hydrates // Proc. Of the 4th. intern. Conf. on Gas Hydrates. Yokohama, Japan. 2002. P. 673–677.

[2] Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Изд-во Наука, 1984. 302 с.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529: 534.2

Нелинейные колебания аэрозоля в безударно-волновом течении в открытой трубе[1]

Ткаченко Л.А.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Экспериментально исследованы нелинейные колебания аэрозоля в открытой трубе в безударно-волновом режиме на резонансе при различных амплитудах возбуждения. Эпюры давления имеют непрерывный характер. С увеличением амплитуды возбуждения происходит рост размаха колебаний давления среды. При больших амплитудах наблюдается форма колебаний близкая к гармонической. Числовая концентрация капель аэрозоля монотонно убывает со временем. Это связано с коагуляцией аэрозоля, заключающейся в слиянии капель и осаждении их на стенках трубы, а также выбросом аэрозоля в окружающее пространство. С увеличением амплитуды возбуждения зависимости приобретают большую кривизну и время просветления аэрозоля уменьшается. При этом время просветления аэрозоля в 5–10 раз ниже, чем при естественном осаждении.

1. Введение

В реальных устройствах, таких как газотурбинные установки, парогенераторы, трубопроводные системы компрессоров, камеры сгорания жидкостных и твердотопливных ракетных двигателей, могут возникать резонансные колебания рабочей среды. При этом происходит увеличение местного коэффициента теплоотдачи, механических и тепловых напряжений, что приводит не только к поломке элементов конструкции, но и к полному ее разрушению. Возникновение резонансных колебаний среды может иметь положительную сторону, например, повышение теплонапряженности топочных камер, улучшения тепло- и массообмена, снижение гидравлического сопротивления. Особый интерес представляют собой колебания газа в открытой трубе, которые, в частности, могут быть использованы при распылении жидких и пастообразных средств во внешнем волновом поле вблизи открытого торца. В этом направлении были получены результаты по изучению внешнего волнового поля, в частности выявлено, что скорость газа в пульсирующей струе во внешнем волновом поле может достигать 150 м/с и выше. Также были обнаружены ударные волны вблизи субгармонических частот и ряд других эффектов. Подробный анализ работ по теоретическому и экспериментальному исследованиям нелинейных колебаний однородного газа в трубах приведен в [1,2]. Основы волновой динамики многофазных сред и некоторые приложения исследований в этой области представлены в [3]. Колебательные процессы в двухфазных средах, заполняющих ограниченные объемы, подробно рассматриваются в [4]. Исследование волновой динамики в таких средах вблизи резонансных частот представляет значительный интерес. Одним из практических приложений является эффективная коагуляция аэрозолей и их осаждение на стенках. Результаты таких исследований могут быть использованы во многих отраслях промышленности, в энергетике и экологии, а также при решении фундаментальных проблем аэрогидродинамики. В монографиях [5, 6] рассмотрена коагуляция и осаждение капель или частиц аэрозолей в волновых полях при интенсивном гармоническом возбуждении в основном в больших объемах. Поведение аэрозоля при его нелинейных колебаниях в закрытой трубе вблизи фундаментальной частоты исследовалось в экспериментальных работах [7–9]. В [10] изучался случай колебаний в закрытой и открытой трубах вблизи субгармонического резонанса, частота которого вдвое меньше фундаментальной. В работах [11, 12] экспериментально выявлены особенности процесса ускоренной коагуляции и осаждения аэрозоля в закрытой и открытой трубах для ча-

[1]Работа выполнена в рамках программы ОЭММПУ РАН (№ 13 ОЭ) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009Ч2013 гг. (гос. контракт 14.740.11.0351), при финансовом содействии РФФИ (грант № 10-01-00098) и Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-834.2012.1).

стоты, которая является четвертью от фундаментальной частоты для закрытой трубы и половиной — для открытой трубы. Основным нелинейным эффектом являлась ускоренная коагуляция и осаждение на стенках трубы капель машинного масла и табачного дыма [7], капель олеиновой кислоты [8], частиц дыма, полученных от сгорания палки ладана [9], и капель, получаемых из жидкости ди-этил-гексил-себакат (DEHS) [10–12]. Геометрический диаметр капель и частиц аэрозоля составлял 1Ч10 мкм [7,8], 0.3 мкм [9] и 0.83 мкм [10–12]. В указанных работах экспериментально исследовался ударно-волновой режим при значениях амплитуд возбуждения свыше 0,1 бар. Режим безударно-волнового течения аэрозоля (DEHS), когда пристеночные потери при значениях амплитуд порядка 0,01 бар становятся существенными, исследовался лишь для случая закрытой трубы [13].

В связи с этим целью работы является изучение колебаний аэрозоля в открытой трубе в указанном режиме на резонансе при различных амплитудах возбуждения.

2. Экспериментальная установка

Продольные установившиеся колебания аэрозоля в кварцевой трубе (длина 1,06 м, внутренний диаметр 0,0365 м, внешний диаметр 0,041 м) создаются цилиндрическим поршнем с плоской рабочей поверхностью диаметром 0,0365 м, колеблющемся по синусоидальному закону в цилиндре от двухтактного микродвигателя МДС 218КУ-К внутреннего сгорания. Поршень вместе с системой установки на стол вибростенда имеет вес 0,15 кг. Он приводится в движение вибростендом марки TV51075 с усилителем мощности типа BAA 120 фирмы TIRA (Дания). Труба удерживается в вертикальном положении при помощи стяжек, закрепленных на станине, и насадки, размещенной на верхнем конце трубы. Стол представляет собой сварную металлическую конструкцию из стальных уголков и имеет два основания. К верхнему основанию крепится экспериментальная установка. Нижнее основание служит для загрузки балластом из различного материала, благодаря этому установка имеет устойчивость к вибрациям. Управление вибростендом осуществляется с помощью программного модуля SineVIEW (VR610), установленного на компьютер, посредством пьезоэлектрического IEPE акселерометра со встроенной электроникой марки 4513-001 фирмы Bruel and Kjaer (Дания) и контроллера типа VR8500-1 фирмы Vibration Research Corporation (США). К отверстию насадки подсоединяется пьезоэлектрический датчик давления модели 8530C-15 фирмы Bruel and Kjaer, сигнал с которого через трехканальный мостовой усилитель напряжения модели ENDEVCO 136 фирмы Bruel and Kjaer подается на цифровой осциллограф модели DSO 3062A фирмы AgilentTechnologies, а затем на компьютер, на мониторе которого с помощью специального программного обеспечения DSO3000 можно наблюдать и сохранять полученные экспериментальные данные. Светопроницаемость аэрозоля измеряется люксметром марки ATT-1505 фирмы Актаком. На стяжке перпендикулярно трубе размещен источник света (лазер) с дистанционным управлением, длиной волны 630 нм и мощностью 0,16 Вт. Лазер устанавливается так, чтобы сквозь аэрозоль свет попадал в центр светочувствительного датчика люксметра. Данные с люксметра через интерфейс RS-232 подаются на компьютер и обрабатываются программой, прилагающейся к люксметру. В качестве рабочей жидкости используется C26H5O4 — ди-этил-гексил-себокат, аэрозоль из нее создается при помощи аэрозольного генератора ATM 225 фирмы TOPAS (Германия) с постоянным объемным расходом потока, равным 250 л/час ($1,68 \times 10^8$ капель/сек). Диаметр полученных капель аэрозоля составляет в основном 0,83 мкм [10].

3. Методика эксперимента

Рассмотрим методику экспериментов. Включаем все приборы, конфигурируем программное обеспечение для управления вибрационными испытаниями и с помощью специальной программы DSO3000 переводим управление осциллографа на виртуальную панель на компьютере. Производим настройку усилителя, задавая необходимый коэффициент усиления. Устанавливаем необходимые масштабы напряжения и скорости развертки на осциллографе.

Запускаем программу для синусоидальных испытаний на компьютере, задаем значения частоты и амплитуды колебаний с точностью до 10^{-6} Гц и 10^{-7} м, соответственно. После достижения частоты и амплитуды заданного уровня, записываем на компьютере входной синусоидальный сигнал перемещения поршня и выходной сигнал с датчика давления.

После пошагового просмотра осциллограмм выходного сигнала, выбираем необходимую запись колебаний давления газа во времени, с точностью до 0,3 мВ замеряем соответствующее напряжение и сохраняли данный кадр. То же самое выполняем для всех частот и амплитуд колебаний.

Для замера светопроницаемости включаем все приборы и записываем начальные значения люксметра Φ_0 для воздуха, заполняющего трубу. Измерения освещенности проводятся с точностью до 1%. В отверстие насадки в нижней части трубы вставляем резиновый шланг от аэрозольного генератора. Далее на верхнюю насадку трубы устанавливаем крышку с отверстием диаметра 3 мм для устранения избыточного давления. Начальная концентрация аэрозоля всегда равняется $3,5 \times 10^6$ см$^{-3}$ [13], для чего в каждом эксперименте заполняем трубу аэрозолем в течение 23 секунд. После чего отключаем аэрозольный генератор, отсоединяем резиновый шланг от отверстия насадки и закрываем это отверстие. С помощью датчика дистанционного управления включаем лазер и фиксируем показания люксметра Φ_1. Запускаем программу для синусоидальных испытаний с заданными значениями частоты и амплитуды возбуждения. Убираем крышку с отверстием с верхней насадки, труба становится полностью открытой. Далее включаем лазер при помощи датчика дистанционного управления через определенный промежуток времени. Изменение светопроницаемости аэрозоля в ходе эксперимента приводит к изменению показаний люксметра Φ_t, которые регистрируются на компьютере. Эксперимент проводим до полного осаждения аэрозоля на стенках трубы. Останавливаем программу для синусоидальных испытаний. Тщательно прочищаем трубу от слоя осажденных капель аэрозоля. После чего эксперимент повторяем для других значений амплитуды возбуждения в указанной выше последовательности. Для расчета числовой концентрации аэрозоля из полученных с люксметра данных пользуемся соотношением [13]:

$$N = 3,5 \times 10^6(\Phi_t - \Phi_0)/(\Phi_1 - \Phi_0) \ \text{см}^{-3}.$$

Результаты представлены на рис. 1.

Зависимость времени просветления от относительной амплитуды возбуждения приведена на рис. 2. Каждая точка на нем соответствует отдельному эксперименту. С увеличением относительной амплитуды возбуждения время просветления уменьшается практически линейно. Такое уменьшение связано с тем, что при увеличении амплитуды колебаний коагуляция капель, осаждение на стенках трубы и частичный выброс аэрозоля из открытого конца трубы происходят более интенсивно. Можно отметить, что время просветления примерно в 1,5 раза меньше, чем время коагуляции и осаждения аэрозоля в закрытой трубе [13]. Это связано с тем, что в открытой трубе часть аэрозоля выбрасывается в окружающую среду.

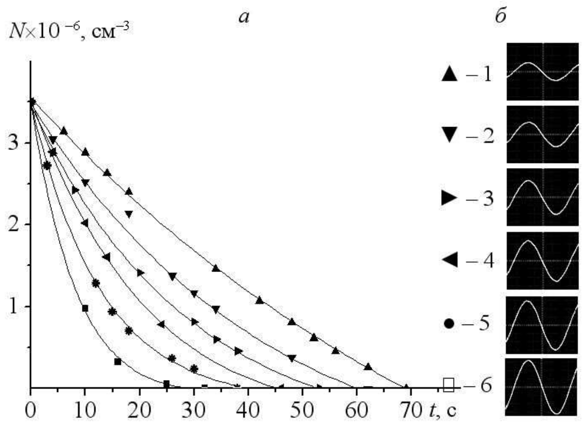


Рис. 1. Зависимость (*а*) — числовой концентрации капель аэрозоля и (*б*) — колебаний давления от времени при частоте 78,6 Гц при различных относительных амплитудах возбуждения: 1 — $\varepsilon = 4,716$, 2 — $\varepsilon = 6,603$, 3 — $\varepsilon = 9,433$, 4 — $\varepsilon = 11,792$, 5 — $\varepsilon = 14,15$, 6 — $\varepsilon = 16,037$, сплошные линии — экспоненциальные аппроксимации

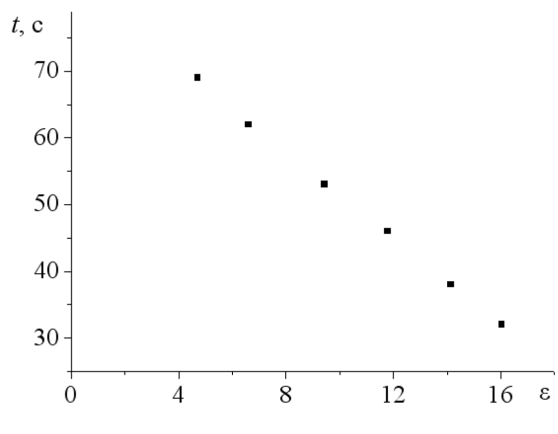


Рис. 2. Зависимость времени просветления от относительной амплитуды возбуждения при частоте 78,6 Гц

4. Заключение

Таким образом, в результате экспериментальных исследований выявлено, что при малых амплитудах возбуждения, когда колебания имеют гармонический характер, наблюдается плавное уменьшение числовой концентрации капель аэрозоля. Далее, с увеличением амплитуды возбуждения происходит увеличение размаха колебаний давления, при больших амплитудах форма колебаний становится близкой к гармонической, начинают возникать акустические течения, и зависимость числовой концентрации приобретает большую кривизну. Наблюдается практически линейная зависимость времени просветления аэрозоля от амплитуды возбуждения. Время просветления примерно в 1,5 раза меньше, чем время коагуляции и осаждения в закрытой трубе.

Список литературы

[1] Ильгамов М.А., Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г., Репин В. Б. Нелинейные колебания газа в трубе // Тематический сборник: Обзоры исследований по механике сплошной среды. Казань: ИММ КазНЦ РАН. 1995. С. 79–130.

[2] Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р. Нелинейные колебания газа в трубах // Тематический сборник «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 10-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: ИММ КазНЦ РАН. 2001. С. 19–35.

[3] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.

[4] Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технология. М.: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 712 с.

[5] Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Издательство АН СССР, 1963. 263 с.

[6] Temkin S. Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspensions. New York: Cambridge University press, 2005. 400 p.

[7] Гуляев А.М., Кузнецов В.М. Коагуляция аэрозолей под действием периодических ударных волн // Акустический журнал. 1962. Т. 8, № 4. С. 473–475.

[8] Temkin S. Droplet agglomeration induced by weak shock waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 1639–1641.

[9] Shuster K., Fichman M., Goldshtein A., Gutfinger C. Agglomeration of submicrometer particles in weak periodic shock waves // Phys. Fluids. 2002. V. 14, № 5. P. 1802–1805.

[10] Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование коагуляции аэрозоля в трубе вблизи субгармонического резонанса // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42, № 5. С. 788–795.

[11] Сонин Н.В. Экспериментальное исследование ускоренной коагуляции аэрозоля при субгармоническом резонансе в закрытой трубе // Известия вузов. Авиационная техника. 2004. № 2. С. 76–78.

[12] Сонин Н.В. Особенности ускоренной коагуляции аэрозоля при субгармоническом резонансе в открытой трубе // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. № 1. С. 74–76.

[13] Ткаченко Л.А., Зарипов Р.Г. Особенности нелинейных колебаний аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика жидкости и газа. 2011. № 4(3). С. 1171–1173.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 123.45:57

Рост малых деформаций сферичности парового пузырька при его коллапсе в воде[1]

Топорков Д.Ю.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Изучается эволюция малых деформаций сферичности кавитационного пузырька при его сильном сжатии в воде. Амплитуда давления в жидкости 15 бар. Применяется математическая модель, в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. Сферическая составляющая описывается уравнениями газовой динамики с реалистичными широкодиапазонными уравнениями состояния Нигматулина–Болотновой. Учитываются нестационарная теплопроводность в паре и жидкости, неравновесные процессы испарения–конденсации на межфазной границе. Несферическая составляющая определяется без учета влияния сжимаемости жидкости и неоднородности параметров пара, что позволяет описать ее эволюцию обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Установлено, что амплитуда малых начальных искажений сферичности пузырька может возрасти при сжатии не более чем в 320 раз.

1. Введение

После открытия таких явлений, как устойчивая периодическая сонолюминесценция отдельного пузырька [1] и нейтронная эмиссия при акустической кавитации дейтерированного ацетона [2], значительно возрос интерес к проблеме сильного сжатия парогазовых пузырьков в жидкости. Существующие в настоящее время теории сильного сжатия [1, 2] основаны на гипотезе о том, что форма пузырьков при сжатии сохраняется близкой к сферической и в финальной высокоскоростной стадии сжатия внутри них формируется близкая к сферической ударная волна, сходящаяся к центру пузырька. В результате ее фокусировки кратковременно в центре пузырька образуется плотное горячее сферическое ядро, которое испускает свет [1] и нейтроны [2]. Для реализации этого сценария необходимо сохранение формы пузырька близкой к сферической на всем сжатии.

Особенностью экспериментов [2] является тот факт, что когда в них вместо дейтерированного ацетона использовалась тяжелая вода, то выхода нейтронов не наблюдалось. В настоящей работе изучается эволюция малых деформаций сферичности кавитационного пузырька при его сильном сжатии в условиях, близких к экспериментам [2], но когда в качестве среды используется обычная вода. Применяется математическая модель, аналогичная [3], в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую и несферическую составляющие. Сферическая составляющая рассчитывается по модели, аналогичной одномерной модели Р.И. Нигматулина [4], в которой движение жидкости и пара описывается уравнениями газовой динамики с реалистичными широкодиапазонными уравнениями состояния Нигматулина–Болотновой [5]. Учитываются нестационарная теплопроводность в обеих средах, неравновесные процессы испарения–конденсации на межфазной границе. Данная модель позволяет проводить детальное изучение динамики пузырька в ходе всего сжатия, как в его низкоскоростном начале, так и в высоко-скоростном конце. Можно утверждать, что на сегодня эта модель наиболее адекватно описывает физические процессы, сопровождающие такое сильное сжатие сферических пузырьков.

Несферическая составляющая движения пара и жидкости определяется без учета влияния сжимаемости жидкости и неоднородности параметров пара, что позволяет описать ее эволюцию обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка [3].

2. Постановка задачи

Рассматривается эволюция малых искажений сферичности кавитационного пузырька при его

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований РАН, гранта Президента Российской Федерации (МК-2712.2011.1) и при поддержке РФФИ.

сильном сжатии в однородной жидкости в условиях, близких к экспериментам [2]. При этом роль жидкости играет обычная вода (H_2O) при температуре 20° С. Давление в жидкости p_∞ полагается постоянным и равным 15 бар, что в экспериментах [2] примерно соответствует среднему значению давления жидкости на фазе сжатия пузырьков (в экспериментах [2] 15 бар есть амплитуда колебаний давления в пучности стоячей волны при статическом давлении 1 бар). В начальный момент времени $t = 0$, за который принимается начало сжатия, кавитационный пузырек является близким к сферическому, с диаметром 1 мм (что согласуется с размерами пузырьков в кластере в начале их сжатия в экспериментах [2]). В начале сжатия жидкость покоится, пар в пузырьке находится в состоянии насыщения (с давлением около 0.22 бар). Поверхность пузырька имеет малое осесимметричное отклонение от сферической формы, причем настолько малое что, несмотря на свой значительный рост, оно остается малым вплоть до конца сжатия. В результате разности давлений в полости пузырька и в окружающей жидкости пузырек очень сильно сжимается (радиус пузырька в ходе сжатия уменьшается примерно в 45 раз). В ходе сжатия несферичность пузырька нарастает в виде колебаний относительно сферической формы. Основное внимание при изучении эволюции несферичности пузырька при его сжатии уделяется степени ее роста. За меру степени роста несферичности принимается отношение максимального значения относительной амплитуды несферичности пузырька (отношения текущего значения размерной амплитуды возмущения сферичности к текущему значению размерного радиуса пузырька) в ходе сжатия к величине этой относительной амплитуды в начале сжатия. Максимальное значение относительной амплитуды несферичности пузырька достигается в силу ее нарастания в виде колебаний либо в конце сжатия, либо незадолго до него.

В случае осесимметричных искажений сферичности пузырька уравнение его поверхности в сферической системе координат r, θ, ϕ представляется в виде ряда

$$r = R(t) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t) P_i(\cos\theta).$$

Здесь t — время; $R(t)$ — радиус пузырька; a_i — амплитуда (со знаком) отклонения формы пузырька от сферической в виде полинома Лежандра $P_i(\cos\theta)$ степени i. Амплитуда искажения $\varepsilon_i = a_i/R$ полагается малой при всех i ($|\varepsilon_i| << 1$).

Радиальная составляющая движения пара и жидкости описывается следующими уравнениями газовой динамики [4, 6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w r^2) = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w^2 r^2 + p r^2) = 2pr,\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e r^2) + \frac{\partial}{\partial r}[w r^2(\rho e + p)] = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r}\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность; w — радиальная компонента вектора скорости; p – давление; e — удельная полная энергия; T — температура; κ — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия в центре пузырька ($r = 0$), вдали от него ($r = r_\infty, r_\infty >> R$) и на межфазной границе ($r = R(t)$) имеют вид [4, 6]:

$$\begin{gathered}r = 0: \quad w = 0,\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0;\\ r = r_\infty: \quad p = p_\infty,\ T = T_0;\\ r = R(t): \quad \dot{R} = w_l + \frac{j}{\rho_l} = w_g + \frac{j}{\rho_g},\\ p_l = p_g - \frac{4\mu_l w_l}{R} - \frac{2\sigma}{R},\\ \kappa_l \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_l - \kappa_g \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_g = j l(p_g),\ T_l = T_g,\end{gathered} \tag{2}$$

где p_∞ — давление в жидкости вдали от пузырька; μ_l — динамический коэффициент вязкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения; l — теплота парообразования; j — скорость испарения или конденсации (индексы l и g обозначают жидкость и пар соответственно).

Вязкость жидкости в (1),(2) учитывается в приближении несжимаемости жидкости и без учета ее влияния на изменение энергии. Анализ показывает, что эти допущения приемлемы. Уравнения состояния воды и ее пара и функции физических параметров этих сред μ_l, σ, κ_l, κ_g, l от T принимаются в виде аппроксимаций экспериментальных данных [5]. Величина j определяется равенствами [4,6]:

$$\begin{gathered}j = \frac{\alpha'}{\sqrt{2\pi R_g}}\left(\frac{p_S(T)}{\sqrt{T}} - \frac{\chi p_g}{\sqrt{T}}\right),\\ \chi = \exp(-\Omega^2) - \Omega\sqrt{\pi}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\Omega \exp(-x^2)dx\right),\\ \Omega = \frac{j\sqrt{R_g T}}{\sqrt{2} p_g}.\end{gathered}$$

Здесь α' — коэффициент аккомодации; R_g — газовая постоянная для пара; p_S — давление насыщения.

Для описания изменения a_i применяется модель Просперетти [7], в которой учет влияния плотности пара производится согласно [8]:

$$
\begin{gathered}
(1+q)\ddot{a}_i + \left[3\frac{\dot{R}}{R} + 2\,(i+1)\,(i+2)\,\frac{\nu_l}{R^2}\right]\dot{a}_i + \\
+(i-1)\left[(q-1)\,\frac{\ddot{R}}{R} + (i+1)\,(i+2)\,\frac{\sigma}{\rho_{l0}R^3} + \right.\\
\left. + \frac{4\nu_l\,(i+1)\,\dot{R}}{R^3}\right] a_i + \frac{i\,(i+1)}{R}\left[\frac{\nu_l Q_i\,(R,t)}{R} + \right.\\
\left. + \frac{2\nu_l\,(2i+1)}{R^{2-i}}\alpha_i + \frac{\dot{R}}{R}\beta_i\right] = 0,\\
q = \frac{(i+1)\,\rho_g^-}{i\rho_{l0}},\ \alpha_i = -\frac{i+1}{2i+1}\int\limits_R^\infty \frac{Q_i}{r^i}\,dr,\\
\beta_i = \int\limits_R^\infty \left[\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1\right]\left(\frac{R}{r}\right)^i Q_i\,dr.
\end{gathered}
$$

Здесь ρ_g^- — граничное значение плотности пара, полученное из решения системы уравнений (1),(2); ρ_{l0} — невозмущенное значение плотности жидкости; $\nu_l = \mu_l/\rho_{l0}$ — кинематический коэффициент вязкости. В ходе всего сжатия при описании несферического возмущения плотность жидкости полагается постоянной $\rho_l = \rho_{l0}$. Функция $Q_i(r,t)$ характеризует вихревое движение жидкости и вводится следующим образом [7]

$$
\nabla\times\mathbf{w} = \nabla\times\left(\sum_{i=2}^{\infty} Q_i(r,t)P_i(\cos\theta)\right)\mathbf{e}_r,
$$

где $\mathbf{w}$ — вектор скорости жидкости; $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор вдоль координаты r. Функция $Q_i(r,t)$ определяется из уравнения

$$
\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \dot{R}R^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q_i}{r^2}\right) + \nu_l\left[\frac{i(i+1)Q_i}{r^2} - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial r^2}\right] = 0
$$

и граничных условий

$$
\begin{gathered}
Q_i(R,t) = \frac{2}{i+1}\left[(i+2)\dot{a}_i - (i-1)\frac{\dot{R}}{R}a_i + \right.\\
\left. +(2i+1)R^{i-1}\alpha_i\right],\ Q_i(\infty,t) = 0.
\end{gathered}
$$

Принимается, что давление жидкости, как уже было сказано, $p_\infty = 15$ бар (в экспериментах [2] оно на фазе сжатия изменяется в пределах от 14 до 16 бар), коэффициент аккомодации $\alpha' = 0.04$, газовая постоянная $R_g = 461.9$ м^2/(с^{2}К).

Полагается, что в начальный момент времени ($t = 0$) радиус пузырька $R = R_m = 500$ мкм, радиальная скорость $\dot{R} = 0$, амплитуда искажения $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,m}$, скорость ее изменения $\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{i,m} = 0$.

Для водяного пара в пузырьке при $t = 0$ принимается: температура $T = T_0 = 293$ К, давление $p = p_{g0} = p_{S0} = 2196$ Па (p_{S0} — давление насыщения при $t = 0$), радиальная компонента вектора скорости $w = 0$.

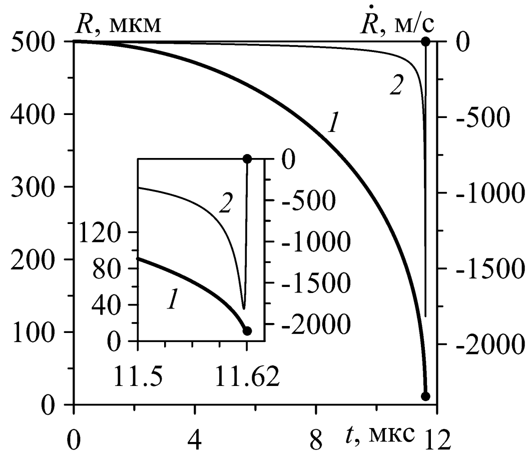


Рис. 1. Изменение R (*1*) и (*2*) (точкой отмечен момент коллапса $t_c = 11.6205$ мкс)

В воде при $t = 0$: температура $T = T_0 = 293$ К, давление $p = p_{l0} = p_\infty = 15$ бар, $w = 0$, начальная завихренность отсутствует $Q_i(r, t = 0) = 0$.

Тогда при $t = 0$ имеем: плотность пара $\rho_g = \rho_{g0} = 0.016445$ кг/м^3, плотность жидкости $\rho_l = \rho_{l0} = 998.2$ кг/м^3, коэффициент теплопроводности жидкости $\kappa_l = 0.5984$ кг·м/(с^{3}К), коэффициент теплопроводности пара $\kappa_g = 0.0182$ кг·м/(с^{3}К), удельная теплота парообразования $l = 2455237$ м^2/с^2, поверхностное натяжение $\sigma = 0.0725$ Па·м, вязкость жидкости $\mu_l = 10^{-3}$ Па·с.

3. Результаты

Радиус пузырька при сжатии меняется от $R_m = 500$ мкм в начале сжатия до $R_c = 11$ мкм в его конце (при $t = t_c$, момент коллапса) (рис. 1). Видно, что в финальной стадии сжатия величина $\dot{R}$ стремительно возрастает до значений порядка 1.8 км/с. При этом, в отличие от случая, когда средой является дейтерированный ацетон (с максимальной скоростью сжатия порядка 1 км/с) [3, 4], в конце сжатия в пузырьке не образуется радиально сходящейся ударной волны (рис. 2). Момент достижения пузырьком минимального радиуса принимается за момент коллапса t_c.

Из рис. 3 видно, что при $i = 30$ (что типично для $i < 30$) искажение сферичности пузырька практически на всем протяжении сжатия возрастает в виде нарастающих колебаний из-за проявления неустойчивости Биркгоффа–Плессета. При $i = 200$ (что типично для $i > 130$) амплитуда колебаний

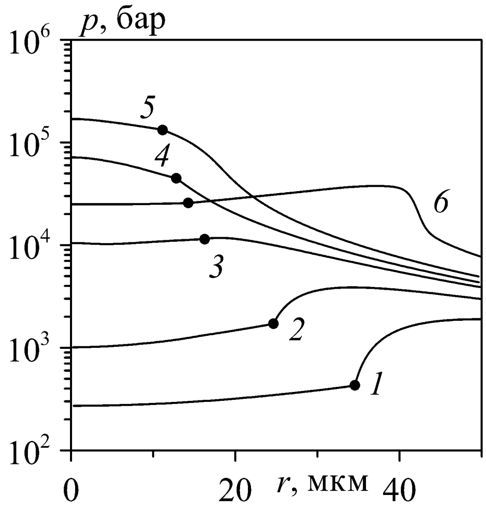


Рис. 2. Радиальные распределения давления в шесть последовательных моментов времени $t_1 = 11.6033$, $t_2 = 11.6113$, $t_3 = 11.6165$, $t_4 = 11.6185$, $t_5 = 11.6205$, $t_6 = 11.6267$ мкс (кривые *1-6* соответственно) финальной стадии сжатия (кривые *1-4*), момента коллапса (кривая *5*) и обратного движения пузырька после него (кривая *6*) (точкой указана граница пузырька, слева от нее — пар, справа — жидкость) в сферическом случае

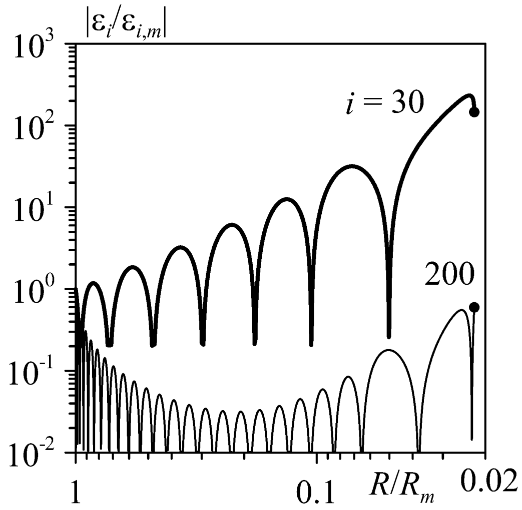


Рис. 3. Эволюция относительной амплитуды искажения сферичности пузырька $|\varepsilon_i/\varepsilon_{i,m}|$ при сжатии для $i = 30$ и 200 (точкой отмечен момент коллапса).

искажения сначала ($0.2 \le R/R_m \le 1$) в силу демпфирующего влияния вязкости жидкости уменьшается, а затем ($R/R_m < 0.2$) постепенно начинает расти, так что с некоторого радиуса ($R/R_m < 0.15$) она увеличивается практически аналогично случаю $i = 30$, где влияние вязкости жидкости несущественно. Отметим, что эти закономерности оказываются практически аналогичными случаю сжатия парового пузырька в дейтерированном ацетоне [3], и можно ожидать, что при использовании других жидкостей принципиальных отличий наблюдаться не будет.

На рис. 4 дана зависимость степени роста амплитуды несферичности пузырька при его сжатии $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ от номера i и ее огибающая при учете вязкости и при пренебрежении ею. Здесь под $|\varepsilon_{i,c}|$ понимается амплитуда максимального искажения сферичности пузырька в виде $P_i(\cos\theta)$ в процессе сжатия, которое обычно достигается либо в момент коллапса, либо незадолго до него. В силу колебаний ε_i в процессе сжатия зависимости степени роста амплитуды несферичности пузырька $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ от номера i имеют колебательный характер. Их огибающие используются в качестве приближений зависимостей от номера i максимальных значений степени роста амплитуды несферичности пузырька $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$, реализующихся при вариации начальной скорости $\dot{\varepsilon}_{i,m}$, которая в настоящей работе принимается равной нулю. Расчеты показывают, что такой подход является удовлетворительным.

Видно, что при учете вязкости жидкости с увеличением i от $i = 2$ до $i \approx 20$ величина $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ возрастает от 220 до 320. При дальнейшем увеличении номера i из-за влияния вязкости величина $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ начинает быстро уменьшаться. Если же вязкость жидкости не учитывать, то $\varepsilon_{i,c}$ с увеличением i возрастает неограниченно. Таким образом, из-за влияния вязкости жидкости при любых i величина $|\varepsilon_i|$ может возрасти при сжатии не более чем в 320 раз (это оказывается близким к случаю сжатия кавитационного пузырька в дейтерированном ацетоне).

4. Заключение

Проведено исследование развития малых деформаций сферичности кавитационного пузырька при его сильном сжатии в обычной воде в условиях, близких к экспериментам по акустической кавитации дейтерированного ацетона. Применялась математическая модель, в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую и несферическую составляющие. В рамках этой модели сферическая составляющая описывается уравнениями газовой динамики с реалистичными широкодиапазонными уравнениями состояния Нигматулина–Болотновой для жидкости и па-

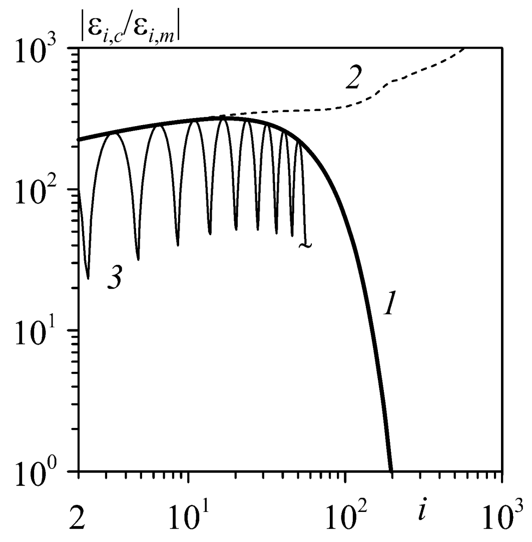


Рис. 4. Огибающие зависимостей степени роста амплитуды возмущений сферичности пузырька при его сжатии $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ от номера i при учете влияния вязкости (*1*) и при его пренебрежении (*2*) (*3* — фрагмент зависимости, полученной с учетом вязкости)

ра, построенными по экспериментальным данным. Учитываются нестационарная теплопроводность в обеих средах, неравновесные процессы испарения–конденсации на межфазной границе. Несферическая составляющая определяется без учета влияния сжимаемости жидкости и неоднородности параметров пара.

Обнаружено, что в отличие от случая, когда средой является дейтерированный ацетон, при сжатии кавитационного пузырька в воде, несмотря на высокую скорость сжатия (до 1.8 км/с), в паре не образуется сходящейся ударной волны.

Установлено, что без учета влияния вязкости жидкости амплитуда гармонических искажений сферичности пузырька в момент коллапса с уменьшением длины волны возмущения $\lambda = 2\pi R/i$ (R — радиус; i — номер сферической гармоники) неограниченно возрастает. При учете вязкости жидкости при любых i амплитуда малых начальных искажений сферичности пузырька может возрасти при сжатии не более чем в 320 раз.

Список литературы

[1] Putterman S.J., Weninger K.P. Sonoluminescence // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 445–476.

[2] Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. 2002. V. 295. P. 1868–1873.

[3] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Нигматулин Р.И., Топорков Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // МЖГ. 2010. № 1. С. 57–69.

[4] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. (Jr), Taleyarkhan R.P. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // Phys. Fluids. 2005. V. 17. № 10. 107106.

[5] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // ТВТ. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.

[6] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, т. 1 и 2. М.: Наука, 1987.

[7] Prosperetti A. Viscous effects on perturbed spherical flows // Quarterly of Appl. Math. 1977. V. 34. P. 339–352.

[8] Lin H., Storey B.D., Szeri A.J. Inertially driven inhomogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh-Plesset equation // J. Fluid Mech. 2002. V. 452. P. 145–162.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.529:534.2

Слабые волны в парогазовых смесях с полидисперсными каплями и частицами[1]

Федоров Ю.В.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Изучено распространение плоских, сферических и цилиндрических волн в парогазовых смесях с полидисперсными частицами и каплями, когда одна из фракций участвует в фазовых превращениях. Получено дисперсионное соотношение, рассчитаны дисперсионные кривые. Проанализировано влияние полидисперсности частиц и капель на дисперсию и диссипацию малых возмущений.

1. Введение

Проблема исследования нестационарных волновых процессов в многофазных системах с учетом неравновесных эффектов межфазного взаимодействия является одной из актуальных и фундаментальных проблем механики сплошных сред. Примерами многофазных (гетерогенных) систем могут служить различные смеси газа с каплями или частицами, жидкости с пузырьками газа, насыщенные жидкостью или газом пористые среды и многие другие. Из многочисленного разнообразия гетерогенных сред могут быть выделены дисперсные смеси, имеющие сравнительно регулярный характер и представляющие смесь двух фаз, одной из которых являются различные включения (частицы, капли или пузырьки). Исследование нестационарных волновых процессов в таких системах обычно осложняется необходимостью учета полидисперсного состава (неодинаковости размеров включений), поскольку в реальности маловероятно встретиться с включениями одинакового размера. При описании движения таких систем следует учитывать реальное распределение диспергированных включений по размерам, а также межфазный обмен массой, импульсом и теплом. Настоящая работа учитывает все эти нестационарные и неравновесные эффекты. Для обзора приведены некоторые работы по данной тематике [1–6].

[1]Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ (МК-1316.2010.1 и НШ-834.2012.1) по программе Президиума РАН №23П, при финансовой поддержке РФФИ (грант 10–01–00098) и Министерства образования и науки РФ (14.740.11.0351).

2. Некоторые результаты

В процессе описания возмущенного движения парогазовой смеси с полидисперсными каплями и частицами записывается линеаризованная система из 16 уравнений. В ходе решения получаются довольно громоздкие выражения, поэтому ограничимся лишь приведением некоторых результатов.

На рис. 1, 2 проиллюстрировано влияние полидисперсности капель воды и частиц золы на вид зависимостей относительной скорости звука и декремента затухания на длине волны от безразмерной частоты колебаний $\Omega_{5,3}$ ($\Omega_{5,3} = \omega\tau_{va}^{(5,3)}$, где ω — частота колебаний; $\tau_{va}^{(5,3)}$ — характерное время релаксации скорости дисперсной фазы; $a_{5,3}$ — средний радиус [3]). Переменные с индексом a соответствуют каплям воды радиуса a, с индексом b — частицам золы радиуса b. При расчетах принималось, что относительное массовое содержание капель воды $m_a = 0.3$; частиц золы $m_b = 0.3$; давление несущей фазы $p_1 = 0.1$ МПа ($T_0 = 271$ K); концентрация пара $k_V = 0.006$. Функции распределения капель и частиц по размерам соответственно равны: $N_0(a) = a^{-3}$, $N_0(b) = b^{-3}$. Радиусы капель воды и частиц золы были заданы следующим образом: $1 - a = 10^{-4}, b = 10^{-6}, 2 - a = 10^{-5}, b = 10^{-7}, a \in [10^{-5}, 10^{-4}], b \in [10^{-7}, 10^{-6}]$. Можно заключить, что в полидисперсном случае капель и частиц 3 с выбранными выше функциями распределения по размерам, затухание меньше по сравнению с монодисперсными случаями 1 и 2.

В частном случае парогазокапельной смеси без частиц ($m_b = 0$) имеются экспериментальные данные по декременту затухания на длине волны [7]. Эксперимент проводился в камере Вильсона. Измерение размеров и концентрации капель проводи-

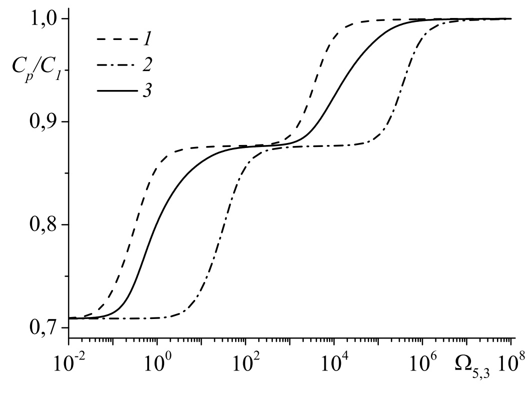


Рис. 1. Зависимости относительной скорости звука от безразмерной частоты колебаний

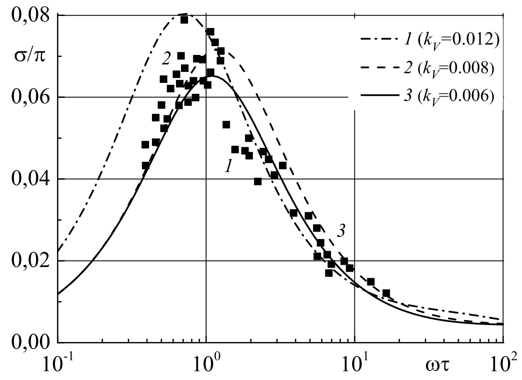


Рис. 3. Сопоставление теории с экспериментальными данными по декременту затухания

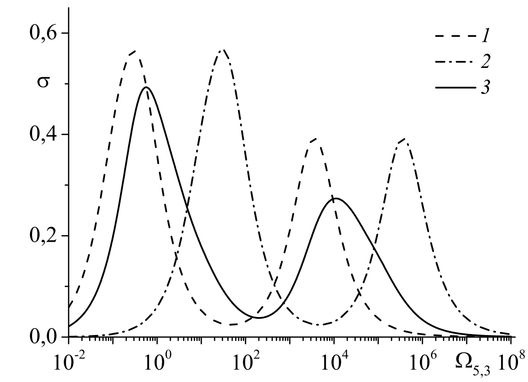


Рис. 2. Зависимости декремента затухания от безразмерной частоты колебаний

лось оптическими методами. Опыты проводились при массовом содержании капель $m_a \sim 10^{-3}$, частота колебаний составляла 80 Гц, радиус капель варьировался от 10^{-6} до 10^{-5} м. Три группы экспериментальных точек соответствуют трем экспериментам, проведенным при различных массовых содержаниях капель, а также различной температуре (разной концентрации пара в газообразной фазе):

$1 - T_0 = 281$ K, $m_a = 0.0076$, $k_V = 0.012$;

$2 - T_0 = 276$ K, $m_a = 0.0039$, $k_V = 0.008$;

$3 - T_0 = 271$ K, $m_a = 0.0038$, $k_V = 0.006$.

Отметим, что из-за сложности эксперимента следует большой разброс опытных данных ∼10–15%. На рис. 3 $\omega\tau$ — безразмерная частота колебаний, где $\tau = \dfrac{3\tau_{va}^{(3,1)}}{2m_a}$. В целом наблюдается удовлетворительное согласие теории и эксперимента. Наиболее важным параметром, влияющим на положение кривых, является концентрация пара k_V в несущей фазе. Точное определение значения k_V в экспериментах связано с большими трудностями, поэтому при его определении авторы экспериментов полагали, что начальное состояние является состоянием термодинамического равновесия, то есть $k_V = k_{VS}(T_0)$. Быть может по этой причине в некоторых случаях декремент затухания при одних значениях концентрации пара совпадает с экспериментальными данными, полученными при других значениях k_V.

К сожалению, для проверки теории в общем случае пока нет соответствующих экспериментальных данных.

3. Заключение

Полидисперсность включений оказывает существенное влияние на динамику распространения малых возмущений.

Список литературы

[1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1, Ч.2. М.: Наука, 1987.

[2] Temkin S., Dobbins R.A. Measurements of attenuation and dispersion of sound by an aerosol // J. Acoust. Soc. America. 1966. V. 40, № 5. P. 1016.

[3] Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1998.

[4] Gubaidullin D.A., Nigmatulin R.I. On theory of acoustic waves in polydispersed gas-vapor-droplets suspensions // Int. J. Multiphase Flow. 1998. V. 58 P. 230.

[5] Губайдуллин Д.А. Сферические и цилиндрические волны малой амплитуды в полидисперсных туманах с фазовыми превращениями // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 85.

[6] Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Уткина Е.А. Акустические волны в двухфракционных смесях газа с паром, каплями и твердыми частицами разных материалов и размеров при наличии фазовых превращений // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 1. С. 83.

[7] Cole J.E., Dobbins R.A. Measurements of attenuation and dispersion of sound by a warm air fog // J. Atm. Sci. 1971. V. 28, № 2. P. 202.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 533:517.958

Движение газа в цилиндрическом спиралевидном канале без вращения[1]

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Изучено распространение плоских, сферических и цилиндрических волн в парогазовых смесях с полидисперсными частицами и каплями, когда одна из фракций участвует в фазовых превращениях. Получено дисперсионное соотношение, рассчитаны дисперсионные кривые. Проанализировано влияние полидисперсности частиц и капель на дисперсию и диссипацию малых возмущений.

Трехмерные подалгебры, допускаемые уравнением газовой динамики с общим уравнением состояния, задают инвариантные решения, которые определяются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для трех подалгебр системы сводятся к неавтономным второго порядка [1]. Рассмотрим одну из них с номерами 3.4 из оптимальной системы [1] с базисом операторов:

$$X_1 = \partial_x, \quad \alpha X_4 + X_7 = a(t\partial_x + \partial_U) + \partial_\theta,$$

$$\beta X_4 + X_{11} = b\partial_U + t\partial_t + (bt + x)\partial_x + r\partial_r,$$

где α, β — действительные параметры неподобных подалгебр; t, x, r, θ — цилиндрические координаты. Инварианты задают представление газодинамических величин:

$$\begin{gathered} U = \alpha\theta + \beta\ln|t| + U_1(s),\ V = V(s),\\ W = W(s),\ \rho = \rho(s),\ S = S(s); s = rt^{-1}, \end{gathered} \tag{1}$$

— цилиндрические координаты скорости, плотность и энтропия.

Нормализатор группы 3.4 имеет базис X_1, X_4, X_7, X_{11}. Однопараметрические группы операторов нормализатора действуют на решениях (1):

$$\begin{gathered} X_1 : \bar{x} = x + a;\ X_4 : \bar{U} = U + a_4;\ X_7 : \bar{\theta} = \theta + a_7;\\ X_{11} : \bar{t} = ta_{11},\ \bar{r} = ra_{11},\ \bar{x} = xa_{11}. \end{gathered} \tag{2}$$

Подстановка представления (1) в уравнения газовой динамики дает систему из 5 дифференциальных уравнений. У этой системы найдено 3 интеграла [1]:

$$\begin{gathered} S = S_0,\ \ sW^2 = D\rho(V - s),\\ U_1 = -\int_{s_0}^{s} \frac{\beta s + \alpha W}{s(V - s)} ds. \end{gathered} \tag{3}$$

Остаются два неавтономных уравнения

$$\begin{gathered} V' + (V - s)\rho^{-1}\rho' = -Vs^{-1},\\ (V - s)V' + a^2\rho^{-1}\rho' = Ds^{-2}\rho(V - s), \end{gathered} \tag{4}$$

где $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния; $a^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука.

Особое решение $f_\rho = (V - s)^2$ рассмотрено в [1] и возможно лишь для уравнения состояния $p = p_0 - 4^{-1}D\rho^2$. Особое решение описывает истечение в вакуум из мгновенного линейного источника по логарифмическим спиралям на параболоиде.

Если $f_\rho \neq (V - s)^2$, то система (4) разрешается относительно производных. Рассмотрим подмодель без закрутки $D = W = 0$. Первое уравнение системы (4) инвариантно относительно растяжения $s \to \alpha s$, $V \to \alpha V$, $\rho \to \beta\rho$, где α, β параметры растяжения. Второе уравнение системы (4) без закрутки принимает вид

$$(V - s)V' + \alpha^{-2}a^2(\beta\rho)\rho^{-1}\rho' = 0.$$

Это уравнение инвариантно, если выполнено функциональное уравнение $a(\beta\rho) = \alpha a(\rho)$. Решение функционального уравнения таково: $a = a_0\rho^k$, $\alpha = \beta^k$. Полученное решение можно положить в основу асимптотического решения подмодели (4) без закрутки с общим уравнением состояния:

$$a^2 = \rho^{2k}(a_0^2 + a_1\rho + \ldots), \quad \alpha = \beta^k,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1\beta + \ldots, V = V_0 + V_1\beta + \ldots$$

[1]Работа поддержана грантом правительства РФ № 11.G34.31.0042.

В нулевом приближении по степеням β получим асимптотическую подмодель (индекс «0» опускаем):

$$V'+(V-s)\rho^{-1}\rho' = -Vs^{-1},\ (V-s)V'+a_0^2\rho^{2k-1}\rho' = 0.$$

Старшие приближения задаются линейными уравнениями. Все приближения допускают оператор $s\partial_s + V\partial_V + \frac{1}{k}\rho\partial_\rho$. В инвариантах растяжения $v = Vs^{-1}$, $\sigma = a_0\rho^k s^{-1}$ получим автономную систему :

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{\sigma}{v}\frac{\sigma^2-(v-1)\left(v\,(k+1)-1\right)}{2\sigma^2-(v-1)^2}, \tag{5}$$

$$\frac{ds}{s} = F(v)\frac{dv}{v},\quad \frac{(v-1)^2-\sigma^2}{2\sigma^2-(v-1)^2} = F(v). \tag{6}$$

Уравнение (5) имеет две интегральные прямые $\sigma = 0$, $v = 0$ в плоскости (v,σ). Достаточно рассмотреть случай $\sigma \geq 0$, $s \geq 0$, так как допускается отражение $s \to -s$ $(t \to -t)$, $\sigma \to -\sigma$. В конечной части полуплоскости $\sigma \geq 0$ уравнение (5) имеет 4 особые точки.

Точка $O(0,0)$ — вырожденный узел, точка $(0,1)$ — узел, точка $(1,0)$ — вырожденная особая точка типа седло–узел, точка $S(v_s,\sigma_s)$, $v_s = (2k+1)^{-1}$, $\sigma_s = \sqrt{2}v_s k$ — седло. Картина интегральных кривых построена в работе [2], в которой рассмотрены движения газа для решений подмодели (5), (6), соответствующих особым точкам.

Рассмотрим интегральную кривую из седла S в узел O. Сепаратриса седла имеет асимптотическое поведение:

$$\sigma = \sigma_s + k_1v_1 + k_2v_1^2 + \dots,\ v_1 = v - v_s,$$

где k_1 — положительный корень уравнения $4k_1^2 - 2\sqrt{2}(k-1)k_1 - k(2k+3) = 0$, а k_2 задается равенством

$$4kk_2\left(3\sqrt{2}k_1 + 2 - k\right) = \\ = (2k+1)\left[k_1k\left(\frac{5}{2} - 3k\right) - \sqrt{2}k\left(2k^2 + \frac{7}{2}k + \frac{1}{4}\right)\right].$$

Асимптотика интегральных кривых уравнения (5) в узле O такова

$$\sigma = Cv\left(1 - kv + \frac{1}{2}\left(C^2 + k(k-1)\right)v^2 + \dots\right),$$

где C — произвольная постоянная. Численно можно определить значение постоянной $C = C_s(k)$, с которой сепаратриса седла входит в узел.

Пусть $\sigma = \sigma_s(v)$ сепаратриса седла, входящая в узел. Это монотонно возрастающая, выпуклая вверх кривая, определенная в интервале $[0, v_s]$.

Уравнение (6) определяет решение подмодели

$$s = s_0 \exp\int_0^v F(v)\frac{dv}{v}\ \text{или}\ s = s_1\exp\int_{v_s}^v F(v)\frac{dv}{v}, \tag{7}$$

где $s_1 = s_0\exp\int_0^{v_s} F(v)\frac{dv}{v}$ и в выражении (6) для $F(v)$ вместо σ подставлено $\sigma = \sigma_s$.

Решение (1) принимает вид

$$U = \alpha\theta + \beta\ln|t| - \beta\int_{s_0}^s \frac{ds}{s(v-1)}, \\ V = sv(s),\quad W = 0,\quad s = rt^{-1}, \tag{8}$$

где $v(s)$ определяется равенством (7).

Мировые линии частиц задаются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = U,\quad \frac{dr}{dt} = V,\quad r\frac{d\theta}{dt} = W, \\ x(t_0) = x_0,\quad r(t_0) = r_0,\quad \theta(t_0) = \theta_0.$$

Для решения (8) мировые линии через параметр v задаются формулами $(r_0 = t_0s_0)$

$$\theta = \theta_0,\quad x = x_0 + (\alpha\theta_0 + \beta\ln|t_0|)(t - t_0), \\ r = r_0\exp\int_0^v F(v)\frac{dv}{v-1}, \\ t = t_0\exp\int_0^v F(v)\frac{dv}{v(v-1)}. \tag{9}$$

Любую мировую линию, заданную лагранжевыми координатами (x_0, r_0, θ_0), можно привести к стандартной, используя преобразования (2). Стандартная кривая задана формулами (9) с $x_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $r_0 = 1$, при этом $t_0 = s_0^{-1}$ — параметр, связанный с решением (8). В полуплоскости $\theta = \theta_0$ стандартная кривая сдвигается по оси x. Через 2π сдвиг составляет $2\pi\alpha$. Значит непрерывного во всем пространстве решения нет. Но можно рассмотреть другое решение (8) с новой постоянной s_0 так, чтобы гладким образом склеить решения на разрыве. Таких решений можно взять бесконечно много, чтобы получить гладкое решение во всем пространстве. При этом возникает спиралевидная поверхность–стенка, двигающаяся с частицами, находящимися с одной стороны (относительная скорость нулевая). Относительная скорость частиц с другой стороны стенки ненулевая. Относительная скорость с каждым витком спиралевидной стенки возрастает так, что при стремлении к оси x скорость стремится к бесконечности.

В результате частицы без вращения вокруг оси x двигаются между спиралевидной стенкой к оси x, увеличивая скорость вдоль оси x до бесконечности за счет импульса двигающейся стенки.

Список литературы

[1] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.

[2] Гумеров И.Ф. Плоскопараллельная галилеево осесимметричная галилеево автомодельная подмодель газовой динамики без закрутки // Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург. 2010. С. 244–247.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 533:544.452

Горение залпового выброса пропана в каньоне между зданиями

Хамидуллин И.Р.

Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, Нефтекамск

В работе представлены результаты численных расчетов горения облака, содержащего пропан, на основе схемы с учетом кинетики химических реакций. Проанализировано влияние наземных объектов на распространение полей температур и давления.

1. Введение

В ближайшие десятилетия объемы потребления легких углеводородных соединений, как одного из главных источников энергии, будут только возрастать. В частности, это связано также с большими запасами природного газа в виде газогидратов. Природный газ обладает такими достоинствами, как достаточно высокая экологическая чистота продуктов сгорания, сравнительно дешевые добыча, переработка и транспортировка. Однако при нормальных условиях природный газ имеет большой удельный объем, поэтому хранение и транспорт осуществляется при высоких давлениях. Все это значительно повышает вероятность аварийных ситуаций из-за возможных нарушений герметичности емкостей и трубопроводов.

Моделирование таких процессов и их последствий путем натурных физических экспериментов было и является основным способом исследований, но требует больших затрат. В настоящее время, благодаря успехам в развитии компьютерной техники, наиболее рациональным и распространенным методом является численное моделирование динамики выбросов в атмосфере, которое позволяет проводить прогнозирование последствий, оценку ущерба и разработку мер защиты. Последствия аварий, сопровождаемых горением газовоздушных облаков, оцениваются по размерам зоны разрушений и зоны, подвергшейся тепловому воздействию продуктов горения. Большинство промышленных зданий разрушается от избыточных давлений 25–30 кПа при внешних и 20–25 кПа при внутренних взрывах [1]. Зона теплового воздействия определяется безопасным для живых организмов расстоянием от центра взрыва, которое по оценкам [2] должно в 3–4 раза превышать радиус образующегося огненного шара продуктов горения ($R_{EV} \approx 3.6 R_{FB}$). Таким образом, основной задачей численного моделирования горения облака углеводорода на местности является оценка зон разрушения и теплового воздействия продуктов горения на основе рассчитанных полей давления и температуры.

В данной работе рассмотрен процесс горения газообразной смеси пропана с воздухом в рамках упрощенной модели диссоциации продуктов горения.

2. Основные уравнения

Рассмотрим облако как смесь газов, которая принимается за гомогенную среду с плотностью ρ, температурой T, давлением p. Пусть $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ — скорость этой среды, определяемая как среднемассовая скорость составляющих

$$\rho\vec{v} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i. \qquad (1)$$

Введем среднемассовые концентрации каждой компоненты смеси $k_i = \rho_i/\rho$. Здесь и в дальнейшем индексы $i = 1, \ldots, 6$ будут соответствовать углеводороду, кислороду, углекислому газу, водяному пару, окиси углерода и азоту (C_nH_m, O_2, CO_2, H_2O, CO, N_2). Эти значения концентраций удовлетворяют условию

$$\sum_i k_i = 1. \qquad (2)$$

Для смеси газов выполняется закон Дальтона, и для определения давления смеси используем уравнение Менделеева–Клапейрона

$$p = \rho R_g T, R_g = R \sum_i \frac{k_i}{\mu_i}, \qquad (3)$$

где R — универсальная газовая постоянная; μ_i — молярные массы газов. На основе принятых предположений можем записать систему, описывающую динамику облака газов, в которую входят уравнения неразрывности, диффузии, импульсов для всей смеси и уравнение теплового баланса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^k \rho v^k = 0, \tag{4}$$

$$\rho \frac{dk_i}{dt} = -\nabla^k (\rho \frac{\nu_t}{\sigma_d} \nabla^k k_i) + R_i, \tag{5}$$

$$\rho \frac{dv^k}{dt} = -\nabla^k p + \rho g^k + \nabla^n \tau^{kn}, \tag{6}$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla^k \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_t} \nabla^k T \right) + q_1 R_1 + q_5 R_5 - Q_r, \tag{7}$$

где k_i — массовые концентрации компонент смеси; R_i — скорости изменения концентраций в результате химической реакции; q_1, q_5 — удельные теплоты сгорания углеводорода и окиси углерода; Q_r — тепловой вклад диссоциации продуктов сгорания. Удельная теплоемкость смеси определяется через удельные теплоемкости компонент

$$c_p = \sum_i c_{pi} k_i. \tag{8}$$

Для более детального описания процессов тепломассопереноса к данной системе уравнений (3)–(7) добавляются дополнительные уравнения $k\varepsilon-$модели для определения энергии турбулентных пульсаций K, диссипации ε и для коэффициента кинетической турбулентной вязкости ν_t:

$$\rho \frac{dK}{dt} = \nabla^k \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_K} \nabla^k K \right) + \tau^{kn} \nabla^k v^n - \rho \varepsilon, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla^k \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_{\ \varepsilon}} \nabla^k \varepsilon \right) + \\ + \frac{\varepsilon}{K} \left(C_{1\varepsilon} \tau^{kn} \nabla^k v^n - C_{1\varepsilon} \rho \varepsilon \right), \end{gathered} \tag{10}$$

$$\nu_t = C_\mu K^2 / \varepsilon. \tag{11}$$

Здесь $\tau^{kn} = \rho \nu_t \left(\nabla^n v^k + \nabla^k v^n - \frac{2}{3} \nabla^j v^j \delta_{kn} \right) - \frac{2}{3} \rho K \delta_{kn}$ — турбулентная составляющая тензора касательных напряжений; $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.43$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_K = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$ — эмпирические константы.

Скорость химической реакции определяется температурой смеси (через соотношения Аррениуса) и считается, что перемешивание смеси, следовательно, и доставка окислителя к топливу происходят очень быстро. Согласно данной схеме учитываются процессы образования монооксида углерода [3]

$$\begin{gathered} C_n H_m + \nu_2 O_2 \rightarrow \nu_5 CO + \nu_4 H_2 O, \\ 2CO + O_2 \rightleftarrows 2CO_2. \end{gathered} \tag{12}$$

Также учитывается диссоциация молекул воды и азота горения при высокой температуре согласно следующим схемам

$$H_2 O \rightleftarrows OH + H, N_2 + O_2 \rightleftarrows 2NO. \tag{13}$$

Как показывают оценки, концентрации окисей водорода и азота (OH и NO) при температурах ниже 2500 K, реализуемых для рассматриваемых смесей, малы ($\sim 1\%$). Кроме того, характерные времена химических превращений с образованием и рекомбинацией этих компонент значительно меньше по сравнению с временами диффузионного перемешивания. Поэтому дополнительным диффузионным переносом этих составляющих смеси в общем балансе масс будем пренебрегать. В соответствии с этими допущениями уравнение масс для окисей водорода и азота имеет вид

$$\rho \frac{dk_{r,j}}{dt} = R_{r,j}, \tag{14}$$

где $k_{r,j}$, $(j = 1, 2)$ — концентрации OH и NO; $R_{r,j}$ — скорости изменения концентраций в результате диссоциации. В то же время образование и исчезновение сопровождаются значительными тепловыми эффектами, поэтому будем учитывать их вклад в теплоемкость (8) и в уравнение теплового баланса (7)

$$Q_r = q_{r1}(R^+_{r1} - R^-_{r1}) + q_{r2}(R^+_{r2} - R^-_{r2}).$$

Здесь q_{r1}, q_{r2} — удельные теплоты образования; R^+_{r1}, R^-_{r1}, R^+_{r2}, R^-_{r2} — скорости реакции образования и рекомбинации OH и NO, соответственно. Скорость реакции горения углеводорода определяется согласно закону Аррениуса как

$$R_1 = \frac{\rho \mu k_1}{\mu_1} \frac{\rho \mu k_2}{\mu_2} A_1 \exp \left(-\frac{E_{a1}}{RT} \right). \tag{15}$$

Реакция горения окиси углерода обратима, поэтому скорости прямой и обратной реакции выражаются соотношениями [3]:

$$\begin{gathered} R^+_2 = \frac{\rho \mu k_5}{\mu_5} \frac{\rho \mu k_2}{\mu_2} A_2 \exp \left(-\frac{E_{a2}}{RT} \right), \\ R^-_2 = \rho^2 \frac{\mu k_3}{\mu_3} A_3 \exp \left(-\frac{E_{a3}}{RT} \right), \end{gathered} \tag{16}$$

где A_1, A_2, A_3 — константы реакции; E_{a1}, E_{a2}, E_{a3} — энергии активации.

Скорости изменения концентраций других компонент смеси через R_1, R_2^+ и R_2^- выражаются по формулам [3]:

$$R_2 = -R_1\nu_2\mu_2 - R_2^+\mu_2, R_3 = 2R_2^+\mu_3 - 2R_2^-\mu_3,$$
$$R_4 = R_1\nu_4\mu_4, R_5 = R_1\nu_5\mu_5 - 2R_2^+\mu_5 + 2R_2^-\mu_5.$$

Константы реакций диссоциации и рекомбинации (13) имеют вид [4]:

$$\begin{gathered} R_{r1}^+ = \rho^2\frac{\mu k_4}{\mu_4}A_{r1}^+\exp\left(-\frac{E_{ar1}}{RT}\right), \\ R_{r1}^- = \rho^2\frac{\mu k_{r1}}{\mu_{r1}}A_{r1}^-T^{n_1}, \\ R_{r2}^+ = \rho^2\frac{\mu k_2}{\mu_2}A_{r2}^+\exp\left(-\frac{E_{ar2}}{RT}\right), \\ R_{r2}^- = \rho^2\frac{\mu k_{r2}}{\mu_{r2}}A_{r2}^-T^{n_2}. \end{gathered} \tag{17}$$

3. Начальные и граничные условия

При залповых намеренных и аварийных выбросах углеводородов могут образоваться облака различной конфигурации. Но, в большинстве случаев горения облака в открытой атмосфере, когда горизонтальные и вертикальные линейные размеры облака одного порядка, начальная форма практически не играет роли. Конфигурация зон, охваченных продуктами горения, приобретает обычно куполообразную форму. Поэтому в дальнейшем для удобства задания начальных условий на прямоугольной сетке примем исходную форму облака в виде куба.

В начальный момент времени температура окружающего воздуха T_a однородна во всей расчетной области, давление определяется распределением Больцмана

$$p_a(x,y,z,0) = p_{a0}\exp(-\mu_a gz/RT_a),$$

где p_{a0} — нормальное атмосферное давление.

Скорость движения в начальный момент времени равна нулю во всей расчетной области:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x,y,z,0) = 0.$$

В облаке горючей смеси в начальный момент времени давление соответствует распределению давления в окружающей атмосфере, и температура в облаке T_g однородна и равна температуре окружающего воздуха. Начальные значения энергии турбулентных пульсаций K и диссипации энергии ε определяются решением задачи о горизонтально однородном воздушном стационарном турбулентном потоке над поверхностью с шероховатостью z_0 в виде [5]:

$$K(x,y,z,0) = \bar{K}(z) = \sqrt{C_\mu}v_*^2,$$
$$\varepsilon(x,y,z,0) = \bar{\varepsilon}(z) = \frac{v_*^3}{\kappa(z+z_0)},$$

где $\kappa = 0.41$ — постоянная Кармана; v_* — динамическая скорость.

Расчетная область ограничена 6-ю плоскими границами. Верхняя и боковые границы являются открытыми и на них для параметров задаются фоновые значения. Нижняя граница является закрытой и на ней скорость равна нулю. Размеры расчетной области выбраны достаточно большими, чтобы за характерные времена горения облака возмущения, отраженные от границ, не достигли исследуемой области.

Значения энергии турбулентных пульсаций и диссипации энергии на открытых границах равны фоновым значениям, а на нижней границе — ставятся условия непротекания

$$\frac{\partial K(x,y,0,t)}{\partial z} = 0.$$

4. Численная схема

Численная схема решения системы уравнений (3)–(11), (14) основана на методе крупных частиц. К преимуществам данного метода относится устойчивость в широком диапазоне скорости движения среды. Трехмерная постановка задачи позволяет моделировать динамику облака углеводорода при произвольной конфигурации наземных объектов (зданий, лесных насаждений) и с учетом рельефа местности.

Описание работы данной численной схемы применительно к процессам распространения атмосферных выбросов приводится в работе [6]. В настоящее работе к этой схеме добавлена часть, моделирующая процесс горения углеводородов.

5. Результаты расчетов

В процессе горения смеси углеводорода и воздуха в открытой атмосфере образуется облако раскаленных газов — продуктов горения. При температуре газов выше 1000 K излучение облака находится в видимой области спектра. Такое облако из-за круглой формы часто называют огненным шаром. Основными параметрами огненного шара являются максимальный диаметр D_{FB} и время жизни t_{FB}. В результате многочисленных полевых экспериментов [7–10] в открытой местности было показано, что эти параметры определяются начальной массой топлива M_0 и для значений $M_0 = 1 - 10^3$ кг получены эмпирические зависимости в виде $D_{FB} = (5.8 - 6.25)M_0^{1/3}$ и $t_{FB} = (0.30 - 0.45)M_0^{1/3}$. Здесь D_{FB}, t_{FB}, M_0 измеряются в м, с и кг, соответственно.

Проведено сравнение результатов расчетов с эмпирическими кривыми. Начальное значение массы топлива в облаке горючей газовой смеси ва-

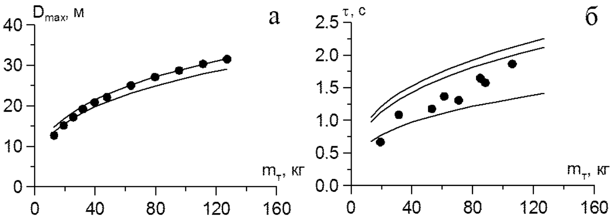


Рис. 1. Сравнение результатов расчета с результатами физических экспериментов: а — максимальный диаметр огненного шара, б — время жизни огненного шара. Сплошной линией обозначены эмпирические кривые, точками — варианты расчетов

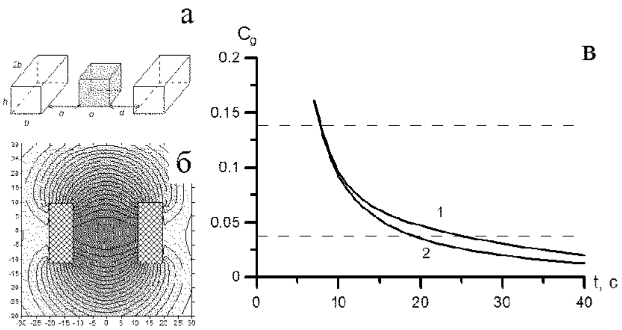


Рис. 2. Перемешивание залпового выброса пропана с окружающим воздухом: а — конфигурация строений и начального положения облака (размеры: $a = 8$ м, $d = 12$ м, $b = h = 10$ м), б — форма облака в момент зажигания (вид сверху), в — эволюция максимального значения концентрации пропана в облаке при наличии (1) и отсутствии строений (2)

рьировалось путем изменения начальных значений объема облака и концентрации углеводорода. В расчетах максимальный диаметр D_{FB} и время жизни t_{FB} огненного шара определялись по уровню температуры 1000 K. Сравнение показывает (рис. 1), что расчетные точки D_{FB} и t_{FB} лежат в коридоре, указанном в эмпирической зависимости. Таким образом, результаты расчетов находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

На основе представленных теоретических построений были проведены расчеты процесса горения облака углеводородно-воздушной смеси, образовавшейся в результате залпового выброса на местности. Этому этапу предшествует период формирования горючей смеси в результате перемешивания углеводородного газа с окружающим воздухом. Чаще всего происходит выброс чистого углеводорода, и поэтому первоначально его концентрация в облаке близка к единице. Период перемешивания с окружающим воздухом должен быть достаточно длительным, чтобы объемное содержание углеводорода в смеси снизилось до значений, входящих в диапазон воспламенения (например, для пропана $\alpha = 2.3-9.5\%$). Многие газообразные углеводородные соединения тяжелее воздуха, и наряду с перемешиванием происходит также их оседание и накопление у подстилающей земной поверхности, что наиболее опасно с точки зрения ущерба, наносимого в результате горения образовавшегося облака. Такая ситуация часто возникает на промышленных площадках и жилых массивах при утечке бытового газа. Сложная конфигурация наземных объектов приводит к локализации горючей смеси в отдельных участках. Как показывают многочисленные теоретические и экспериментальные исследования [7], наиболее интересным с практической точки зрения является возгорание облаков с начальной массой топлива $M_0 = 10^1 - 10^3$ кг. Такие процессы протекают в течение 1–10 с, за которые теплота, выделяемая в процессе горения, не успевает рассредоточиться в пространстве в результате теплопереноса, и температура в облаке достигает высоких значений, соответствующих адиабатическому процессу.

Рассмотрим случай залпового выброса пропана в простейшей конфигурации строений — в городском каньоне, образованном двумя зданиями, расположенными симметрично относительно центра выброса. Когда начальные размеры выброса сопоставимы с размерами строений (рис. 2(а)), форма облака определяется преимущественно конфигурацией этих строений [6]. Примем, что в начальный момент времени залповый выброс чистого пропана в виде облака кубической формы находится на горизонтальной подстилающей поверхности в центре расчетной области на удалении от зданий, равном размеру облака. Был рассмотрен ряд случаев с различными начальными объемами выбросов $V = 100 - 1000$ м^3 (длина ребра куба изменялась в пределах от 5 до 10 м) и установлено, что разрушительное действие пожара становится катастрофическим, начиная с объема 500 м^3. Далее проанализированы результаты расчетов для начального объема $V = 512$ м^3 ($M_0 = 904$ кг).

В процессе перемешивания с окружающим воздухом значение концентрации горючего газа в центре облака в этом случае снижается со временем значительно медленнее по сравнению с выбросом в отсутствии зданий (рис. 2(б)). Это отличие наблюдается с момента времени ($t = 8$ с), когда фронт об-

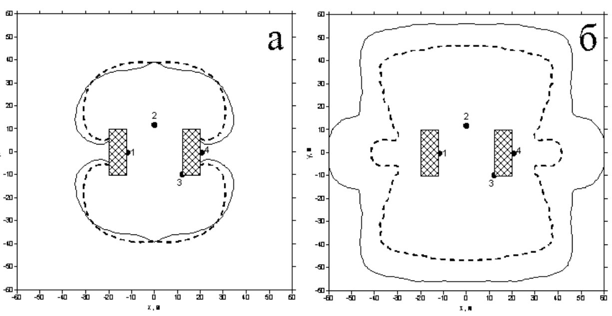


Рис. 3. Зоны теплового (а) и силового (б) воздействий при горении пропано-воздушного облака (сплошная линия для момента зажигания $t_з = 15$ с, пунктирная — 20 с)

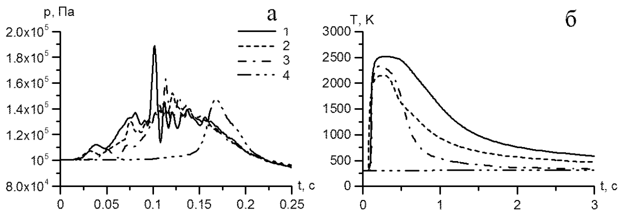


Рис. 4. Эволюция давления (а) и температуры (б) в характерных точках расчетной области при горении облака пропана в каньоне между двумя зданиями для момента зажигания $t_з = 20$ с

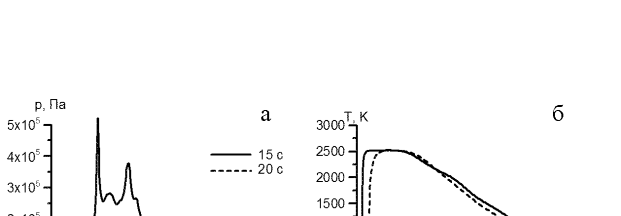


Рис. 5. Сравнение давления (а) и температуры (б) на стене здания (точка 1) для моментов зажигания $t_з = 15$ и 20 с.

лака достигает строений. Отрезок времени с момента выброса до момента, когда смесь в облаке становится негорючей (т.е. бедной) назовем периодом взрывоопасности $t_{вз}$. Наличие зданий приводит к значительному затягиванию этого периода ($t_1 \approx 25$ с по сравнению с $t_2 \approx 18$ с при отсутствии зданий), т.е. здания препятствуют рассеянию облака.

Для анализа последствий горения образовавшейся смеси наиболее интересны моменты зажигания $t_з = 15$ и 20 с. При этих значениях объемная доля пропана в большей части облака близка к стехиометрическому соотношению ($\alpha_g \approx 4.1, 3.1\%$, что соответствует массовой концентрации $C_g = 0.061, 0.047$).

Для количественной оценки последствий горения необходимо проанализировать поля температуры и давления около подстилающей поверхности. На рис. 3 представлена конфигурация зон теплового и разрушительного воздействий, границы которых определены как огибающая площади, в которой в течение всего процесса горения температура и давление превысили критические значения ($T_{кр} = 1000$ К, $p_{кр} = 1.3$ атм). Следует отметить, что зоны теплового воздействия для двух моментов зажигания отличаются незначительно, так как определяются в основном начальной массой топлива в смеси. Зоны разрушений различаются существенно из-за более высокой плотности энерговыделения при раннем зажигании.

На рис. 4 представлены расчетные осциллограммы для ряда характерных точек, указанных на рис. 3, для момента зажигания $t_з = 20$ с. Значения температуры в каньоне между зданиями (точки 1, 2, 3) достигают величин порядка 2000 К и превышают $T_{кр}$ в течение 0.5–1.5 с. Значение температуры за зданием (точка 4) повышается незначительно ($\Delta T = 13$ К) и, по-видимому, только за счет конвективного переноса тепла из очага горения. Пиковые значения давления в каньоне (точки 1, 2 ,3) превышают критическое значение $p_{кр}$. Колеблющийся характер давления объясняется отражением от стен строений. При этом максимальное значение избыточного давления достигается на стене здания (точка 1), что в 1.15 раза больше значения в точке 2 на таком же расстоянии от центра очага возгорания в открытом пространстве. Это позволяет утверждать об усиливающей роли стен зданий.

Для момента зажигания $t_з = 15$ с качественная картина процесса горения облака не отличается. Как уже отмечалось, количественные различия существенны для поля давления и незначительны для поля температуры. Сравнение этих величин (рис. 5) в точке 1 на стене здания показывает, что пиковые значения давления отличаются в 2.8 раза.

Таким образом, результаты расчетов позволяют определить детальную картину полей температур и давлений в очаге горения в городском каньоне и получить количественную оценку разрушительного действия техногенных или умышленных пожаров с выбросом углеводородов.

6. Заключение

В работе представлены результаты численных расчетов горения облака пропана в атмосфере на основе схемы горения с учетом кинетики химических реакций. Получены поля температуры и давления при горении пропана в открытой местности и при наличии наземных объектов. Рассчитаны зоны разрушений и теплового воздействия продуктов горения на местности. Показано, что наличие наземных объектов существенно усиливает разрушительное действие горения облака выбросов. Это обусловлено, во-первых, затягиванием в 1.2–1.5 раза процесса рассеяния облака — концентрация горючего газа дольше находится в диапазоне воспламенения смеси, во-вторых, усилением в 1.4–2 раза избыточного давления в ограниченных объемах между объектами.

Список литературы

[1] Бесчастнов М.В. Промышленные взрывы. Оценка и предупреждение. М.: Химия, 1991. 432 с.

[2] Маршалл В. Основные опасности химических производств. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 672 с.

[3] Smirnov N.N., Nikitin V.F., Legros J.C. Ignition and combustion of turbulent dust-air mixtures // Combustion and Flame. 2000. V. 123. Pp. 46-67.

[4] Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник в 3-х томах. Т.2: Физико-химическая кинетика и термодинамика./ Под ред. Г.Г. Черного и С.А. Лосева. М.: Изд. МГУ, 2002. 368 с.

[5] Бояршинов М.Г. Модели переноса и рассеяния примесей в растительном массиве. Пермь: ПГТУ, 2000. 142 с.

[6] Баянов И.М., Гильмуллин М.З., Шагапов В.Ш. Расчет растекания тяжелого газа вдоль земной поверхности по трехмерной модели // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 6. С. 130–139.

[7] Johnson D.M., Pritchard M.J. Large-scale experimental study of boiling liquid expanding vapour explosions (BLEVEs). / 14th Int. LNG/LPG Conference & Exhibition, Gastech, 1990. Pp. 1–30.

[8] Gayle J.B., Bransford J.W. Size and duration of fireballs from propellant explosions / Tech.Rep.NASA TM X 53314, George C. Marshall Space Center, Huntsville, Alabama, 1965.

[9] High R.W. The Saturn fireball // Annals of New York Academy of Sciences. 1968. V. 152. Pp. 441–451.

[10] Roberts A.F. Thermal radiation from releases of LPG from pressurised storage // Fire Safety Journal, 1981/82. № 4. Pp. 197–212.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.0758;539.374

Молярный перенос в двухфазной среде

Хусанов И.Н.*, Ходжаев Я.Д., Мирзоев А.А.****

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
**Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан

В данной работе предлагаются реологические модели состояния двухфазных сред и уравнения напряженно-деформационных состояний, учитывающие объемные содержания реологических свойств фаз. Решением ретардационной модели жидкости в виде двухфазной среды установлены неизвестные до настоящего времени объективно существующие процессы вязкого преддействия и последействия.

1. Введение

Из анализа большого количества работ по деформации и течению дисперсных систем следует, что в этих системах одновременно проявляются упругие и вязкие свойства [1, 2, 12–15]. Например, под действием нагрузки пространственная сетка в дисперсионной системе разрушается и частицы дисперсной фазы приобретают текучие свойства, т.е. теряют в определенном количестве упругие свойства, а при снятии нагрузки в результате взаимодействий между собой частицы дисперсной фазы образуют структуру, приводящую к резкому повышению вязкости и приобретению системой свойств твердых деформируемых тел (пластические смазки, глинистые растворы и т.д.). Также из наблюдения течений даже вязкой жидкости следует, что при снятии нагрузки жидкость не прекращает свое движение и деформирование мгновенно, что свидетельствует о проявление не только ньютоновской силы инерции, но и деформационной инерции. Это новое деформационное свойство было установлено и описано в [4–6].

В исследованиях течений сред, содержащих несколько фаз, находящихся в различных агрегатных состояниях и движущихся при небольших скоростях (относительно турбулентных потоков), в последние годы исследователями развиваются представления о том, что в этих средах перенос физической субстанции осуществляется не только на молекулярном, но и молярном уровнях [3–7].

В данной работе, основываясь на результатах [3–7], где разработаны способы получения механических и реологических моделей упруго-вязко-инертных сред, предлагаются реологические модели состояния двухфазных сред и их уравнения напряженно-деформационных состояний. Решением уравнения ретардирующей жидкости в виде двухфазной реологической модели среды установлены неизвестные до настоящего времени объективно существующие процессы вязкого преддействия и последействия.

2. Постановка и решения проблемы

Представим себе среду, состоящую из частиц ньютоновской жидкости, обладающей вязкими свойствами; твердых частиц, обладающих упругими свойствами, а также связанных в комплексы большого количества того и другого сортов частиц. Эти, связанные в комплексы частицы, назовем «молярной» фазой, состоящие из крупных относительно частиц первой и второй фаз и проявляющие свойства деформационной инертности [7].

Как известно, жидкие свойства определяются динамической вязкостью жидкости — μ, свойства твердых частиц, как твердого тела определяются коэффициентом упругости — G, а установленное новое свойство «молярной» фазы — крупных относительно частиц первой и второй фаз и проявляющих свойства деформационной инертности определяется коэффициентом линейной плотности молей — m_ℓ.

Предполагая, что в выделенном объеме находятся два сорта частиц и они распределены случайным образом, и каждый сорт частиц занимает определенную долю объема, то эта часть объема будет обладать свойствами тех частиц, которые в нем находятся. Если в данном объеме находятся частицы ньютоновской жидкости, то эта часть объема будет обладать свойством, выражающимся истинной динамической вязкостью μ_i, а вторая часть выделенного объема, содержащая более крупные частицы, будет обладать свойством деформационной инерт-

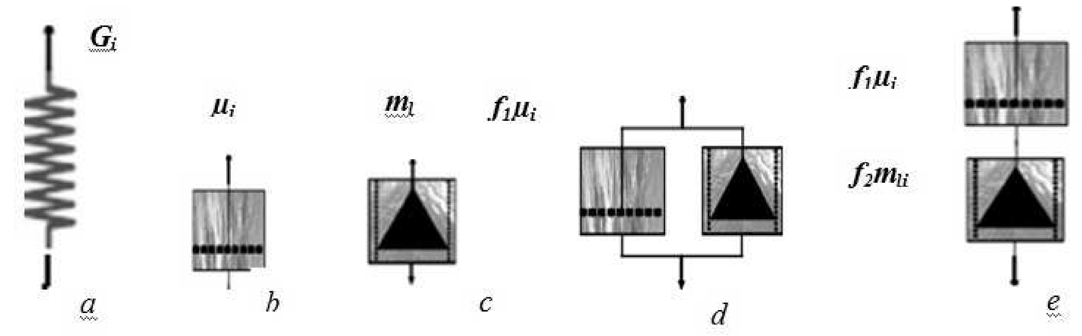


Рис. 1. Механические элементы a, b, c. Параллельное и последовательное соединение элементов Ньютона и деформационной инертности d, e

ности, это свойство определяется истинным коэффициентом линейной плотности $m_{\ell i}$. Если теперь предположить, что из выделенного объема изъяты молярные частицы, а жидкость распределена по всему объему, то она будет иметь свойство жидкости, выражаемое приведенной динамической вязкостью μ_n. Таким же образом, если из выделенного объема, в котором находятся частицы вязкой жидкости и молярные частицы, изъять вязкую жидкость и считать, что молярные частицы, имевшие истинные коэффициенты линейной плотности $m_{\ell i}$, распределены по всему выделенному объему, то эта среда будет иметь теперь коэффициент приведенной линейной плотности $m_{\ell n}$, а отношения приведенных параметров, выражающих собой реологические свойства к истинным реологическим свойствам, т.е. $\mu_n/\mu_i = f_1$ и $m_{\ell n}/m_{\ell i} = f_2$ есть нечто иное (по аналогии представлениям Х.А. Рахматуллина и др. [7,8]) как объемная доля вязких и деформационно инертных свойств смеси соответственно. Это же рассуждение, распространив для упругого свойства твердых частиц в случае нахождения их в выделенном объеме, получим объемную долю упругих свойств в смеси в виде $G_n/G_i = f_3$.

Если в выделенном объеме отсутствуют частицы, имеющие деформационные свойства, кроме рассмотренных выше, то будем иметь соотношение:

$$\mu_n/\mu_i + m_{\ell n}/m_{\ell i} + G_n/G_i = 1 \text{ или } f_1 + f_2 + f_3 = 1.$$

Так как $\mu_n = f_1\mu_i$, $m_{\ell n} = f_2 m_{\ell i}$ и $G_n = f_3 G_i$, то в смеси напряжения по законам Гука, Ньютона и деформационной инертности выразятся следующим образом [11]:

$$\tau_{ij} = f_1\mu_i\dot{\gamma}_{ij}, \quad \tau_{ij} = f_2 m_{\ell i}\ddot{\gamma}_{ij}, \quad \tau_{ij} = f_3 G_i \gamma_{ij}. \quad (1)$$

где τ_{ij} — напряжения; γ_{ij}, $\dot{\gamma}_{ij}$ и $\ddot{\gamma}_{ij}$ — деформации, скорости деформаций и ускоренные деформации соответственно; $m_{\ell i}$ — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность линейной плотности (кг/м) и прямо пропорциональный объемной плотности, помноженной на квадрат динамического расстояния.

Как известно, механическим элементом соответствующим реологическому закону упруго деформируемых тел является пружина, а вязкой жидкости — перфорированный поршень, находящийся в цилиндрическом сосуде (рис. 1(a, b)) соответственно.

Для сред, обладающих свойствами деформационной инертности и соответствующих реологическому закону Хусанова И.Н. (второе уравнение в (1)), предложен механический элемент рис. 1(c), описанный ниже [5].

Механический элемент, инертно сопротивляемый к деформационным процессам сред, состоит из массивного конуса вращения, находящегося в цилиндре с перфорированными стенками, который, в свою очередь, находится в цилиндрическом непроницаемом сосуде. При погружении или всплывании массивного конуса вращения происходит вытеснение жидкости из пор внутреннего цилиндра в между цилиндрическое пространство. В этом узком пространстве жидкость движется в сторону, противоположную движению конуса, компенсируя продвинутый объем конуса. В щели жидкость ускоренно деформируется (течет) (рис. 1(c)). Чем больше линейная плотность жидкости, тем больше сопротивления.

Далее рассмотрим случаи, когда упругими свойствами частиц можно пренебречь.

Соединяя параллельно и последовательно элементы Ньютона и деформационной инертности (рис. 1(b, c)) [5], получим ретардационные и релаксационные механические модели, приведенные на рис. 1(d, e), и соответствующие им уравнения напряженно-деформационных состояний, которые при пренебрежении индексами тензорных величин будут иметь вид:

$$\tau = f_1\mu_i \left(\dot{\gamma} + t_{ret(Kh_1)}\ddot{\gamma}\right), \tag{2}$$

где $t_{rel(Kh_1)} = f_2 m_{li}/f_1\mu_i$ — время ретардации;

$$\tau + t_{rel(Kh_1)}\dot{\tau} = f_2 m_l \ddot{\gamma}, \tag{3}$$

где $t_{rel(Kh_1)} = f_2 m_{li}/f_1\mu_i$ — время релаксации.

Реологические уравнения (2) и (3) выражают собой напряженно-деформационные состояния вязко-инертной текучей среды, под которой подразумевается жидкость, часть которой состоит из ньютоновской непрерывной вязкой деформируемой фазы, а часть — из жидких частиц, объединенных между собой, с образованием моли — второй фазы. Эти смеси кроме вязкого деформационного механизма деформируются по инерции [6, 7].

Особенности структурной организации сред, т.е. существование различных форм их молекулярной и молярной подвижностей, приводят к появлению различных релаксационных и ретардационных процессов при их движении и деформировании, каждый из которых связан с подвижностью тех или иных структурных элементов [3, 4]. Соответствующие молярным образованиям релаксационные и ретардационные процессы протекают относительно медленно, т.е. в этих средах более ярко проявляется деформационная инертность.

Проявление закономерности деформационной инертности в текучей вязко-инертной среде рассмотрим решая уравнение (2).

Решением уравнения (2) будет:

$$\dot{\gamma} = e^{\frac{f_1\mu_i}{f_2 m_{\ell i}}} \left(\dot{\gamma}_0 + \frac{1}{f_2 m_{\ell i}} \int \tau_{Kh} e^{-\frac{f_1\mu_i}{f_2 m_{\ell i}}} dt\right), \tag{4}$$

где $\dot{\gamma}_0$ — начальная скорость деформации.

Если в решении (4) $\tau = \tau_0 = \text{const}$, то получим:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_c}{f_1\mu_i} + \left(\frac{\tau_0 - \tau_c}{f_1\mu_i}\right) \exp\left(-\frac{t}{t_{ret(Kh)}}\right), \tag{5}$$

где $t_{ret(Kh)} = f_2 m_{\ell i}/f_1\mu_i$.

Если в уравнении (5) $\tau_c = \tau_0 = \mu\dot{\gamma}_0$, то мы имеем дело с равновесием как для жидкости Ньютона $\tau_c = \mu\dot{\gamma}$. Следовательно, ретардационная модель (2) является моделью жидкости, а его линейная плотность — плотностью молярных частиц жидкости. Если $\tau_c < \tau_0$, то скорость деформации постоянно уменьшается, если $\tau_c > \tau_0$, то скорость деформации возрастает с уменьшающейся скоростью. Если $t_{ret(Kh)}$ слишком велико, то вязкое последействие может восприниматься как медленный разгон жидкости, или же как неустановившееся течение.

При $t = \infty$ скорость деформации достигает значения τ_c/μ. Следовательно, скорость деформации в жидкости (5), описываемой ретардационной Моделью (2), развивается не мгновенно, задерживается вследствие вязкого преддействия при нагрузке, величина $t_{ret(Kh)}$ представляет собой время вязкого последействия.

Если снять напряжение $\tau_c = 0$, то скорость деформации по закону последействия при возврате (или обратного вязкого последействия) полностью исчезает при $t = \infty$.

Если $t_{ret(Kh)} = f_2 m_{\ell i}/f_1\mu_i$ не слишком велико, то процесс практически завершается по истечении конечного промежутка времени.

Как видно из анализа решения (5) ретардационной модели (2) такие жидкости обладают некоторым дополнительным сопротивлением относительно вязкой ньютоновской жидкости.

Это свойство текучих и деформируемых сред Хусановым И.Н. именовано деформационной инертностью.

3. Заключение

Таким образом, в данной статье предложены реологические модели состояния двухфазных сред и уравнения напряженно-деформационных состояний, учитывающие объемные содержания реологических свойств фаз. Решением ретардационной модели жидкости в виде двухфазной среды установлены не известные до настоящего времени объективно существующие процессы вязкого преддействия и последействия.

Список литературы

[1] Эйрих Ф. Реология, теория и приложения. М.: 1962. 824 с.

[2] Рейнер М. Реология. М.: 1965. 224 с.

[3] Хусанов И.Н. Математическая модель сжимаемой деформируемой сплошной среды с несколькими временами релаксации. М.: ВИНИТИ 10.11.84, № 60086-84 Деп. 21 с.

[4] Ризаев А.А., Хусанов И.Н. Деформационная инертность текучих сред // Журнал Композиционные материалы. 2002. № 4. С. 17Ч19.

[5] Лутфуллаев Ш.А., Хусанов И.Н. Механические модели ускоренно деформируемой среды и жидкостей со сложной реологией // Журнал Композиционные материалы. 2002. № 4. С. 34–36.

[6] Хусанов И.Н. О деформируемости сред по инерции. В сб.: Механика многофазных сред и тепломассообмен. Ташкент: Фан, 1987. С. 151–155.

[7] Хусанов И.Н. Обобщенная модель вязко-инертно деформируемой среды // Журнал Проблемы механики. 2008. № 1. С. 31–35.

[8] Рахматуллин Х.А. Прикладная математика и механика. М.: 1956. Т. 20. № 2.

[9] Файзуллаев Д.Ф. Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах. Ташкент: Фан УзССР, 1966.

[10] Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.

[11] Хусанов И.Н. О моделировании течений растворов, сминающих обсадные колонны // Узб. журнал «Проблемы механики». 2007. № 6. С. 39–43.

[12] Альфей Т., Гарин Е.Ф. Динамика вязко-упругого поведения. С. 459-507 в кн. Реология. Теория и приложения под ред. Ф. Эйриха. М.: 1962. 824 с.

[13] Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М.: 1965. 200 с.

[14] Месчян С.Р. Ползучесть глинистых грунтов. Ереван: 1967. 320 с.

[15] Буевич Ю.А., Ясников Г.П. Релаксационные методы в исследованиях процессов переноса // ИФЖ, том XLIV. 1983. № 3. С. 483–504.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.5.01

Тонкая структура течений неоднородных и многофазных жидкостей[1]

Чашечкин Ю.Д.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

По результатам визуализации течений отмечается существование структур в широком диапазоне масштабов: от галактических до микронных. Обосновывается использование фундаментальной системы уравнений по результатам сравнения симметрий различных моделей течений теоретико-групповыми методами. Полные решения системы отыскиваются методами теории сингулярных возмущений с учетом условия совместимости, определяющего степень характеристического уравнения. Сравнение полных решений с данными экспериментов показывает, что регулярные решения характеризуют крупномасштабные компоненты течений, богатое семейство сингулярных решений — формирующуюся тонкую структуру среды. Приводятся примеры расчетов и наблюдений течений стратифицированных, вращающихся и многофазных сред. Обсуждаются требования к методике адекватного эксперимента.

1. Введение

Промышленная революция XVIII–XIX веков сопровождалась сменой этапа эмпирического развития гидродинамики, отмеченного такими достижениями как протяженные водоводы (акведуки), оросительные системы, судоходные каналы, парусные суда, этапом создания научно обоснованных подходов, основанном на совместном математическом и лабораторном моделировании технических устройств и технологий. Развитие теоретической гидродинамики на базе «первых принципов» — законов природы, представленных в форме дифференциальных уравнений, способствовало углублению понимания динамики течений и созданию методик высокоточных воспроизводимых экспериментов. Согласие результатов расчетов и экспериментов стимулировало развитие научного подхода к созданию новых технологий и устройств.

Одновременно с фундаментальными уравнениями широкое распространение получили модельные и конститутивные системы, ориентированные на конкретные приложения. Однако в последние годы традиционные подходы перестали удовлетворять потребности практики как с точки зрения погрешностей расчетов состояний и эволюции систем, в частности в прогнозах погоды и климата, так и в части научной основы разработки технологий управления энергонасыщенными процессами и аппаратами.

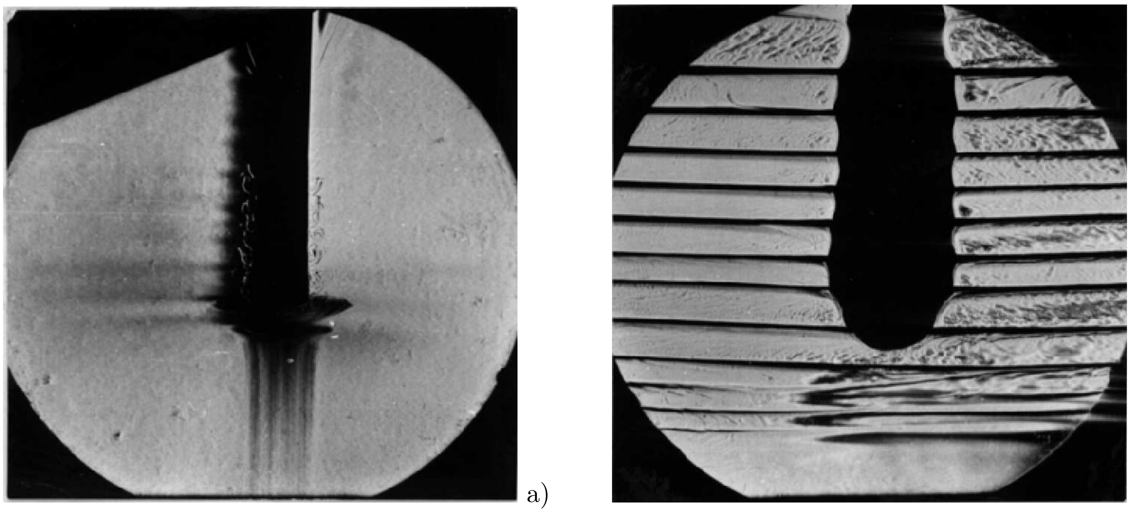
Быстро развивающиеся прецизионные оптические методы наблюдений позволили выявить в природных явлениях «тонкую структуру среды», образованную семействами высокоградиентных прослоек и протяженных нитей в широком диапазоне линейных размеров: от световых лет в галактических системах [1] до микронных в течениях, возникающих в высыхающей капле суспензий наночастиц [2].

В качестве примера на рис. 1 приведены теневые картины течения, возникающего при намерзании льда на интенсивно охлаждаемый цилиндрический холодильник, погруженный в стратифицированный раствор поваренной соли с температурой $T = 20°$C, иллюстрирующие существенное влияние тонкой структуры многокомпонентного конвективного течения на тепломассоперенос и форму фронта кристаллизации.

Слоистая структура течения обуславливает регулярную волнистость поверхности льда. Тонкие кристаллы окиси олова, составляющие вытянутое по вертикали пятно примеси (рис. 1(а)) спустя 114.5 мин, переносятся течениями и собираются на тонких горизонтальных прослойках, расположенных с шагом $<h>= 1.2$ см (рис. 1(б)).

Дальнейшие экспериментальные исследования показали, что тонкая структура влияет на тепломассоперенос, динамику и энергетику течений. В

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ОЭММПУ РАН (Программа ОЭ-13 «Вихри и волны в сложных средах») и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-01-00128-а). Эксперименты выполнены на уникальных стендах УСУ ГФК «ИПМех РАН», поддерживаемых Минобрнауки Росси (ГК 16-518-11-7059).



a) b)

Рис. 1. Теневая картина намерзания льда на цилиндрическом холодильнике в непрерывно стратифицированной среде ($\Lambda = 9.5$ м; $T_b = 6.2$ с): а, б) — $t = 2.45$; 114 мин

этой связи следует подчеркнуть, что идентификация механизмов формирования тонкой структуры течений, создание математических моделей процессов ее формирования, оценка влияния структур на геометрию и динамику течений представляют и общенаучный, и практический интерес.

Цель данной работы — обсуждение критериев и обоснование выбора определяющей системы уравнений, анализ общих свойств полных решений фундаментальной системы, формулировка некоторых рекомендаций, направленных на повышение результативности проводимых экспериментальных исследований и прикладных разработок.

2. Фундаментальная система уравнений механики жидкостей

Математической основой механики жидкостей являются понятия *числа*, *пространства*, *сплошной среды* и параметров, характеризующих *среду* и ее *течения*. Следует подчеркнуть существенное отличие свойств *пространства*, движения которого, по определению, включают перенос и вращение с сохранением расстояния между объектами [3], и погруженной в него *деформируемой среды*. Поскольку декомпозиция оператора течений, по определению Коши–Гельмгольца, помимо операторов переноса и вращения,

$$v_i(r_i + \delta r_i) = v_i(r_i) + \varepsilon_{ijk}\Omega_j \delta r_k + \frac{\partial v_i}{\partial v_l}\delta r_l$$

включает дополнительный сдвиговый член, характеризующий деформацию жидкого объема, при описании течений должен быть определен универсальный признак (параметр), обосновывающий отличие континуумов среды и *метрического пространства*, в которое она помещается. Таким параметром служит переменная плотность среды. Необходимость учета переменности плотности среды отмечал Д.И. Менделеев [4], опубликовавший ряд работ по определению и параметризации уравнений состояния газов и жидкостей [5, 6].

Свойство деформируемости жидких объемов в течениях исключает возможность их идентификации, и, как следствие, наблюдаемость скорости. Возможность опосредованного измерения скорости жидкости и величина погрешностей должна детально анализироваться в условиях конкретного эксперимента.

Наблюдаемыми являются расстояния и временные интервалы, плотность ρ, импульс p^j, концентрация S и полная энергия e (или температура T) жидкости. Совокупность законов сохранения для наблюдаемых параметров течений, выраженных в дифференциальной форме, составляет основу теоретической гидродинамики. Каждое из уравнений формулировалось независимо от других на протяжении длительного временного интервала. Так уравнение неразрывности опубликовал Даламбер в 1748 г. [7]; закон сохранения импульса p^j для идеальной жидкости — Эйлер в 1752 г. [8], а для вязкой среды — Навье в 1822 г. (исходя из молекулярных представлений [9]), а для сплошных сред и с решениями — Стокс в 1845 г. [10], уравнение переноса тепла или температуры — Фурье в 1822 г. [11] и, наконец, диффузии — Фик в 1855 г. [12].

Фундаментальная система уравнений с учетом второго закона термодинамики в форме уравнения для скорости производства энтропии с уравнением состояния Менделеева имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla_j(p^j)=0,\\ \frac{\partial(p^i)}{\partial t}+\left(\nabla_j\frac{p^j}{\rho}\right)p^i=\\ =-\nabla^i P+\rho g^i+\nu\Delta(p^i)+2\varepsilon^{ijk}p_j\Omega_k+f^i\,,\\ \frac{\partial\rho T}{\partial t}+\nabla_j\cdot(p^jT)=\Delta(\kappa_T\rho T),\\ \frac{\partial\rho S}{\partial t}+\nabla_j\cdot(p^jS)=\Delta(\kappa_S\rho S),\\ \rho=\rho(P,S,T),\end{gathered}\tag{1}$$

где Ω_k — угловая скорость глобального вращения жидкости; g^i — ускорение свободного падения; f^i — внешняя сила; ν, κ_T, κ_S — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии; $v^j=p^j/\rho$ — скорость течения; ∇_j и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа. Система (1) учитывает диссипацию импульса, но не описывает влияние внутренней энергии на динамику течений.

Система уравнений (1) дополняется начальными и граничными условиями, учитывающими особенности изучаемого процесса: непротекания для плотности и составляющих жидкость компонент вещества (концентрации примеси или солености) и прилипания для скорости на твердых поверхностях, равенства сил на контактных поверхностях двух жидкостей, а также затухания всех возмущений на бесконечности).

Система (1) определена, разрешима, самосогласованна и характеризуется более высокой размерностью физического пространства задачи, чем система уравнений механики твердого тела. Распространенное рассмотрение течений жидкости при постоянстве плотности ρ (однородная несжимаемая жидкость) фактически приводит к отождествлению двух разнородных объектов — континуума метрического пространства и погруженной в него деформируемой сплошной среды, что проявляется в вырожденности определяющей системы Даламбера–Навье–Стокса [13].

Рассмотрению уравнений как единой системы, определяющей физические величины, характеризующие жидкость, и закономерности их изменений в течениях в XIX и первой половине XX века препятствовало отсутствие методов анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений. Получившие широкое распространение полуфеноменологические представления, способствовали распространению редуцированных (теория пограничного слоя) или конститутивных (теории турбулентности) моделей. Хотя представление о необходимости описания течений системой (1) стало общепринятым к началу XXI века [14, 15], на практике основными предметами исследований остаются конститутивные и редуцированные модели.

Возможность дальнейшего развития анализа обеспечена развитием техники символьных вычислений и численного анализа сложных уравнений с применением высокопроизводительной вычислительной техники. В настоящее время реализованы трудоемкие методики вычислений непрерывных симметрий сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных — необходимой части процедуры сравнения общих свойств различных систем, построения решений методами теории сингулярных возмущений, а также совершенствования прецизионного высокоразрешающего эксперимента, обеспечивающего количественное сравнение расчетов и наблюдений.

Учет особенностей условий конкретного эксперимента обуславливает выбор приближений, необходимых для построения моделей изучаемых течений. Реализация приближений может изменять свойства уравнений, приводить к нарушению условия тождественности преобразований — стандартного требования анализа. Одним из методов контроля качества преобразований служит сравнение непрерывных симметрий теоретико-групповыми методами.

3. Симметрии фундаментальной системы уравнений

Результаты проведенного в последнее время теоретико-группового анализа, показали существенные различия симметрий различных систем уравнений в современной гидродинамике [16–18]. В их ряду особое место принадлежит системе (1), инвариантной относительно точечной десятипараметрической группы Галилея с операторами

$$\begin{gathered}X_1=\partial_t,\quad X_2=\partial_x,\quad X_3=\partial_y,\\ X_4=\partial_z,\quad X_5=y\partial_x-x\partial_y+v\partial_u-u\partial_v,\\ X_6=\left(z+\frac{gt^2}{2}\right)\partial_x-x\partial_z+(w+gt)\partial_u-u\partial_w,\\ X_7=\left(z+\frac{gt^2}{2}\right)\partial_y-y\partial_z+(w+gt)\partial_v-v\partial_w,\\ X_8=t\partial_x+\partial_u,\quad X_9=t\partial_y+\partial_v,\\ X_{10}=t\partial_z+\partial_w\,.\end{gathered}\tag{2}$$

Набор симметрий (2) с генераторами групп сдвигов по времени и пространству, вращения в горизонтальной плоскости, вращения в системе координат, движущейся относительно данной с ускорением свободного падения и, наконец, генераторы групп преобразований Галилея, отражает «первые принципы», следующие из однородности пространства и времени, изотропии пространства и эквивалентности инерциальных систем отсчета. Симметрии конститутивных и фундаментальной систем (1) обычно не совпадают, что указывает на нетождественность промежуточных операций, фактическую неприводимость уравнений и коренные различия решений.

Свойства физических величин и процессов определяются видом выбранной системы определяющих уравнений. Течения — перенос импульса, проявляющиеся в силовом воздействии жидкостей на препятствия и конвективном переносе вещества, описываются фундаментальной системой уравнений и сопровождаются сложными взаимообусловленными изменениями наблюдаемых физических величин (плотности вещества, энергии, концентраций примесей, скорости звука и т.д.). Перенос импульса отсутствует в кондуктивных процессах (диффузия и теплопроводность).

Содержание понятий физических величин изменяется при выполнении нетождественных математических преобразований. В качестве одного из примеров можно отметить эволюцию содержания такого параметра, как скорость диссипации механической энергии — производной величины, определяемой сдвигом скорости в классическом подходе, и новой независимой переменной в теориях турбулентности.

Течения жидкостей описываются полными решениями определяющих систем уравнений. Число независимых функций, образующих такое решение, задает порядок системы, который определяется условием совместимости составляющих уравнений.

Общие свойства инфинитезимальных периодических решений системы (1) для слабодиссипативных сред с малыми кинетическими коэффициентами ν, κ_T, κ_S, описываются решениями дисперсионного уравнения высокого порядка, которые отыскиваются методами теории сингулярных возмущений. Классификация компонент решений полного уравнения и частных моделей, в которых последовательно пренебрегается эффектами диффузии, температуропроводности и вязкости, дана в [13].

4. Структуры периодических течений и волн в жидкостях: расчеты и наблюдения

Регулярные части решений, характеризующие волновые поля, сохраняются во всех моделях периодических течений: и полной, задаваемой системой (1) и редуцированными системами, включающими уравнения Навье–Стокса и Эйлера. Волновое число k и длина монохроматической волны $\lambda = 2\pi/k$, которые задаются регулярными решениями дисперсионного соотношения, определяются частотой источника ω, например, для акустических волн $k = \omega/c$ (c — скорость звука), для поверхностных волн на глубокой воде $k = \omega^2/g$, его размером или характерным вязким масштабом L_ν (для внутренних волн $L_\nu = \sqrt[3]{g\nu}/N$).

Основную часть решений системы высокого порядка (1) составляют сингулярно возмущенные функции. Полное число таких функций лежит в диапазоне от восьми для задач в полной постановке (четырех в безграничной среде) до четырех (двух в неограниченной вязкой среде) при сохранении только эффектов вязкости. Существование двух различных в общем случае, и совпадающих в приближении однородной жидкости, сингулярно возмущенных компонент обусловлено векторной природой импульса, который служит мерой и силового воздействия потока на препятствия и переноса вещества (расхода жидкости), а также тензорным характером вязких напряжений. Поперечный масштаб сингулярно возмущенных компонент решений задается характерной частотой, значениями кинетических коэффициентов ($\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu/\omega}$, $\delta_\omega^{\kappa_T} = \sqrt{\kappa_T/\omega}$, $\delta_\omega^{\kappa_S} = \sqrt{\kappa_S/\omega}$) или их комбинациями и геометрией задачи [13]. Области течений с выраженными сингулярно возмущенными компонентами решения, определяющими тонкую структуру среды, характеризуются высоким уровнем динамической завихренности $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$, скорости бароклинной генерации завихренности $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \nabla\rho\times\nabla P/\rho^2$, скорости диссипации механической энергии ε. Как и волны, компоненты течений, характеризуемые сингулярно возмущенными функциями, могут наблюдаться во всем пространстве. Их реальное положение определяется решением системы (1) с заданными граничными условиями.

Детальные расчеты течений, вызванных колебаниями поршня на плоскости в непрерывно стратифицированной жидкости, визуализирующие общую картину и тонкую структуру пучков внутренних волн [19] согласуются с данными теневой визуализации стратифицированных течений [20]. С увеличением амплитуды колебаний источника на краях пучков внутренних волн начинают регистрироваться обострения градиентов плотности, в областях конвергенции которых формируются компактные вихри, нарушающие плавность исходной непрерывной стратификации [20]. Вихри данного типа образуются непосредственно в толще жидкости и движутся к источнику течений, а не от него, как можно было бы ожидать. В экспериментах вихри в толще жидкости вдали от препятствий наблюдаются и в случае вынужденных, и в случае свободных колебаний тел на горизонтах нейтральной плавучести [21]. Траекторные и геометрические параметры пучков внутренних волн в средах с переменной частотой плавучести, рассчитанные на основании полных решений линеаризованной системы (1) [22], согласуются с данными прецизионных измерений полей скорости [23] с расхождением в несколько процентов даже для волн, проникающих в закритические области, где частота волны превышает частоту плавучести.

Тонкоструктурные компоненты течения приводят к перераспределению пассивных примесей в пространстве. В стратифицированных течениях примеси накапливаются на отдельных поверхностях, положение которых задается сингулярно возмущенными компонентами решений, а также на линиях их пересечения. В экспериментах аккумуляция краски в высокоградиентных прослойках наблюдалось как в двумерных, так и в трехмерных спутных стратифицированных течениях — следах позади цилиндра [24] и сферы [25]. Формирование воспроизводящих топографию дна структур в первоначально однородной суспензии, происходит и при возбуждении собственных колебаний в прямоугольном сосуде [26]. Изменения фазового состава и геометрии среды проявляют действие атомно-молекулярных сил, усложняющих структуру и динамику течений [27].

Высокий порядок фундаментальной системы (1) определяет условия полноты гидродинамического эксперимента, в котором необходимо одновременно измерять большее число параметров, чем присутствует в математической модели — определяться должны плотность, импульс, температура, концентрация компонент. Требует развития и техника гидродинамического эксперимента, позволяющего одновременно регистрировать и крупномасштабные, и большое число тонкоструктурных компонент течений.

Методика современного опыта должна учитывать обратное влияние измерительных приборов и зондирующих полей на измеряемые течения и позволять определять погрешности непосредственно в ходе опытов.

Вследствие ненаблюдаемости скорости жидкости (невозможности объективного определения погрешности измерений, пространственного и временного разрешения инструментов), особое значение приобретает разработка методики непосредственного определения импульса, основанной на измерениях сил, действующих на препятствие в потоке или расхода вдоль выбранной линии тока, и плотности среды (например, по измерениям оптического и акустического коэффициентов преломления [28]).

5. Заключение

Течения жидкостей — сложные взаимообусловленные изменения наблюдаемых физических величин, характеризующих непрерывную среду (плотности вещества, импульса, энергии, концентраций примесей), сопровождающие перенос импульса.

Методика полного гидродинамического эксперимента должна обеспечивать регистрацию пространственной картины течения, разрешать макро- и микроструктурные компоненты и оценивать погрешности данных непосредственно в процессе их получения.

Измерение импульса течений становится одной из наиболее актуальных задач прикладной аэрогидродинамики, поскольку скорость жидкости непосредственно не наблюдаема.

Список литературы

[1] Light Echoes from V838 Mon: Astronomy Picture of the Day 2011 Dec. 4 // `http://apod.nasa.gov/apod/ap111204.html`.

[2] Чашечкин Ю.Д., Бардаков Р.Н., Шабалин В.В. Регулярная тонкая структура течений в высыхающей капле суспензии наночастиц кварца // Доклады АН. 2011. Т. 436, №3. С. 336–338.

[3] Бронштейн Н.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Изд. 13-е. М.: Наука. 1986. 544 с.

[4] Менделеев Д.И. О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании. СПб. 1880.

[5] Менделеев Д.И. Об упругости газов. 1876.

[6] Менделеев Д.И. Исследование водных растворов по удельному весу. СПб: Тип. Демакова. 1887. 520 с.

[7] D'Alembert J.-R. Theorie gйnйrale des vents. Paris. 1747.

[8] Эйлер Л. Общие законы движения жидкостей // Известия АН. Механика жидкостей и газа. 1999. №6. С. 26–54.

[9] Navier C.-L.-M.-H. Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluids // Mém. d l'Acad. des Sciences. 1822. V. 6. P. 389–440.

[10] Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic bodies // Transaction of the Cambridge Philosophical Society. 1845. V. 8. P. 287–319.

[11] Fourier J.B.J. Thйorie analytique de la chaleur Paris. 1822.

[12] Fick A. Ueber Diffusion // Annalen der Physik und Chemie. 1855 V. 94, P. 59–86 (Abridged English translation: On liquid diffusion // London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1856. V. 10. P. 30–39.

[13] Чашечкин Ю.Д. Иерархия моделей классической механики неоднородных жидкостей // Морской гидрофизический журнал. 2010. №5. С. 3–10.

[14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[15] Muller P. The equations of oceanic motions. Cambridge: CUP. 2006. 292 p.

[16] Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Инвариантные свойства уравнений движения стратифицированных жидкостей // Доклады АН. 2002. Т. 387, №6. С. 760–763.

[17] Chashechkin Yu.D., Baydulov V.G., Kistovich A.V. Basic properties of free stratified flows // J. of Engng. Math. 2006. V. 55, № 1–4. P. 313–338.

[18] Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Инвариантные свойства систем уравнений механики неоднородных жидкостей // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, Вып. 4. С. 551–562.

[19] Бардаков Р.Н., Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Расчет и измерения конических пучков трехмерных периодических внутренних волн, возбуждаемых вертикально осциллирующим поршнем // Механика жидкости и газа. 2007. №4. С. 117–133.

[20] Chashechkin Yu.D. Visualization of singular components of periodic motions in a continuously stratified fluid // Journal of Visualization 2007. V. 10, №1. P. 17–20.

[21] Чашечкин Ю.Д., Приходько Ю.В. Регулярные и сингулярные компоненты течений при вынужденных и свободных колебаниях сферы в непрерывно стратифицированной жидкости // Доклады АН. 2007. Т. 414, №1. С. 44–48.

[22] Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39, №5. С. 88–98.

[23] Paoletti M.S., Swinney H.L. Propagating and evanescent internal waves in a deep ocean model // J. Fluid Mech. 2012. (in press).

[24] Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V. Transportation of a dye in upstream and downstream wakes of the cylinder in continuously stratified liquid // J. of Visualization. 2007. V. 10, №1. P. 7.

[25] Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д. Вихревые системы спутного стратифицированного течения за сферой // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. №4. С. 82–90.

[26] Чашечкин Ю.Д., Калиниченко В.А. Образы топографии в структуре суспензии в стоячих волнах // Доклады РАН. 2012. (в печати).

[27] Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д. Генерация звука при падении капли на поверхность воды // Акустический журнал. 2011. Т. 57, №6. С. 792–803.

[28] Бардаков Р.Н., Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Расчет скорости звука в стратифицированной морской среде на основе системы фундаментальных уравнений // Океанология. 2010. Т. 50, №3. С. 325–333.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.546

К теории процесса разложения газогидрата в вертикальном реакторе непрерывного действия

Чиглинцева А.С.*, **Кунсбаева Г.А.****

* Бирская государственная социально-педагогическая академия, Бирск
**Сибайский филиал башкирского государственного университета, Сибай

В работе предложена теоретическая модель для процесса вымывания газа из состава гидрата теплой водой в противоточном вертикальном трубчатом реакторе непрерывного действия.

1. Введение

Гидраты природного газа представляют собой уникальное сырье не только для получения легких углеводородных источников энергии, но и также для получения экологически чистой пресной воды. Причем запасы такой системы в природе практически неисчерпаемы. При этом только потенциальные запасы метана в газогидратах оцениваются специалистами до $2 \cdot 10^{16}$ м^3 [1].

Поэтому большой интерес в будущем представляет создание способов добычи газогидратов и их переработка с целью получения газа и пресной воды. Согласно предлагаемой схеме реактор сверху постоянно загружается гидратом, а снизу в реактор подается теплая вода некоторым постоянным расходом (рис. 1). Продукты разложения (вода и газ) самотеком удаляются из реактора, в котором уровень воды поддерживается на постоянной высоте.

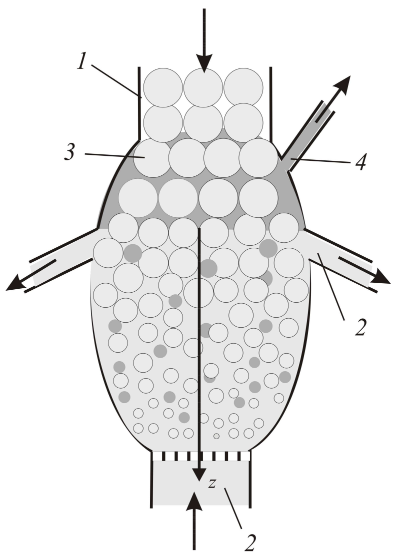


Рис. 1. Технологическая схема: 1 — реактор; 2 — вода; 3 — гидрат; 4 — газ

2. Основные уравнения

Ось z направим по оси трубчатого канала вертикально вниз. Полагаем, что все основные параметры течения трехфазной системы, состоящей из частиц гидрата, воды и газа однородны по сечению канала [2]. Дроблением частиц гидрата, опускающихся со скоростью, будем пренебрегать. Тогда уравнение сохранения их числа запишется как

$$\frac{d(Sn_h\upsilon_h)}{dz} = 0, \quad S = \pi R^2. \tag{1}$$

Здесь и далее нижние индексы h, w, g относятся к параметрам гидрата, воды и газа; n_h частиц гидрата в единицах объема; R и S — радиус и площадь сечения реактора.

Уравнения сохранения масс гидрата, воды и газа имеют вид:

$$\begin{gathered} \frac{dm_h}{dz} = -J_h, \quad \frac{dm_w}{dz} = -J_w, \\ \frac{dm_g}{dz} = -J_g, \quad m_h = S\alpha_h\rho_h^0\upsilon_h, \\ m_w = S\alpha_w\rho_w^0\upsilon_w, \quad m_g = S\alpha_g\rho_g^0\upsilon_g, \end{gathered} \tag{2}$$

где m_i, ρ_i^0, α_i, $\upsilon_i (i = h, w, g)$ — массовые расходы, истинные плотности, объемные концентрации и скорости фаз; J_h, J_w, J_g — интенсивности разложения гидрата, образования воды и газа (за счет разложения гидрата), отнесенные на единицу длины реактора.

Газогидрат является клатратным соединением с массовым содержанием газа G. Поэтому интенсивности разложения гидрата и образования воды и газа связаны как:

$$J_w = (1 - G)J_h, \quad J_g = GJ_h. \tag{3}$$

Учитывая (3), уравнение (2) допускает следующие интегралы масс:

$$\begin{gathered} m_h - m_w - m_g = c, \quad (1 - G)m_h - m_w = c_w, \\ Gm_h - m_g = c_g. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь c, c_w, c_g — постоянные, определяемые из условий на входе и на выходе из реактора. Нетрудно видеть, что один из интегралов в (3) является зависимым, причем $c = c_w + c_g$

При записи уравнений теплового баланса потерями тепла через стенки реактора будем пренебрегать, кроме того, будем считать, что температуры воды и газа совпадают ($T_g = T_w$). Тогда можем записать следующие уравнения сохранения энергии гидрата и газожидкостной смеси:

$$\begin{gathered} \frac{d(m_h c_h T_h)}{dz} = Q_{\sigma h} - J_h c_h T_\sigma, \\ \frac{d}{dz}(m_w c_w + m_g c_g)T_w = Q_{w\sigma} - (J_w c_w + J_g c_g)T_\sigma. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь T_σ — температура на поверхности частицы гидрата; $Q_{w\sigma}$ и $Q_{\sigma h}$ — тепловые потоки от жидкости к поверхности гидрата, и от этой поверхности к гидрату, отнесенные к единице длины реактора. Тепловые потоки, в свою очередь, должны удовлетворять условиям теплового баланса с учетом затрат на фазовые переходы

$$Q_{w\sigma} - Q_{\sigma h} = J_h l_h, \tag{6}$$

где l_h — удельная теплота разложения, отнесенная на единицу массы гидрата.

Приведенные уравнения необходимо дополнить следующими кинематическими соотношениями:

$$\alpha_h + \alpha_w + \alpha_g = 1, \qquad \alpha_h = \frac{4}{3}\pi a_h^3 n_h, \tag{7}$$

где a_h — радиус частиц гидрата. Для объемного содержания гидрата примем, что он равен величине объемного содержания для плотной засыпки сферических частиц. Тогда [3] будем иметь $\alpha_h = 0.64$.

Перепадом давления в реакторе по высоте будем пренебрегать. Плотности гидрата и воды постоянны, а газ калорически совершенен:

$$p = \rho_g^0 R_g T_g.$$

Интенсивности теплообмена, отнесенные к единице длины реактора, представим как:

$$Q_{w\sigma} = Sn_h q_{w\sigma}, \quad Q_{\sigma h} = Sn_h q_{\sigma h}, \tag{8}$$

где $q_{w\sigma}, q_{\sigma h}$ — интенсивности тепломассобмена, отнесенные к одной частице гидрата, которые, в свою очередь, записываются в виде:

$$\begin{gathered} q_{w\sigma} = 2\pi a_h \beta_w^{(T)}(T_w - T_\sigma), \\ q_{\sigma h} = 2\pi a_h \beta_h^{(T)}(T_\sigma - T_h), \\ \beta_w^{(T)} = \lambda_w \mathrm{Nu}_w, \qquad \beta_h^{(T)} = \lambda_h \mathrm{Nu}_h, \\ \mathrm{Nu}_w = 2 + 0.65\sqrt{\mathrm{Pe}_{wh}}, \qquad \mathrm{Nu}_h = 10, \\ \mathrm{Pe}_{wh} = \frac{2a_h(\upsilon_w + \upsilon_h)}{\chi_w}, \qquad \chi_w = \frac{\lambda_w}{\rho_w c_w}. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь β, λ, χ — коэффициенты теплопереноса, теплопроводности, температуропроводности; Nu и Pe — числа Нуссельта и Пекле.

Аналогично предыдущему скорость разложения гидрата представим в виде

$$J_h = Sn_h j_h. \tag{10}$$

Здесь j_h — интенсивность разложения, отнесенная к одной частице. В общем случае, по аналогии с формулой Герца–Кнудцена [3] для неравновесных фазовых переходов для жидкостей, а также топохимическими реакциями твердых тел, интенсивность разложения гидрата примем в виде [4]:

$$\begin{gathered} j_h = 2\pi a_h \beta_h^{(m)}(T_\sigma - T_s(p)), \\ \beta_h^{(m)} = \beta_{h0}\exp(-E/RT), \end{gathered} \tag{11}$$

где $T_s(p)$ — равновесная температура фазовых переходов гидрата при значении давления; $p, \beta_h^{(m)}$ — эмпирический параметр.

Скорость газовой фазы представим как

$$\upsilon_g = \upsilon_w + \upsilon_{gw}, \tag{12}$$

где υ_{gw} — скорость миграции газовой фазы относительно жидкости.

Выше представленная система уравнений, дополненная некоторыми гипотезами, позволяющими получить конкретные численные величины для параметров, определяющих интенсивность разложения гидрата и относительное движение газовой фазы, позволяет рассчитывать производство газа и воды при заданной интенсивности загрузки реактора гидратом и теплой водой. Для функционирования такого реактора необходимо обеспечить во всем его объеме условия разложения гидрата. Таким условием является величина температуры воды T_w, контактирующей с гидратом, которая должна быть выше равновесной температуры $T_s(p)$ для значения давления в реакторе p.

3. Результаты расчетов

Для базовых параметров, определяющих геометрию и режим работы реактора, принимались следующие численные величины для параметров: $R = 1$ м, $m_{h0} = 100$ кг/с, $T_w = 300$ К, $T_h = 277$ К, $p = 3 \cdot 10^6$ Па. Значение расхода теплой воды на входе реактора принималось равным $m_{we} = 517$ кг/с. Данное значение соответствует минимальному значению расхода теплой воды, обеспечивающему в энергетическом плане полное разложение гидрата.

Для выявления наиболее выгодных режимов эксплуатации реактора и определения его оптимального размера был проведен параметрический анализ по представленной теоретической модели. На рис. 2 иллюстрируется зависимость минимальной высоты реактора, обеспечивающая полное разложение гидрата, при переходе к режимам с более высоким давлением при различных значениях производительности установки, определяемая величиной m_{h0}. Видно, что с ростом давления высота реактора также растет. Это связано с тем, что с переходом на высокие давления, за счет увеличения плотности выделившегося газа, происходит снижение относительной линейной скорости между водой и гидратом. И, как следствие этого, происходит снижение теплопередачи между водой и гидратом. Кроме этого из графиков также следует, что с ростом расхода гидрата растет также высота установки.

На рис. 3 иллюстрируется влияние величины начальных размеров частиц гидрата на высоту реактора. Из графиков нетрудно заметить, что с ростом размеров дисперсных гидратных частиц можно наблюдать более высокий, чем линейный, закон увеличения высоты реактора. Это, по-видимому, связано с нелинейным законом межфазной теплопередачи от текущего радиуса гидратных частиц.

Зависимость высоты реактора от его радиуса показана на рис. 4. Нетрудно заметить, что с увеличением радиуса реактора высота реактора уменьшается. Это связано с увеличением интенсивности теплообмена между теплоносителем и частицами гидрата, что приводит к уменьшению времени пребывания гидрата в реакторе и соответственно его высоты.

4. Заключение

В работе исследована принципиальная возможность вымывания газа из гидратных валунов. Построена соответствующая технологическая схема и описана модель реактора для процесса вымывания газа из гидрата.

Список литературы

[1] Bei Liu, Qing Yuan, Ke-Hua Su, Xin Yang, Ben-Cheng Wu, Chang-Yu Sun and Guang-Jin Chen. Experimental simulation of the exploitation of natural gas hydrate // Energies. 2012. V. 5. P. 466; doi:10.3390/en5020466.

[2] Шагапов В.Ш., Буркин М.В., Воронин А.В. К расчету обжига известняка в коксовой печи // Теорет. основы хим. технологии. 2004. Т. 38. С. 467.

[3] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.

[4] Физическая химия: Учеб. для хим. спец. вузов / Под ред. Стромберга А.Г. М.: Высшая школа, 2001.

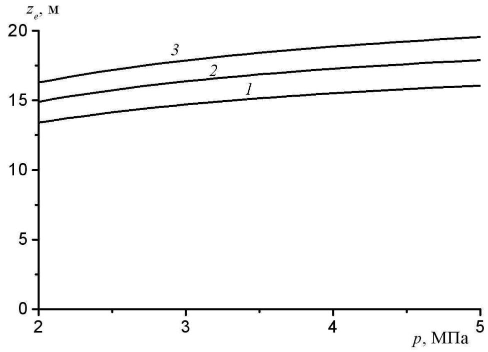


Рис. 2. Влияние значения давления в реакторе на его высоту. Линии 1, 2 и 3 соответствуют $m_{h0} = 80,\ 100,\ 120$ кг/с

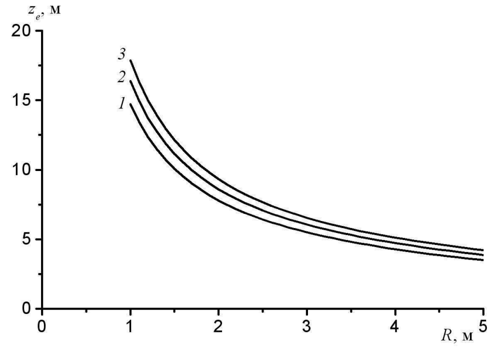


Рис. 4. Высота реактора в зависимости от его радиуса. Линии 1, 2 и 3 соответствуют $m_{h0} = 80,\ 100,\ 120$ кг/с

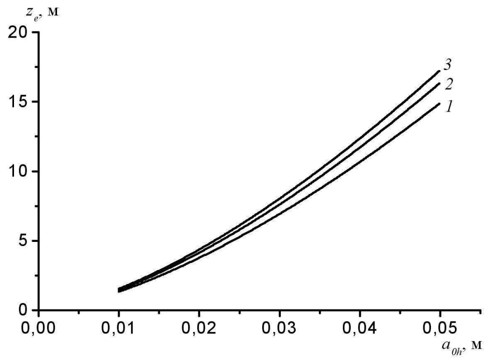


Рис. 3. Иллюстрация влияния размеров частиц гидрата на высоту реактора. Линии 1, 2 и 3 соответствуют $p = 2,\ 3,\ 4$ МПа

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.546:536.421

Исследование склеротических явлений в горизонтальном трубопроводе при течении углеводородного газа[1]

Шагапов В.Ш.*, Мусакаев Н.Г., Уразов Р.Р.*****

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,
**Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Тюмень,
***Филиал Уфимского государственного авиационного технического университета в г. Ишимбай, Ишимбай

На основе предложенной математической модели проведено численное исследование склеротических явлений в горизонтальном трубопроводе, связанных с отложениями газовых гидратов на стенках канала при транспортировке влажного природного газа. Рассмотрены различные условия транспортировки газа: давление имеет постоянное значение на входе или на выходе из трубопровода, либо давление постоянно на обоих концах трубопровода. Изучен процесс диссоциации газогидратных отложений при подаче в газовый поток метанола.

1. Введение

Нормальная эксплуатация ряда газовых месторождений зачастую бывает осложнена образованием газовых гидратов в скважинах, системах сбора и подготовки углеводородного, для которых перекрытие проходных сечений труб приводит к срыву работы оборудования и авариям [1–3]. При изучении проблемы образования газовых гидратов в трубопроводах традиционными являются задачи определения участка канала, подверженного склерозу, и его протяженности, вычисления скорости и времени полного перекрытия проходного сечения трубы.

Известно, что необходимым условием для образования газовых гидратов является наличие воды (или ее паров) и легких углеводородных компонент, которые растворяясь в воде при определенных температурах и давлениях, образуют твердую фазу [1, 4]. Поэтому важно выбрать такие режимы транспортировки газа, при которых температура потока T_g выше температуры образования гидрата T_s. Такое исследование возможно на основе математической модели, адекватно описывающей процессы, происходящие при течении углеводородного газа в системах наземного газопромыслового оборудования. В наших статьях [5, 6] такая модель приведена.

2. Численное исследование

На основе предложенной математической модели для различных условий транспортировки газа определим изменение параметров газового потока в подземном трубопроводе с учетом образования или диссоциации газогидратных отложений на внутренних стенках канала. В расчетах приняты следующие значения параметров: длина трубопровода составляет 10 км, его внутренний диаметр 22 мм, начальная температура грунта $T_{G0} = 6^\circ$ C, массовый расход $m_g = 0{,}7$ кг/с, температура газа на входе $T_{g0} = 50^\circ$ C, массовая концентрация влаги в нулевом сечении $k_{w0} = 0{,}003$. Ось z направлена по течению газа, ее начало совпадает с входным сечением трубопровода.

На рис. 1 представлено распределение температуры (температура стенки трубопровода практически совпадает с температурой потока) по длине трубопровода (отложения газовых гидратов на стенках трубопровода отсутствуют). Значение равновесной температуры гидратообразования достигается при температуре стенки в сечении с координатой $z_s \approx 2$ км, т.е. начиная с этого участка и ниже по течению возможно образование на внутренних стенках трубопровода газовых гидратов.

Рассмотрим режим транспортировки газа при

[1]Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-834.2012.1).

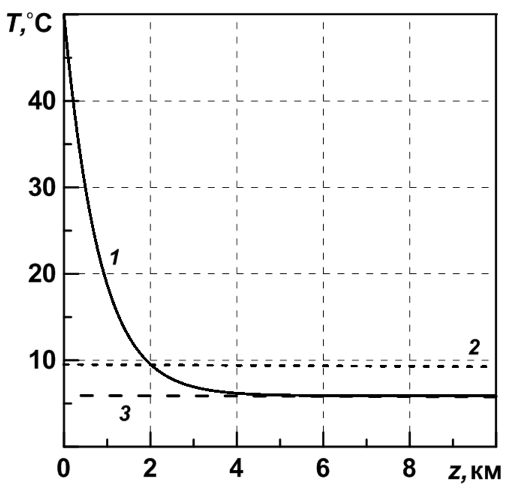


Рис. 1. Изменение по координате z температуры в начальный момент времени. 1 — температура газа; 2 — температура гидратообразования; 3 — температура грунта

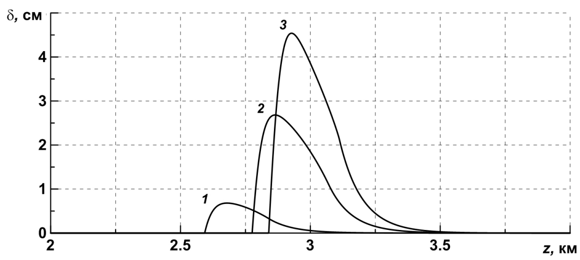


Рис. 2. Изменение по координате z толщины отложений газогидратов на внутренних стенках трубопровода. Линии 1, 2 и 3 соответствуют времени $t = 5$, 20 и 30 сут

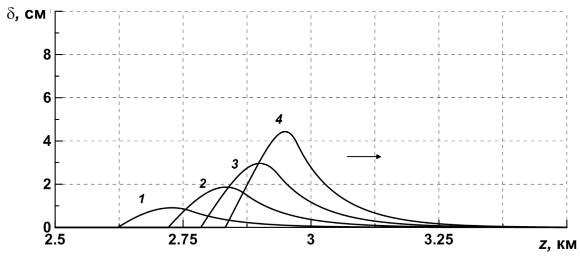


Рис. 3. Профилограмма отложений газогидратов на внутренних стенках трубопровода. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют времени $t = 5$, 10, 15 и 20 сут

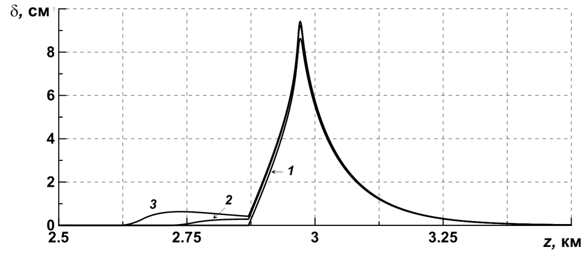


Рис. 4. Изменение по координате z толщины газогидратного слоя в различные моменты времени. Линии 1, 2 и 3 соответствуют $t = 25$, 27 и 30 сут

постоянном во входном сечении давлении (p_0 = 3,2 МПа) [6]. Время работы трубопровода примем равным 30 суток. За это время из-за отложений газовых гидратов проходное сечение составляет примерно 1/3 от первоначального (рис. 2). Из рис. 2 видно, что происходит своеобразное движение твердых отложений вниз по потоку: на левой кромке слоя гидраты разлагаются, а ниже по потоку происходит рост твердых отложений.

Проведенные расчеты показывают, что при течении газа в трубопроводе с постоянным давлением на выходе (p_L = 3,1 МПа) формирование профиля газогидратных отложений до определенного момента времени происходит по похожему сценарию (рис. 3). Однако при дальнейшей эксплуатации трубопровода из-за повышающегося давления на входе (и соответственно смещению зоны гидратообразования влево) перед первой зоной твердых отложений образуется вторичная (рис. 4).

Рассмотрим режим транспортировки природного газа в трубопроводе при заданном давлении на входе и выходе трубопровода. При расчетах использовались следующие данные: p_0 = 3,2 МПа, p_L = 3 МПа. Расход газа m_g — неизвестная функция времени. Для данного режима режим транспортировки газа также наблюдается появление вторичной зоны твердых отложений (рис. 5). В этом случае по мере утолщения гидратного слоя расход газа падает, а давление перед слоем твердых отложений растет, что приводит к более раннему (по координате z) выполнению условия образования газовых гидратов.

На рис. 6 и 7 представлены результаты расчетов толщины отложений газогидратов на внутренней стенке трубопровода при подаче в поток метанола. Если гидратные отложения существенным образом не перекрыли проходное сечение канала (на рис. 6 проходное сечение составляет 1/3 от первоначального), то подача в поток ингибиторов явля-

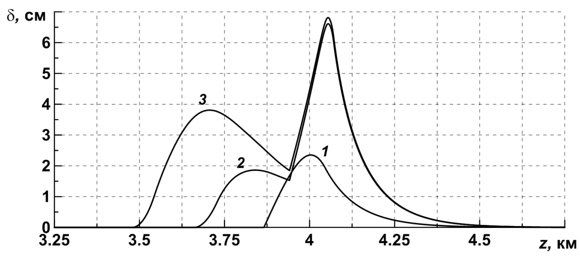


Рис. 5. Профилограмма отложений газогидратов на внутренних стенках трубопровода с заданным перепадом давления

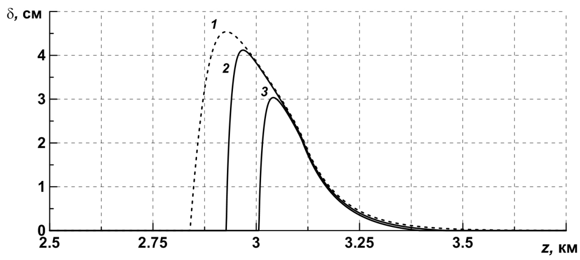


Рис. 6. Изменение по координате z толщины газогидратного слоя при подаче в газовый поток метанола с массовым расходом 250 кг/сут. Штриховая линия 1 соответствует профилю газогидратных отложений в начальный момент времени (слой образовался за 30 сут). Линии 2 и 3 соответствуют времени $t = 24$ и 48 час

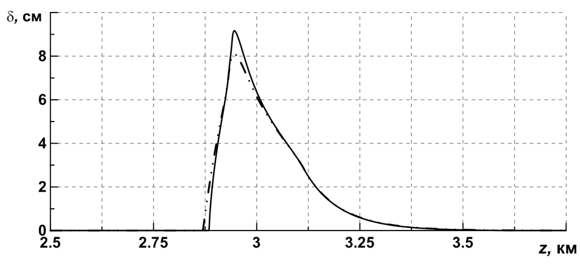


Рис. 7. Профилограмма отложений газовых гидратов на внутренних стенках трубопровода при подаче в газовый поток метанола. Штриховая линия соответствует профилю газогидратных отложений в начальный момент времени (слой образовался за 36 сут). Сплошная линия соответствуют времени 3,5 час.

ется эффективным средством борьбы с образовавшимся слоем твердых отложений: из рис. 6 видно, что левая кромка газогидратной пробки разлагается и общий объем газогидратных отложений за двое суток значительно уменьшился. Если же твердые отложения имеют значительную толщину (на рис. 7 проходное сечение составляет 1/12 от первоначального), то подача метанола с массовым расходом 250 кг/сут уже не препятствует перекрытию проходного сечения трубы (рис. 7). Картина не изменяется и при увеличении расхода метанола.

Список литературы

[1] Макогон Ю.Ф., Саркисьянц Г.А. Предупреждение образования гидратов при добыче и транспорте газа. М.: Недра, 1966. 186 с.

[2] Бондарев Э.А., Габышева Л.Н., Каниболотский М.А. Моделирование образования гидратов при движении газа в трубах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 5. С. 105–109.

[3] Истомин В.А., Квон В.Г. Предупреждение и ликвидация газовых гидратов в системах добычи газа. М.: ООО кИРЦ Газпромь, 2004. 506 с.

[4] Гужов А.И., Титов В.Г., Медведев В.Ф., Васильев В.А. Сбор, транспорт и хранение природных углеводородных газов. М.: Недра, 1978. 401 с.

[5] Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г., Уразов Р.Р. Математическая модель течения природного газа в трубопроводах с учетом диссоциации газогидратов // Инженерно-физический журнал. 2008. Т. 81, № 2. С. 271–279.

[6] Shagapov V.Sh., Urazov R.R., Musakaev N.G. Dynamics of formation and dissociation of gas hydrates in pipelines at the various modes of gas transportation // Heat and mass transfer. 2012, DOI: 10.1007/s00231-012-1000-3.

МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.58

Повышение давления жидкости в замкнутом объеме за счет термического расширения при нагревании через стенки

Юмагулова Ю.А.

Бирская государственная социально-педагогическая академия, Бирск

Рассмотрена радиально-симметричная задача о тепловом воздействии на жидкость, находящуюся в замкнутом объеме. Получены аналитические решения, описывающие повышение давления вследствие термического расширения жидкости. Проанализировано влияние геометрического размера емкости и начального состояния жидкости на изменение давления при ее нагревании через стенки.

Нагревание жидкости сопровождается ее термическим расширением, которое в замкнутом объеме может способствовать разрушению конструкции в результате сильного увеличения давления. Повышение давления жидкости необходимо учитывать при конструировании и расчете надежности различных технических систем, гидравлических машин, паросиловых установок и других устройств, которые работают в переменных температурных условиях. Рассмотрим задачу о нагревании жидкости, находящейся в замкнутой цилиндрической емкости, через боковые стенки. При отсутствии кипения жидкости повышение давления будет происходить только за счет термического расширения по всему объему. При математическом описании процессов теплопереноса уравнения неразрывности, теплопроводности и линейное уравнение состояния жидкости имеют вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho_l\vartheta_l\right) = 0, \qquad (1)$$

$$\rho_l c_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = \frac{\lambda_l}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_l}{\partial r}\right), \qquad (2)$$

$$\rho_l = \rho_{l0}(1 - \alpha^{(T)}(T_l - T_{l0}) + \alpha^{(p)}(p - p_0)), \qquad (3)$$

где ρ_l, λ_l, c_l, ϑ_l, T_l, p — плотность, теплопроводность, теплоемкость, скорость, температура и давление жидкости; нижний индекс «0» здесь и далее соответствует начальным значениям параметров жидкости; $\alpha^{(T)}$ — коэффициент термического расширения жидкости; $\alpha^{(p)} = 1/(\rho_l C_l^2)$ — коэффициент сжимаемости, определяемый скоростью звука в жидкости C_l.

В начальном состоянии ($t = 0$) температура жидкости равна T_{l0}, а давление p_0. С некоторого момента времени ($t > 0$) на границе $r = b$ поддерживается постоянная температура T_e, которая выше начальной температуры T_{l0}. При этом на оси симметрии емкости $r = 0$ выполняется условие отсутствия тепловых потоков ($\partial T_l/\partial r = 0$).

Из уравнения неразрывности (1) и теплопроводности (2) с учетом линейного уравнения состояния (3) можно получить

$$\alpha^{(p)} r\frac{dp}{dt} = \alpha^{(T)}\nu_l^{(T)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_l}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\vartheta_l\right), \qquad (4)$$

где $\nu_l^{(T)} = \lambda_l/(\rho_l c_l)$ — температуропроводность жидкости. Уравнение (4) записано в рамках гипотезы гомобаричности (однородности давления $(\partial p/\partial r = 0)$.

Проинтегрировав уравнение (4) по координате от 0 до b и полагая равенство нулю скорости жидкости на границах $r = 0$ и $r = b$, уравнение для изменения давления примет вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{2\alpha^{(T)}\nu_l^{(T)}}{\alpha^{(p)}b}\left(\frac{\partial T_l}{\partial r}\right)_{r=b}. \qquad (5)$$

Для задания теплового потока на границе $r = b$ необходимо найти решение уравнения теплопроводности (2), удовлетворяющее условиям $T_l = T_{l0}(t = 0, 0 < r < b)$, $\partial T_l/\partial r = 0(t > 0, r = 0)$, $T_l = T_e(t > 0, r = b)$.

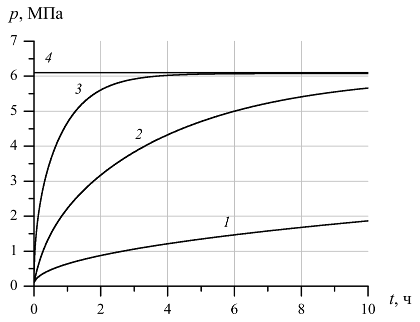


Рис. 1. Динамика изменения давления воды при трех значениях радиуса емкости $b = 0.5$ (*1*), 0.14 (*2*), 0.05 м (*3*)

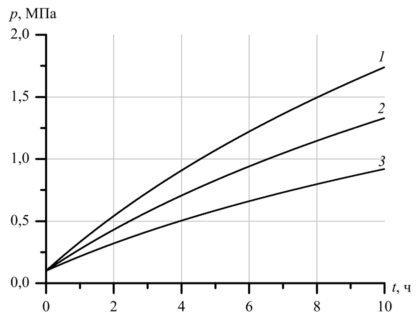


Рис. 2. Повышение давления воды при различных ее начальных значениях $T_{l0} = 273$ (*1*), 293 (*2*), 313 К (*3*)

Решение этой задачи имеет вид [3]:

$$T(r,t) = \frac{2(T_{l0} - T_e)}{b} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\nu_l^{(T)} \alpha_n^2 t\right) \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(b\alpha_n)}, \qquad (6)$$

где $J_0(r)$, $J_1(r)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка; α_n — положительные корни уравнения $J_0(b\alpha_n) = 0$.

Подставляя (6) в (5), получим:

$$p = p_0 + \frac{4(T_e - T_{l0})}{\alpha^{(p)} b^2 \sqrt{\pi}} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \left(1 - \exp\left(-\nu_l^{(T)} \alpha_n^2 t\right)\right). \qquad (7)$$

Величину максимального давления жидкости $p^{(M)}$ в замкнутом объеме можно определить из (3) предельным переходом при $t \to \infty$ в виде

$$p^{(M)} = p_0 + \frac{\alpha^{(T)}}{\alpha^{(p)}} \left(T_e - T_{l0}\right). \qquad (8)$$

На основе полученных решений (7) и (8) выполнены расчеты применительно к воде со следующими физическими параметрами [4]: $\alpha^{(T)} = 10^{-4}$ К$^{-1}$, $\alpha^{(p)} = 10^{-9}$ Па$^{-1}$, $\nu_l^{(T)}$=$1.3{\cdot}10^{-7}$ м^2/с. Для начального состояния приняты значения $T_{l0} = 293$ К, $p_0 = 0.1$ МПа, $T_e = 353$ К.

На рис. 1 линиями 1, 2, 3 представлены зависимости давления от времени для значений радиуса емкости $b = 0.5$, 0.1 и 0.05 м. Линия 4 соответствует максимальному давлению жидкости $p^{(M)}$ в замкнутом объеме.

Влияние начальной температуры воды на скорость повышения давления иллюстрируется на рис. 2.

Для радиально-симметричной задачи построена математическая модель, описывающая повышение давления жидкости в замкнутом объеме при нагревании через боковые стенки.

Установлено, что за счет термического расширения воды может произойти значительное повышение давления в замкнутом объеме. Снижение начальной температуры воды приводит к увеличению скорости изменения давления.

Список литературы

[1] Шагапов В.Ш., Ильясов У.Р., Насырова Л.А. Тепловой удар в пористой среде, насыщенной жидкостью // Теплофизика и аэромеханика, 2003. Т. 10, № 3. С. 411–422.

[2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.

[3] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

[4] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972, 720 с.

Научное издание

Труды Института механики
им. Р. Р. Мавлютова
Уфимского научного центра РАН

Выпуск 9

Оригинал-макет изготовлен в ИМех УНЦ РАН

Редактор: Е. Е. Налобина
Технический редактор: К. И. Михайленко
Компьютерная верстка и дизайн: К. И. Михайленко, Е. Е. Налобина

Подписано в печать с оригинал-макета 28.06.2012
Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура «Computer Modern». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 123. Уч.-изд. л. 456.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство «Нефтегазовое дело»
450055, г. Уфа, пр-т Октября, 144/3, оф. 418
Тел. (347) 284-39-49, 274-11-08

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в типографии ООО НПФ «Восточная печать»
450055, г. Уфа, пр-т Октября, 144/3, оф. 418
Тел. (347) 284-39-49, 274-11-08

e-mail: orient4@rambler.ru